

国际电气工程先进技术译丛

Springer

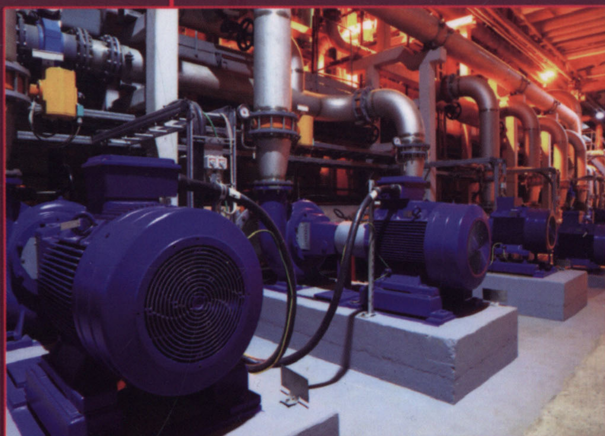
电 机

Electrical Machines

[塞尔维亚] 斯洛博丹 N.乌克塞维克(Slobodan N.Vukosavic) 著

余龙海 刘光军 廖育武 译





机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

关于译者

余龙海

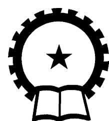
正高职高级工程师，大力电工襄阳股份有限公司总工程师，湖北省楚天学者特聘教授，享受国务院特殊津贴的专家，全国优秀科技工作者。兼任中国电器工业软起动设备技术联盟副秘书长、全国电力电子标准化软起动分技术委员会副主任委员。长期从事电动机起动经济运行及控制系统的研究，主持国家及省部级项目十多项，有十多项成果获得省、市科技进步奖，出版著作有《电动机能效与节电技术》。



国际电气工程先进技术译丛

电　　机

［塞尔维亚］斯洛博丹 N. 乌克塞维克（Slobodan N. Vukosavic）　著
余龙海　刘光军　廖育武　译



机 械 工 业 出 版 社

本书基本覆盖了电机在它们的典型应用领域的功能，采用坐标变换是为了努力得到一个更直观、简洁和易于使用的模型。

本书尽量缩减了数学推导的篇幅，优先考虑培养电机的系统概念、解释电机的电端口和机械端口的使用和外部特性。本书覆盖了大多数与电机尺寸、转矩和功率相关的概念，解释了损耗和次生影响，勾勒了可以忽略次生影响的工况和条件。

尽管研究和使用电机的数学模型、等效电路和机械特性的目标贯穿于本书，机电转换过程的物理内涵才是本书始终关注的焦点。本书还包括了诸如槽型、永磁体位置以及它们对电机参数和性能的影响等内容。

本书适用于电气工程专业的本科生，可作为电机的入门课程。本书也推荐给准备做毕业论文的学生，他们需要考虑对电机理解、建模、电源控制和电机的具体说明。另外，本书也可作为电动机和发电机相关的工程人员的有益的参考书。

译　者　序

电机学历来是电类专业的必修课，是电气工程专业的技术基础课程。电机发明至今，已有两百多年的历史。电机学科已经发展成为一个比较成熟的学科，电机工业也已成为近代社会的支柱产业之一，在工业文明的发展中起着关键、重要的作用。

《Electrical Machines》一书是2013年在美国出版的电机学领域的最新著作。作者Slobodan N. Vukosavic是塞尔维亚贝尔格莱德大学电气工程专业的教授。Slobodan N. Vukosavic教授多年来为电机技术的教学与普及工作做出了巨大的贡献。

本书详细介绍了电磁场基础理论、机电转换原理、旋转电机、直流电机模型及特性、感应电机模型及特性、变速感应电机、同步电机的数学模型、稳态及瞬态特性及变频同步电机等内容，涵盖了电机基础理论与电机特性及模型的整个体系。

本书深入浅出、详尽易懂，非常适合用作电气工程类专业本科生的教材，也可作为电气工程师的参考书。

前　言

本书是专为电气工程专业大学生而编写的，以作为他们在电机领域的第一门课程的教材。这本书也推荐给要准备毕业设计的同学，他们需要理解电机的原理、建模、供能、控制以及电机的分类；同时，本书也可以作为其他工科学生在涉及电动机和发电机的基本理论时的参考书。本书也推荐给那些有志于机电能量转换和需要处理电机驱动和发电系统的研究生和工程技术人员。不同于电机领域的其他书籍，读这本书时不需要高深的背景知识。本书的作者试图以工程学科的规范来指引学生、工程师等读者，而不是电气学科的规范。

本书提供了那些应该被未来工程师所掌握的基础知识。我们使用基础的工程理解来直观地介绍电磁能量转换的原则，这样可以很容易记忆和回顾。本书让读者理解电机的电气和机械关键特性，让读者分析电机的稳态和动态特征，让读者理解能量转换中损耗、效率和冷却的基本概念，理解如何去优化电机稳态和动态运行时的安全运行范围，理解电机的供电电源和静止功率转换器，理解直流电机、感应电机和同步电机的一些基本区别，了解电动机和发电机的一些典型运用场合。

大学二年级的工科类学生需要开拓电机领域的知识和掌握电机领域的必备技能。这本书种类齐全，它包含了问题、答案和在学习过程中需要综述时的问题解答过程。每一章都包含了一些合适的练习、问题和设计任务，这些内容是为了让读者回顾和使用相关的知识。在有需要的地方，本书中还提供了扩展提要，以及所需知识和前提的解释。本书中所使用方式和方法来自于作者在贝尔格莱德大学教授电机学 16 年来的经验。

读者：

本书最适合二年级或者三年级的电气工程专业大学本科生，以作为他们在电机领域的第一门课程的教材。这本书也推荐给那些将电机驱动、可再生能源和其他一些包含机电能量转换领域作为自己研究方向的工科研究生，同时推荐给那些毕业设计中包含了电机和电磁装置驱动领域相关知识的同学们。本书也可以作为在其他工程规范中涉及了电动机和发电机的工程师们的参考书。

预备知识：

学习本课程前所需要的背景知识包括数学、物理和在之前的学期中已经学习过的很多当代工科课程中的基础工程学。电机课程的学习和技能扩展过程最适合于工科二年级的学生。学习所需要的预备知识不包括空间导数和电磁场理论。本书对于读者而言是通俗易懂的，阅读它不需要电磁学、电路理论、数学和工程物理课程很强的背景知识。阅读本书所必需的背景知识包括基础电磁学和磁学、交流电路和直

流电路以及包含有复数和矢量的基本计算能力。本书的作者试图以工程学科的规范来指引学生、工程师等读者，而不是电气学科的规范。在有需要的地方，这本书中还提供了扩展提要，以及所需知识和前提的解释。本书回顾和囊括了那些对于理解分析和扩展有帮助的基础知识。

目标：

1）使用基础的工程理论来介绍机电能量转换的原则以及电机的基础种类和应用。

2）介绍了做为工程技术人员必须掌握的电机基础的知识和技能。包括电机中电气和机械的关键特性。

3）为工程师提供简易的通用参考文献。

4）培养分析电机稳态和动态特性的基本技能，了解电机能量转化损失、效率和散热的概念。

5）掌握几种主要类型电机的机械特性和稳态等效电路。

6）理解直流电机、感应电机和同步电机的基本不同点，学习和比较它们的稳态运行区域和暂态运行区域。

7）学习和理解工频电源供电和变频器供电的交流电机的特性，比较它们的特点并熟悉它们的典型应用。

8）理解电机电源的基本技术要求，学习几种常用的静止变频电源的基本拓扑结构和特点。

9）研究弱磁控制并分析直流电机和交流电机在恒定磁场区间和恒定功率区间的特点。

10）掌握计算功率转化时损耗、温升和冷却方法的技能。掌握热模型和间歇加载的知识。

11）介绍和解释电流、电压、磁链、转矩、功率和转速的额定值和标称值。

教学方法：

1）重点是对系统的概观——解释电机的外部特征——其中电能和机械能的转换。设计和结构方面是第二重要的内容，也许超越了本书的范畴。

2）在需要的地方，讲解单元的介绍部分由那些通过解决问题所需要的背景知识组成。

3）数学推导部分被减小为尽可能地少。空间导数和麦克斯韦方程的微分形式是不需要掌握的。

4）本书始终坚持研究并使用电机数学模型、等效电路和机械特性的目标。同时，电磁转换过程的物理特点被关注。后者需要对于转换损耗的合适理解并掌握典型电机单位功率、单位转矩和每安培转矩比率的基本特点。

5）虽然电机设计超越了本书的范畴，一些关于估算电机尺寸、转矩、功率、惯性和损耗的最相关的概念和技能也被介绍和解释。本书也解释了一些次生的损耗

和效应，并指出了次生现象不能被忽略的情况和条件。

应用场合：

本书给出了直流电机、感应电机和同步电机的等效电路、动态模型和机械特性，概述了电机结构的基本信息，包括磁路和绕组，虽然设计电机超越了本书的范畴。在本书中，电机的应用被分成了两组：①恒压恒频供电的电机；②由静止变换器供电的变压变频电机。一些设计恒频和变频运行电机的重要的设计细节被包含在本书之中。本书概述了直流电机和交流电机传动中使用到的静止功率变换器的拓扑结构。本书也提供了在额定值和标称值下，以及连续和间歇加载情况下的损耗、发热和冷却方法的基本信息。对于一些最常见的电机，本书提供了并解释了稳态运行区域和暂态运行区域，以及恒定磁场运行区域和弱磁磁场运行区间。

致　　谢

感激 Miloš Petrović教授、Dragutin Salamon 教授、Jožef Varga 教授和 Aleksandar Stanković教授等通读本书的第一版并提出了改进的建议。

感谢那些提供了技术协助的年轻同事、助教、研究生、博士生同学和青年教授，他们帮助准备了一些问题和答案的解答，通读了本书的各个章节、评论并建立了索引词。

研究助理 Nikola Popov 和 Dragan Mihic 在准备本书的手稿、图、表时提供了大量的技术支持。

作者也希望感谢 Ivan Pejcic、Ljiljana peric，Nikota Vukosavic、Darko Marcetic，Petar Matic，Branko Blanusa，Dragomir Zivanovic，Mladen Terzic，Milos Stojadinovic，Nikola Lepojevic，Aleksandar Latinovic 和 Milan Lukic。等人。

目　　录

译者序
前言
致谢
第 1 章　简介 …… 1
1.1　功率变换器和电机 …… 1
1.1.1　旋转功率变换器 …… 1
1.1.2　静止功率变换器 …… 2
1.1.3　电磁能量转换的作用 …… 2
1.1.4　运行原理 …… 2
1.1.5　磁路和电路 …… 2
1.1.6　旋转电机 …… 3
1.1.7　可逆电机 …… 4
1.2　意义和典型应用 …… 4
1.3　变量和旋转运动的关系 …… 7
1.4　要掌握的知识和技能 …… 10
1.4.1　电机的基本特点 …… 10
1.4.2　等效电路 …… 11
1.4.3　机械特性 …… 11
1.4.4　电机中的暂态过程 …… 11
1.4.5　数学模型 …… 12
1.5　采用的方法和分析步骤 …… 12
1.6　变流器供电的变速电机的注意事项 …… 14
1.7　高效电机的评价 …… 15
1.8　铁和铜的利用率的评价 …… 15
第 2 章　机电能量转换 …… 17
2.1　洛伦兹力 …… 17
2.2　平行导体的相互作用 …… 18
2.3　运动导体的电动势 …… 19
2.4　发电模式 …… 20
2.5　制动转矩 …… 21
2.6　制动力 …… 22

2.7　电场中导体所受到的力 …… 23
2.8　介电常数的改变 …… 23
2.9　压电效应 …… 26
2.10　磁致伸缩 …… 26
第3章　电磁耦合场 …… 28
3.1　基于静电场的机电能量转换装置 …… 28
3.1.1　电荷、电容和能量 …… 29
3.1.2　电能、机械能和场能 …… 29
3.1.3　电场力表达式 …… 30
3.1.4　机电能量转换循环 …… 32
3.1.5　电场和磁场的能量密度 …… 33
3.1.6　耦合场和能量传递 …… 33
3.2　基于磁耦合场的机电转换装置 …… 34
3.2.1　直线运动的转换装置 …… 35
3.2.2　旋转运动的转换装置 …… 37
3.2.3　反电动势 …… 38
第4章　磁路 …… 41
4.1　磁路的分析 …… 42
4.1.1　磁通守恒定律 …… 42
4.1.2　安培环路定律 …… 43
4.1.3　磁场强度 H 和磁感应强度 B 的基本关系 …… 43
4.2　磁键矢量 …… 44
4.3　铁磁材料的磁化特性 …… 44
4.4　磁路中的磁阻 …… 45
4.5　磁路中的能量 …… 48
4.6　磁路的参考方向 …… 49
4.7　磁路中的损耗 …… 50
4.7.1　磁滞损耗 …… 50
4.7.2　涡流损耗 …… 51
4.7.3　磁路中的总损耗 …… 53
4.7.4　减少铁耗的方法 …… 53
4.7.5　叠片结构铁磁材料中的涡流 …… 54
第5章　旋转电机 …… 57
5.1　旋转电机中的磁路 …… 57
5.2　机械端口 …… 58
5.3　绕组 …… 58

5.4 磁路中的槽 …… 60
5.5 绕组轴线的位置和符号 …… 62
5.6 转换损耗 …… 63
5.7 气隙中的磁场 …… 65
5.8 磁场能量、尺寸和转矩 …… 66
第6章 电机建模 …… 70
6.1 建模的准备 …… 70
6.1.1 建模会遇到的问题 …… 71
6.1.2 结论 …… 72
6.2 忽略的现象 …… 73
6.2.1 分布式能量和分布式参数 …… 73
6.2.2 忽略寄生电容 …… 74
6.2.3 忽略铁耗 …… 74
6.2.4 忽略铁的非线性 …… 74
6.3 电源功率 …… 74
6.4 电动势 …… 75
6.5 电压平衡方程 …… 76
6.6 漏磁通 …… 77
6.7 耦合磁场中的能量 …… 79
6.8 机电能量转换中的功率 …… 81
6.9 转矩表达式 …… 82
6.10 机械子系统 …… 84
6.11 机械子系统中的损耗 …… 85
6.12 动能 …… 85
6.13 机电子系统的建模 …… 86
6.14 机电能量转化装置中的功率平衡 …… 87
6.15 数学模型方程 …… 89
第7章 单馈和双馈变换器 …… 90
7.1 单馈变换器的分析 …… 91
7.2 自感的变化 …… 92
7.3 功率和转矩的表达式 …… 93
7.4 双馈变换器的分析 …… 94
7.5 互感的变化 …… 95
7.6 转矩表达式 …… 96
7.6.1 平均转矩 …… 97
7.6.2 产生非零转矩的条件 …… 97

7.7　磁极 …… 98
7.8　直流电机和交流电机 …… 99
7.9　矢量乘积形式的转矩表达式 …… 100
7.10　旋转电机磁链矢量的位置 …… 101
7.11　旋转磁场 …… 104
7.12　电机的类型 …… 106
7.12.1　直流电机 …… 106
7.12.2　感应电机 …… 106
7.12.3　同步电机 …… 106
第8章　气隙中的磁场 …… 108
8.1　具有分布式导体的定子绕组 …… 109
8.2　正弦电流片 …… 111
8.3　定子磁场分量 …… 111
8.3.1　磁场的轴向分量 …… 112
8.3.2　磁场的切向分量 …… 114
8.3.3　磁场的径向分量 …… 116
8.4　定子磁场回顾 …… 119
8.5　用矢量表示的磁场 …… 120
8.6　转子磁场分量 …… 123
8.6.1　转子磁场的轴向分量 …… 125
8.6.2　转子磁场的切向分量 …… 125
8.6.3　转子磁场的径向分量 …… 126
8.6.4　转子磁场各组成分量的总结 …… 128
8.7　用矢量形式表示磁场的准则 …… 128
第9章　磁能、磁通和转矩 …… 130
9.1　定子磁场和转子磁场的相互作用 …… 130
9.2　气隙磁场中的能量 …… 132
9.3　电磁转矩 …… 134
9.3.1　电磁转矩表达式 …… 135
9.4　单匝线圈磁通和绕组磁通 …… 136
9.4.1　定子单匝线圈中的磁通 …… 137
9.4.2　转子单匝线圈中的磁通 …… 138
9.4.3　绕组磁通 …… 140
9.4.4　绕组磁通矢量 …… 142
9.5　绕组轴线和磁通矢量 …… 143
9.6　定子磁通矢量和转子磁通矢量的矢量积 …… 144

9.7　电磁转矩产生的条件 …… 146
9.8　电磁转矩和电机尺寸之间的关系 …… 148
9.9　旋转磁场 …… 149
9.9.1　两相正交绕组系统 …… 150
9.9.2　三相绕组系统 …… 153
第 10 章　电动势 …… 156
10.1　变压器电动势和运动电动势 …… 156
10.2　单匝线圈中的电动势 …… 157
10.2.1　计算穿过单匝线圈的磁通的一阶导数 …… 157
10.2.2　各个导体产生电动势的总和 …… 158
10.2.3　单匝线圈中的电压平衡 …… 159
10.2.4　电动势波形 …… 159
10.2.5　电动势的均方根值（*rms*） …… 160
10.3　绕组中的电动势 …… 161
10.3.1　集中绕组 …… 161
10.3.2　分布绕组 …… 161
10.3.3　短距系数 …… 162
10.3.4　分布系数 …… 166
10.3.5　相带中的谐波表达式 …… 167
10.4　复励绕组中的电动势 …… 170
10.5　谐波 …… 170
10.5.1　分布绕组中的电动势 …… 172
10.5.2　各种谐波 …… 176
10.5.3　绕组电动势的峰值和均方根值 …… 178
第 11 章　直流电机介绍 …… 181
11.1　结构和工作原理 …… 182
11.2　定子结构 …… 182
11.3　他励直流电机 …… 183
11.4　转子导体中的电流 …… 183
11.5　机械换向装置 …… 185
11.6　转子绕组 …… 185
11.7　换向 …… 189
11.8　换向过程 …… 191
11.9　转子绕组的制作 …… 192
11.10　换向问题 …… 196
11.11　转子磁场 …… 199

11.12　电路和磁路 …… 200
11.13　磁路 …… 200
11.14　电路 …… 201
11.15　直轴和交轴 …… 202
11.15.1　矢量表示 …… 203
11.15.2　定子总磁通 …… 203
11.15.3　电机中的总磁通 …… 203
11.16　电动势和电磁转矩 …… 204
11.16.1　电枢绕组中的电动势 …… 204
11.16.2　转矩的合成 …… 206
11.16.3　转矩和电动势的表达式 …… 207
11.16.4　电动势 E_a 的计算 …… 208
11.16.5　转矩的计算 …… 208
第 12 章　直流电机的建模与应用 …… 210
12.1　励磁绕组的电压平衡方程 …… 211
12.2　电枢绕组的电压平衡方程 …… 212
12.3　转子速度的变化 …… 213
12.4　数学模型 …… 214
12.5　永磁直流电机 …… 214
12.6　模型的框图 …… 215
12.7　转矩控制 …… 216
12.8　稳态等效电路 …… 217
12.9　机械特性 …… 218
12.10　机械特性的性能 …… 220
12.11　转速控制 …… 221
12.12　直流发电机 …… 223
12.13　直流电机供电的拓扑结构 …… 224
12.13.1　电枢功率供应要求 …… 225
12.13.2　T-Ω 图和 U-I 图中的四个象限 …… 226
12.13.3　电源的四个象限 …… 227
12.13.4　脉冲宽度调节 …… 231
12.13.5　电流脉动 …… 234
12.13.6　功率变换器的拓扑结构 …… 237
第 13 章　直流电机的特性 …… 240
13.1　额定电压 …… 240
13.2　机械特性 …… 241

13.3　自然特性 …… 241
13.4　额定电流 …… 241
13.5　热模型和间歇工作 …… 242
13.6　额定磁通 …… 245
13.7　额定转速 …… 245
13.8　弱磁 …… 246
13.8.1　高速运行 …… 246
13.8.2　弱磁时的转矩和功率 …… 246
13.8.3　磁通变化 …… 248
13.8.4　电动势的改变 …… 248
13.8.5　电流变化 …… 248
13.8.6　转矩变化 …… 248
13.8.7　功率变化 …… 248
13.8.8　弱磁运行需要的条件 …… 248
13.9　暂态特性 …… 249
13.10　稳态运行区域 …… 250
13.11　功率损耗和功率平衡 …… 250
13.11.1　供电功率 …… 250
13.11.2　励磁绕组的功率损耗 …… 250
13.11.3　电枢绕组的功率损耗 …… 251
13.11.4　机电能量转换的功率 …… 251
13.11.5　铁耗（P_{Fe}） …… 251
13.11.6　机械损耗（P_F） …… 251
13.11.7　旋转造成的损耗（$P_{Fe}+P_F$） …… 252
13.11.8　机械功率 …… 252
13.12　额定值和标称值 …… 252
13.13　铭牌值 …… 253
第 14 章　感应电机 …… 255
14.1　结构和运行规则 …… 255
14.2　磁体 …… 256
14.3　笼型转子与绕线式转子 …… 258
14.4　三相定子绕组 …… 259
14.5　旋转磁场 …… 261
14.6　转矩产生的原则 …… 262
14.7　转矩表达式 …… 263
第 15 章　感应电机的建模 …… 265

15.1　稳态和暂态现象的建模 …… 265
15.2　数学模型的结构 …… 266
15.3　三相电机和两相电机 …… 267
15.4　克拉克变换 …… 270
15.5　两相等效电路 …… 271
15.6　恒定式 …… 273
15.6.1　$K=1$ 时的克拉克变换 …… 276
15.6.2　$K=\sqrt{2/3}$时的克拉克变换 …… 276
15.6.3　$K=2/3$ 时的克拉克变换 …… 277
15.7　两相等效绕组 …… 277
15.8　定子绕组的模型 …… 278
15.9　电压平衡方程 …… 279
15.10　笼型转子的建模 …… 279
15.11　转子绕组的电压平衡方程 …… 282
15.12　电感矩阵 …… 282
15.13　漏磁通与主磁通 …… 283
15.14　磁耦合 …… 284
15.15　L 矩阵 …… 285
15.16　转子侧变量向定子侧转化 …… 285
15.17　数学模型 …… 286
15.18　缺点 …… 287
15.19　在同步坐标系中建模 …… 290
15.20　帕克变换 …… 290
15.21　变换矩阵 …… 291
15.22　转子变量变换 …… 292
15.23　向量和复数 …… 293
15.24　dq 坐标系下的电感矩阵 …… 294
15.25　dq 坐标系下的电压平衡方程 …… 296
15.26　电气子系统 …… 296
第 16 章　感应电机的稳态运行 …… 298
16.1　输入功率 …… 298
16.2　转矩表达式 …… 299
16.3　转差率 …… 299
16.4　机械功率与损耗 …… 300
16.5　稳态运行 …… 301

16.6　与变压器的类比 …… 303
16.7　转矩和电流的计算 …… 305
16.8　稳态转矩 …… 306
16.9　标幺值 …… 309
16.10　动态转矩的相对值 …… 311
16.11　稳态电路的参数 …… 313
16.12　机械特性分析 …… 319
16.13　小转差率下的电机运行 …… 321
16.14　大转差率下的电机运行 …… 322
16.15　并网的感应电机的起动 …… 323
16.16　极限转矩和极限转差 …… 323
16.17　克劳斯方程 …… 325
16.18　静态平衡和非静态平衡 …… 326
16.19　连续工作的稳定区间 …… 326
16.20　损耗和功率平衡 …… 328
16.21　铜耗、铁耗和机械损耗 …… 328
16.22　机械内功率 …… 328
16.23　电压和磁通的关系 …… 329
16.24　功率平衡 …… 330
第17章　异步电机变频调速 …… 332
17.1　电网供电电机的转速变化 …… 332
17.2　电压改变 …… 333
17.3　绕线转子电机 …… 334
17.4　变极对数 …… 337
17.5　多极电机的特性 …… 339
17.5.1　电网供电的多极电机 …… 340
17.5.2　由静态功率变换器供电的多极电机 …… 340
17.5.3　多极电机的缺点 …… 340
17.6　双速定子绕组 …… 342
17.7　相关符号 …… 343
17.8　变频电源供电 …… 344
17.9　变频电源 …… 344
17.10　电源转换器的拓扑结构 …… 345
17.11　脉冲宽度调制 …… 346
17.12　输出电压的平均值 …… 346
17.13　正弦输出电压 …… 347

17.14　PWM 波形的频谱 …… 348
17.15　电流纹波 …… 348
17.16　频率控制 …… 350
17.17　弱磁 …… 352
17.18　稳态和瞬态运行区 …… 354
17.19　稳态运行的限制 …… 355
17.19.1　*RI* 补偿 …… 356
17.19.2　临界转速 …… 356
17.20　感应电机的结构 …… 358
17.20.1　电网供电的电机 …… 358
17.20.2　变频感应电机 …… 361
第 18 章　同步电机 …… 363
18.1　运行原理 …… 363
18.2　定子绕组 …… 364
18.3　旋转磁场 …… 365
18.4　转矩的产生 …… 367
18.5　同步电机的结构 …… 369
18.6　定子磁路 …… 369
18.7　转子的结构 …… 370
18.8　励磁绕组的供电 …… 372
18.9　旋转变压器励磁 …… 372
18.10　永磁体励磁 …… 374
18.11　永磁体材料特性 …… 375
18.12　永磁体的磁路 …… 377
18.13　表贴式和内埋式磁体 …… 377
18.14　永磁电机的特性 …… 379
第 19 章　同步电机的数学模型 …… 381
19.1　同步电机的建模 …… 381
19.2　磁动势 …… 382
19.3　两相等效 …… 383
19.4　克拉克三相/两相变换 …… 384
19.5　电感矩阵和电压平衡方程 …… 386
19.6　帕克变换 …… 388
19.7　*dq* 系中的电感矩阵 …… 389
19.8　用复数表示矢量 …… 390
19.9　电压平衡方程 …… 391

19.10 隐极电机（各向同性电机）的电气子系统 …… 392
19.11 隐极电机中的转矩 …… 393
19.12 凸极电机（各向异性电机） …… 394
19.13 磁阻转矩 …… 395
19.14 磁阻电动机 …… 396
第 20 章 稳态运行 …… 399
20.1 稳态时的电压平衡方程 …… 399
20.2 等效电路 …… 400
20.3 电流、电压的峰值和有效值 …… 401
20.4 隐极电机的矢量图 …… 402
20.5 凸极电机的矢量图 …… 406
20.6 凸极电机的转矩 …… 407
20.7 随功角变化的转矩 …… 407
20.8 机械特性 …… 408
20.9 由刚性电网供电的同步电机 …… 409
20.10 同步发电机的运行 …… 409
20.10.1 涡轮机功率的增加 …… 410
20.10.2 频率的增加 …… 411
20.10.3 无功功率和电压变化 …… 412
20.10.4 功角变化 …… 412
第 21 章 同步电机瞬态运行 …… 415
21.1 机电时间常数 …… 415
21.2 同步电机的位置 …… 416
21.3 *LC* 阻尼电路 …… 418
21.4 同步电机的阻尼 …… 420
21.5 阻尼绕组 …… 421
21.6 同步电机的短路 …… 422
21.6.1 直流分量 …… 423
21.6.2 I_{SC1}的计算 …… 424
21.6.3 I_{SC2}的计算 …… 425
21.6.4 I_{SC3}的计算 …… 427
21.7 瞬态和次瞬态现象 …… 430
21.7.1 时间间隔 1 …… 430
21.7.2 时间间隔 2 …… 431
21.7.3 时间间隔 3 …… 431
第 22 章 同步电机变频技术 …… 432

22.1　逆变器供电的同步电机 …… 432
22.2　转矩控制原理 …… 433
22.3　电流控制原理 …… 434
22.4　弱磁控制 …… 438
22.5　暂态和稳态运行区域 …… 440
参考文献 …… 442

第 1 章　简　　介

本章介绍了机电能量转换和旋转功率变换器，还介绍了电机在电力系统、工业应用及商业和民用的作用，也讲述了学习电机、掌握电机的建模、供能和控制方法的必要性。本章还讨论了本书中使用的标识和单位体系、详述了需要掌握的知识，以及它们的适用条件。本章还包括用于更深研究的一些基本论点。

1.1　功率变换器和电机

电机是将能量从一种形式转换为另外一种形式的功率变换器和装置。它们将机械能转换为电能，或者相反。也有一些功率变换器将一种形式的电能转换为另一种形式电能，它们也被称为静止功率变换器。一些功率变换器的例子列举如下：

1）用电能来产生机械能的功率变换器被称为电动机。电动机是电机的一种类型。

2）将直流电流和电压转换为交流电的功率变换器被称为逆变器。逆变器属于静止功率变换器，它们使用半导体开关器件。

3）发电机将机械能转换为电能，它们属于电机的另一种类型。

4）电力变压器将一个交流电力系统的电能转换为另一个交流电力系统的电能，这两个交流电力系统有相同的频率。

1.1.1　旋转功率变换器

将电能转换为机械能的电机称为电动机。将机械能转换为电能的电机称为发电机。机械能通常以旋转运动的形式出现；因此，电动机和发电机被称为旋转功率变换器或者旋转电机。将电能转换为机械能的过程被称为机电转换。不同于旋转变换器，电力变压器是一种没有旋转部分而将一个交流电力系统的电压和电流变换到另一个交流电力系统的电机。这两个交流电力系统有相同的频率，但它们的电压等级是不同的。尽管其他一些教科书将电力变压器也列为讨论内容，但本书中的旋转功率变换器只研究了旋转电机、发电机和电动机。

电机是由绝缘导体组成的电路和铁磁材料组成的磁路构成。电机的机械能是由于耦合场中的导体和铁磁材料的电磁力作用而产生的。导体和铁磁材料可以是电机的旋转部分（转子）也可以是静止部分（定子）。电机可动部分的旋转导致了磁场的变化。导体上依次感应电动势，这就产生了电能。相似的，电机中导体（也就是绕组）中的电流与磁场相互作用并产生使转子旋转的力。不同于电机，电力变压器不包含旋转部分。它们的运行是基于包围在同一个磁路的一次绕组和二次绕组的电磁耦合。

1.1.2 静止功率变换器

除了电机和功率变压器以外，还有电力变换器，它们的运行不是基于电路和磁路的电磁耦合。变换器包括半导体开关器件时，也被称为静止电力变换器或者电力电子装置。二极管整流器是一个例子，它包括4个功率二极管以构成桥。由交流电供电，二极管整流器输出的是脉冲的直流电压。因此，二极管整流器将交流电能转换为直流电能。将直流电能转换为交流电能的是逆变器，也就是包含功率晶体管和功率晶闸管之类的半导体开关器件的静止电力变换器。静止电力变换器经常和电机结合使用，但是它们不包含在本书的内容中。

1.1.3 电磁能量转换的作用

机电转换在生产和使用电能上起到了关键作用。发电机产生用于生产过程、交通、照明和其他工业，以及住宅和家庭应用的电能，而电动机的用户则将相当一部分电能转化为工作所需的机械能。由于机电转换，能源可以以电力传输的方式到达远距离的用户。现代电力传输技术非常可靠，拥有较低的能量损失，而且传输过程不排放气体或其他有害物质。

在电站中，汽轮机和水轮机产生机械功传递给发电机。发电机将机械能转换成电能，输出便于使用的交流电流和电压。高压线将电能传输到工业中心和社区，再通过电力电缆和电线供应给生产大厅、运输单位、办公室和家庭的各种用户。传输和分配过程中，会通过电力变压器进行几次电压变换。发电机、电动机和电力变压器是电力系统中至关重要的部分。

1.1.4 运行原理

机电能量转换可以通过不同的物理学原理实现。电机的运行通常是基于耦合载流电路和电机的运动部分的磁场。耦合场中的导体和铁磁部分受到电磁力的作用。导体形成磁动势和电路载流。电路连接的磁链（称为磁通）会因电流的变化或运动而改变。磁通的改变会在电路中产生电动势。决定电机和磁耦合场的机电能量转换的基本物理原理有

1）法拉第电磁感应定律，它定义了变化的磁通和感应电动势之间的关系；

2）安培定律，它用于描述载流导体产生的磁场；

3）洛伦兹定律，它确定了作用在磁场和电场中的移动电荷上的电磁力；

4）基尔霍夫定律，它描述了在电路中电压和电流之间的关系或者在磁路中磁链和磁动势之间关系。

1.1.5 磁路和电路

电机的机电能量转换的过程是基于耦合磁场和载流导体之间的相互影响而进行的。磁通在铁磁材料构成的磁路中形成通路。电流直接通过电流导体。磁回路是由被薄绝缘层分开的硅钢片叠压而成，而电流的电路是由绝缘铜导线构成。最重要的三种类型的电

机是：直流电机、异步电机、同步电机，它们有不同的结构，使用不同的方法建立磁场和电流。旋转电机有一个不移动的部分（定子）和一个移动的部分（转子）。磁路和电路可以安装在定子和转子上。除了磁路和电路，电机也有其他部分，如外壳、轴、轴承和端部的电流回路。

1.1.6　旋转电机

电机的机械功率可以传递或转变。多数电机是旋转的机电能量变换器，由圆柱形转子产生旋转运动，如图 1.1 所示。线性运动的电机被称为直线电机。直线电机比较少见。

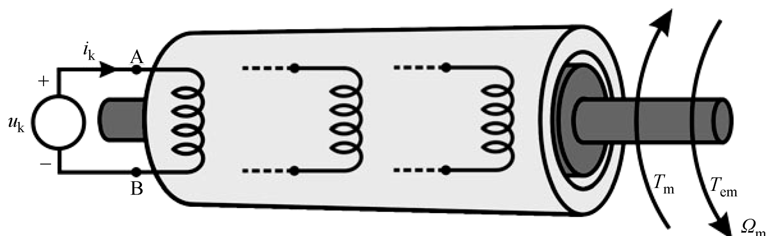


图 1.1　圆柱形转子的旋转电机（视图为从轴上观测。定子为一空心圆柱形式，和转子同轴）

电机中流过电流的电路称为绕组。它们可以连接到外部电源或电能用户。绕组端连接的为电端口。第 k 个绕组的端口是用字母 A 和 B 表示，电端口为电机提供了电路入口。由于电机执行机电转换，所以需同时具有电气和机械通路。通过电端口，电机可以吸收外部电能或供给外部其他负载电能。一个 N 绕组的电机，电功率的表达式是由式（1.1）给出。

$$p_e = \sum_{k=1}^{N} u_k i_k \tag{1.1}$$

转子放置在一个空心圆柱定子之中。沿转子轴是一个钢轴，延伸到电机端部。转子的绝对角频率也被称为转子速度，用 Ω_m 表示。在轴的一端，如图 1.1 右侧所示，电机可以提供或接收机械能。电机的轴是机械端口，它传递旋转转矩或者接收外部其他电机以机械能的形式提供的转矩。图 1.1 中的转矩 T_{em} 是由磁场和电流之间的相互作用产生的。因此，它也被称为电磁转矩。在转矩相对运动和速度增加的情况下，它被称为驱动转矩。

一个电动机将电能转换为机械能。后者通过电机的转轴来驱动机械负荷，因而也称为工作机器。电机通过转矩 T_{em} 来驱动工作机器，工作机器则通过负载转矩制动。在驱动转矩和负载转矩相等时，角频率 Ω_m 不会改变。电机传递给一个工作机器的能量是转矩和速度的乘积。

$$p_m = \Omega_m T_m \tag{1.2}$$

发电机将机械功转换为电能。它吸收水轮机或汽轮机的机械能。因此，功率 P_m 为负值。涡轮的旋转转矩 T_m 使转子运动，而转矩 T_{em} 是由电机产生的，不同于 T_m 的运动方向。采用的参考方向如图 1.1 右边所示，T_{em} 和 T_e 为相反的方向。根据式（1.1）给出的关系，变量 p_e 定义了电机向外部电路输出的电功率。因为发电机将机械能转换为电能，并将其产

生的电能供应电网，因而发电机功率 p_e 为负值。这些变量的符号与参考方向如图 1.1 所示，改变转矩和电流的参考方向，将产生正向的发电机转矩和正向的发电机功率。

1.1.7　可逆电机

电机大多是可逆的。可逆电机既可以作为将机械能转换成电能的发电机运行，也可以作为将电能转化为机械能的电动机运行。从发电机过渡到电动机运行模式是伴随着如电压、电流、转矩和速度等机电变量的变化。运行模式可以在机械结构电流回路、电机和工作电机之间耦合不发生变化的情况下变化。可逆电机的一个例子是异步电动机。当转子角速度低于同步转速，电机为异步电机运行模式。如果速度高于同步转速，而异步电机电磁转矩反向运动则可以将机械功转换为电能，因此电机为发电机的运行模式。

可逆能量转换如图 1.2 所示。方向从左到右是作为电磁力和能量流动的参考方向。功率 p_e 在电动机模式下为正值，而在发电机模式下这些值为负。能量转换伴随着在当前电路、磁路中的能量损耗，也包括由于旋转摩擦而损耗的各种形式的机械能。由于损耗，电气和机械端口的功率值不相等。在电动机模式下，获得机械功率低于提供的电功率 p_e，这是由于功率转换中的损耗。在发电机模式下，获得电功率（p_e）通常低于提供的机械功率（p_m），这也是因为功率转换中的损耗。

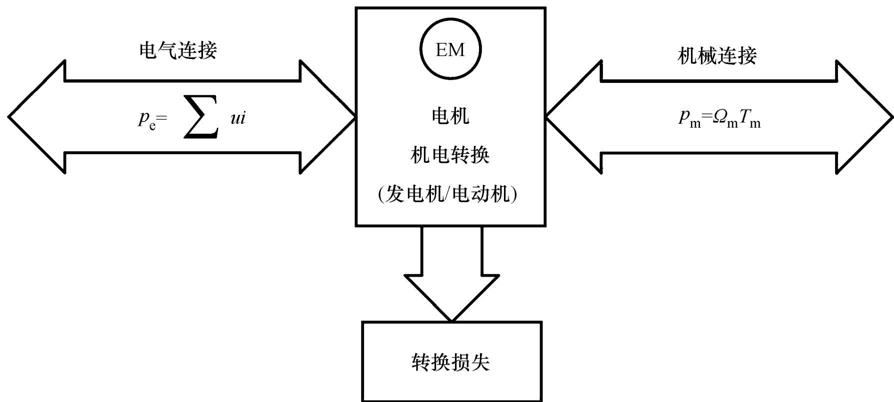


图 1.2　可逆机电转换器的框图

1.2　意义和典型应用

发电机产生的电能主要用于工业应用。发电机产生的能量传输给分散的电力用户，其中主要是电动机，例如运动控制的工作电机、家用电器、工业自动化电机、机器人、电气车辆或运输系统中的电机。

电机在生产、传输、分配和应用电能的各个阶段中的作用如图 1.3 所示。在这里，简要描述了每个阶段的内容。

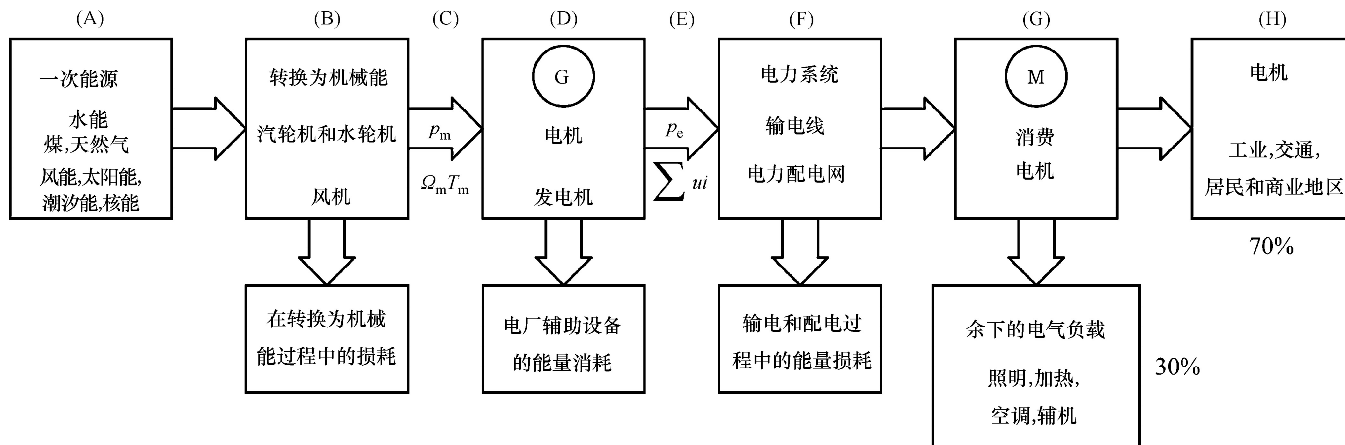


图 1.3　电机在制造、分配和使用电能中的作用

1）电能可以通过使用在湖泊水积累产生的势能；通过使用煤、天然气或其他化石燃料产生的能量；可以利用风能和潮汐能产生的能量；可以利用核裂变，地下热水域，太阳的能量或通过其他方式产生。这些资源是主要的能源。

2）电气电站将其他主要的能量先转换为机械能，例如通过燃烧化石燃料，或者使用温泉，或者建立一个核反应堆，它们生成的热量用于蒸发水和产生过热蒸汽。蒸汽作用于汽轮机的叶片产生旋转速度 Ω_m，产生旋转转矩 T_m。在水电发电厂，水流推动水轮机的叶片。涡轮机也被称为原动机。

3）通过将获得的机械功率 $P_m = \Omega_m T_m$ 传递给发电机，发电机再将机械能转换为电能。

4）0.5～1000MW 功率等级的同步电机主要是用作发电厂的发电机。发电机的定子有三个固定相绕组。转子上的励磁绕组决定了转子磁通。转子的磁通是不变的。由于转子旋转，旋转转子产生的磁场切割定子绕组上的导体。因此，转子的运动导致定子相绕组的磁通的变化。由于磁通的变化，定子相绕组产生了电动势。因此，定子绕组端口得到一个交流电压 $u(t)$。当这些端口连接到外部电路时，定子相绕组就产生了交流电流 $i(t)$。电机通过外接电路将产生的电能消耗掉。相绕组的交流电流的大小取决于电气负荷的大小，电气负荷通过传输网络连接到发电机。在电机获得的电功率可表示为 $p_e = \sum ui$。定子绕组的电流和电机内的磁场作用，产生作用在转子上的电磁力，从而产生了电磁转矩。这种电磁转矩可以衡量机械能在定子和转子之间的相互影响。电磁转矩作用于转子和定子。定子是固定的，不能移动。转子速度取决于转矩 T_m，导致速度增加，而发电机转矩 T_{em} 导致速度降低。当一个电机作为发电机工作时，蒸汽的转矩 T_m 是通过水轮机传输的。这个转矩起动和加速了转子。电磁转矩 T_{em} 与转子运动方向相反。由于功率损耗，电机的输入机械功率要大于输出的电功率。除了发电机内部损耗，发出电能还有一部分用于电厂本身。现代发电厂都配备了三相同步发电机[㊀]。

5）从发电机端口获得的电功率是由电压和电流决定的。定子端口的交流电压系统，电压等级为 6～25kV 有效值[㊁]，频率为 50Hz（在一些国家为 60Hz）。发电机连接到一些变压器，变压器一次绕组连接定子电压，提供与电力传输线电压等级相匹配的二次侧电压。[㊂]现在，这

㊀ 在 19 世纪末期，电能的产生、传输、分配和应用都是关于直流电流和电压的。电厂都建在商业中心或靠近工业用户的地方，才能用直流发电机。电动机也是直流电机。电能的生产和应用都依赖直流电机，无论是作为发电机还是电动机。那时没有电力变换器可以将低的直流电压变换成高压以更利于传输。由于这个原因，电力传输伴随着大电流和大量的与发电机—负载距离成正比的能量损耗。现在的传输网络使用三相交流系统。通过电力变压器进行电压变换。变压器将发电电压转换到传输线的电压水平。经过一系列传输和电力分配，通过变压器将电压水平降低到 400V，供给三相交流电用户。单相电用户的相电压为 231V。通过采用三相交流输电系统，可以成功将电能传输到几百千米远的距离。所以，现在的电厂已经离用户很远了。

㊁ “均方根值”，交流电的热等效，是电流的平方的均值的平方根。

㊂ 在超过 1000km 的超长距离电力传输中，交流传输系统可以用直流系统替代，也就是说电力传输的是直流电压和电流。在传输线的始端，用静止电力变换器将交流电转换为直流系统。在末端，再用类似的变换器将直流电转换为交流系统。采用这种方式，减小了传输线上的电压降，显著增加了传输的电力。

些电压等级升高到 750kV，1000kV 的电压等级也在考虑。

6）高压输电线传输的电能来自发电厂，传输到城市、社区、工业区、交通枢纽，以及其他电力用户。电能的分配是由较低电压的供电线路完成的。工厂和住宅小区通常由 10 ~ 20kV 电线或电缆供电。电源变压器 10kV/0.4kV 线路将线电压降低到 400V（相电压 231V），再提供给大多数用户。电能的传输和分配都伴有电线、输电和配电变压器的电能损耗。

7）工业用户使用电动机操作车床、印刷机、轧钢厂、铣床、工业机器人、机械手、输送机、磨坊、抽送各种液体的泵、通风机、电梯、钻孔机、叉车等设备参与生产系统和加工过程。在家用电器领域，电动机应用于空调、冰箱、洗衣机和洗碗机、冷冻机、搅拌机、磨坊、搅拌机、播放器、CD/DVD 播放器、计算机和计算机外围设备。大约 8% 的总电能消耗在传输单元的供应电动机中，例如铁路、城市交通和电动汽车。

8）在工业化国家，60% ~ 70% 的发电机所产生的电能被用于工业、交通、办公室和家庭等领域中，以提供机械功率和运动控制。因此，可以得出结论，大多数发电机产生的电能被电动机消耗，这种能量转化为机械能。电机耦合了各种机械设备，电机提供机械功率，携带和运输货物，或执行其他有用的操作。大多数电动机在电网中使用的线电压为 400V 和频率为 50(60) Hz 的三相分布电压。如果电机的速度不同，有必要使用一个电机端口的静态功率和电力网络之间的变换器。静态功率变换器是由半导体电力开关构成的电力电子设备。它们的作用是实现线电压和电流的能量可调，与电动机供应电压和电流的幅值和频率相匹配，从而适合电动机的需求。

1.3　变量和旋转运动的关系

电机是主要的旋转设备，它由一个静止不动的定子和一个圆柱形运动的转子组成。转子以定子和转子的公共轴为中心进行旋转。通过轴承，这台电机将机械能传递到外部的工作机器。也有直线电机，在运动部分相互作用的是电磁力而不是转矩。它们的使用仅限于在运输领域或者机器人的少量应用，解决特殊问题。

转子的位置用 θ_m 表示，这个角度是用弧度表示的。该角度的一阶导数是机械旋转速度，$d\theta_m/dt=\Omega_m$，单位为弧度每秒。Ω_m 正负取决于采用的参考方向。它采用的正向旋转方向是逆时针方向（惯例）。除了转子机械速度，本书还研究磁场的旋转和其他相关电磁量的旋转。

旋转速度的每个变量将用大写的希腊字母 Ω 表示，而小写希腊字母 ω 将留给电气角频率。速度和频率的数值通常以 SI 系统单位表示，例如 s^{-1}，即弧度每秒。$f=\omega/2\pi$ 的值决定了频率，它表示为每秒的运动周期，单位为赫兹。转子速度也可以表示为转每分钟（r/min），

$$n=\frac{60}{2\pi}\Omega_m\approx 9.54\Omega_m \tag{1.3}$$

转矩中由磁场与绕组电流的相互作用而产生的部分被称为电磁转矩 T_{em}。电机产生的电磁转矩也称为移动转矩或驱动转矩。转矩 T_{em} 是衡量定子和转子之间的相互作用的物理量。一个正向的值的 T_{em} 使转子逆时针旋转。单个导体的转矩作用如图 1.4 所示。假设在图 1.4 中，磁感应强度 B 在水平方向延伸。电流在导体与磁场中产生相互影响力 F，作用于导体的垂直方向。这个力的大小取决于磁场强度，电流的大小和导体的长度。单个导线的扭转力矩是由电磁力决定的。作用于旋转轴承垂直方向的力 F 也称为旋转电磁力。图 1.4 显示了一个磁动势的作用受到两个耦合的电磁力产生转矩 $T_{em} = FD$，是作用于导体的对称位置相对于旋转轴的电磁力，其中 $R = D/2$。

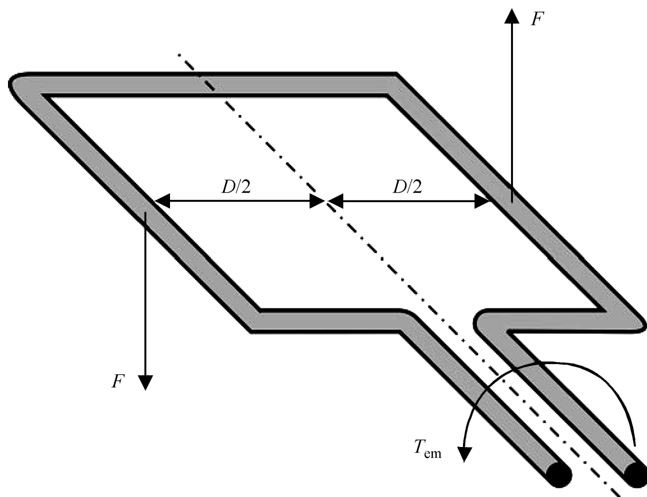


图 1.4　两个耦合作用力下的导电回路产生转矩

负载转矩 T_m 反作用于电磁转矩 T_{em}，代表机械负载或工作机器的阻力。电磁转矩足够时，即 $T_{em} > T_m$，旋转的速度增加。否则，转速会减少。转速的变化是由牛顿方程（1.4）描述：

$$J\frac{d\Omega_m}{dt} = Ja = T_{em} - T_m \tag{1.4}$$

角加速度 $a = d\Omega_m/dt$ 的单位是用弧度每平方秒（rad/s^2），可以通过牛顿方程计算。在稳定状态，角加速度等于零。电磁转矩 T_{em} 与负载转矩 T_m 平衡。

转动惯量 J 取决于所有旋转部件的质量和形状。对于电机与旋转工作机械直接轴连的情况，总转动惯量 $J = J_R + J_{RM}$ 为转子转动惯量 J_R 和旋转装置转动惯量 J_{RM} 之和。图 1.5 显示了与机械装置耦合的电动机。假定旋转电机具有圆柱体的形状并且其质量为 m。惯性转矩可表达为 $J = 1/2mR^2$。

问题（1.1）：一个外形呈圆柱形的工作机械正在转动，它的圆环半径为 R，质量为 m。请计算工作机械的惯性转矩。

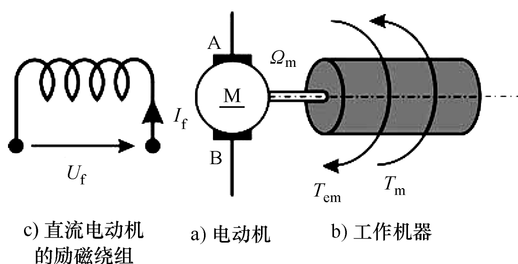


图 1.5 电动机与工作机器耦合

回答（1.1）：$J_{RM}=mR^2$。

单位符号和系统

在本书中，变量的瞬时值用小写字母表示（$u_p, i_p, p_p=u_p i_p$），而稳态值、直流值和均方根值用大写字母表示（$U_p, I_p, P_p=U_p I_p$），按照国际电工委员会（IEC）的建议，例如外力 F 这样的变量建议只用符号表示，类似的还有旋转速度 Ω 和转矩 T。大写字母 T 是用来指示转矩的瞬时和稳定状态值，因为小写字母 t 常常是用来表示电力变换器的其他相关变量。旋转的速度是用大写的希腊字母 Ω，而小写字母 ω 代表角频率。这两个变量是用弧度每秒来表示，即 s^{-1}。旋转电机的相关向量用圆柱坐标系统标识。这些通常都是平面，因为它们 z 分量等于零。通过引入复平面，每个向量可以表示为一个复数，实部和虚部对应着向量在坐标轴上的投影[1]。例如，电压和电流向量用 u_s 和 i_s 表示。应该注意，它们的数量不是常数，因此，u_s 和 i_s 并不是电压和电流向量，即在瞬态过程中，它们的实部和虚部可以单独改变。在稳定状态时，数量 u_s 和 i_s 像其他复数向量一样，是复数形式的常量，应该视为向量。在稳定状态，符号变化为 U_s 和 I_s。固定矩阵可以用（A）或 $\underline{\mathrm{A}}$ 表示。所有的变量，变化数值的变量可以用斜体表示。运算符 sin，cos，rot，div，mod，微分算子 d 和其他计量单位，不能用斜体表示。

磁感应强度等磁场物理量，以及力和其他变量在公式中可以用以下形式表示，例如 $\vec{B}$，$\vec{H}$，$\vec{F}$ 等。而这些矢量在文本中提到时，磁感应强度矢量不使用上面的箭头而只用 **B** 表示，其他的如磁场强度矢量 **H**、力矢量 **F** 等等也是如此。

在这本书中，磁力耦合称为电磁转矩。在电气工程的入门课程中，导体受到的磁场力称为磁力。术语磁转矩也是比较合适的，但是有大部分文献中使用电机的电磁转矩作为术语，所以本书将采用这种形式。

国际单位制（SI）诞生于 1954 年，本书将采用这一单位制。在大多数国家也都采用这种制度。SI 系统的一个优点是计算中不需要使用各种比例系数。因此，通过使用

---

[1] 将一个平面矢量用复数表示，在电机的技术文献中被广泛应用。与电机的电压电流相关的矢量也被称为空间矢量。术语“复相量”也与这相应。这里使用的复数表示没有任何的特殊。文中提到的“矢量 $\underline{\mathrm{V}}$”，对应为平面矢量，同时也暗示了笛卡尔坐标系的单位矢量能完全用实数和叙述单位代替。

SI 系统，不再需要记住和使用各种具体的系数。例如，由力 F 计算做功 W，作用路径为 l，将力和路径相乘即可得到[⊖]。在 SI 系统的情况下，这项工作是由表达式 $W(\mathrm{J}) = F(\mathrm{N})l(\mathrm{m})$完成，不需要引入额外的缩放系数，因为 $1\mathrm{J}=1\mathrm{N}\times1\mathrm{m}$。当力表达单位为千克，距离为英寸或寸时，为求得以焦耳或卡路里为单位的功，都必须乘以一个比例因子。在分析电机时，应该检查结果是否用正确单位表达。在这样做的时候，读者可以了解基本的和派生的单位之间的关系。一些有用的关系为$(\mathrm{V_s}) = (\mathrm{Wb})$，$(\mathrm{Nm\ rad/s}) = (\mathrm{W})$，$(\mathrm{Nm\ rad}) = (\mathrm{J})$，$(\mathrm{A\Omega}) = (\mathrm{V})$，$(\mathrm{AH}) = (\mathrm{Wb}) = (\mathrm{V_s})$等等。

在本书中，额定值是用一个下标 n 表示的，比如 U_n或 I_n。

1.4 要掌握的知识和技能

电机知识是成为一个合格的电气工程师的基础。电气工程师设计或使用的大量应用和系统，其中就包含一个或多个电机。这些应用和系统通常需要了解电机的性能、尺寸、质量、效率、最大转矩能力和速度范围，以及控制特性和动态响应的特点。出于这个原因，必须掌握相应的知识和技能，了解电机的基本运行原理。做到基本了解电机的机械和电气特性，能按要求指定和设计它们的电源和控制。同时必须掌握能量损耗的原因和特性以细化和设计冷却系统并使能量损失最小化。

在开发新的解决方案时最主要的挑战是设计磁路和绕组，解决电源问题，构思控制系统。电机应尽可能设计成最小的尺寸和质量，并且低损耗运行。同时，电机应尽可能设计得便宜又耐用。电机使用静态功率变换器和数字信号控制器来供电和控制。一些发电机控制的目标是降低损耗，减少材料的电磁和机械应力，以及增加功率质量比率，也就是比功率。电机控制的目标是以尽可能高的精度和速度达到工作机器的操作所要求的转矩和速度。

本书包含了未来的电气工程师所需的关于电机的基本知识。从电机的基本作用和功能出发，通过机电能量通路的接入点（端口）来定义数学模型，分析了电机的等效电路和机械特性。本书涉及机械设计的元素，加热和冷却的问题，同时也讨论了磁路和绕组的具体缺陷。深入学习本书可以理解各类型电机的运行原理，获得电源拓扑结构的基本知识，领会电机控制的基本原理。本书研究了旋转机电变换器，而省略了电力变压器。

1.4.1 电机的基本特点

考虑到实施规范和应用场合的实际情况，一个体积适当，质量、制造、可靠性较高，同时损耗较小的电机是工业领域所需要的。电机的基本知识包含设计电机的系统，解决电源和控制的问题。基础的电机概念还包括设计监控和保护系统，设计机器人中的

[⊖] 力做的功为 $W=Fl$，假定了力是常量，移动路径是直线，并且力的方向沿着直线方向。

伺服电机控制器，设计电站的同步发电机的控制和保护。一个电气工程师必需在所有情况下把电机的知识和任务运用到可能出现的场合，几乎所有的工况下，比如在工业、发电、工业自动化和机器人技术中，对一个电气工程师来说，电机知识都是必备的。

1.4.2 等效电路

电机的转矩和转速控制是通过一个合适的电源建立绕组电压和电流进行的。对于一个特定的电机，电源的设计和选择要求建立起磁通、转矩、电压和电流之间的联系。电机稳态关系由稳态等效电路描述。等效电路是一个包含电阻、电感和电动势的电路。稳态时，在恒定转速和给定的电压幅值和频率条件下，利用等效电路可以计算绕组的电流。利用等效电路不仅可以计算电流，还可以计算稳态磁通、转矩、机电转换功率和损耗。

1.4.3 机械特性

对于给定电源电压和频率，电机转速和转矩稳态值的计算要求知道连接在轴上作为负载的工作机器的转矩-转速特性。工作机器的 $T_m-\Omega_m$ 的关系也被称为负载的机械特性，用函数 $T_m(\Omega_m)$ 表示。通常，电机的机械特性是稳态下电磁转矩 T_{em} 和转子转速 Ω_m 关系。机械特性可以用函数 $T_{em}(\Omega_m)$ 表示并在 $T_{em}-\Omega_m$ 平面上图形化。通过电机的数学模型可以算出机械特性。稳态运行点是曲线 $T_{em}(\Omega_m)$ 和 $T_m(\Omega_m)$ 的交点。

1.4.4 电机中的暂态过程

等效电路和机械特性可用于电机的稳态分析。稳态是指电机转矩、磁通、转速、电流和电压不改变它们的幅值或频率的运行模式。有许多应用中，需要完成转矩和转速的快速变化。在这些应用中，用数学形式来表示电机在瞬态过程中的行为是有必要的。这种表示方法称为数学模型。推导的数学模型中，开始不能假设电机处于稳定状态。由于这个原因，这种模型也被称为动态模型。在电机应用中，工业机械手和机器人的控制、电气车辆的驱动就必须使用动态模型。运动控制意味着沿着一种工具、被加工件、车辆或是一个工业机器人的手臂的给定轨迹的速度和位置的变化。当控制对象在原本的轨迹中偏移出来，这就需要施加一个相对快速变化的力（或转矩）来驱动控制对象回到预定轨道和消除误差。位置（或速度）控制器的任务是计算消除位置（或速度）的偏差所需要的力（转矩）。电机的任务是尽可能快和精确地传递要求的转矩。在这种伺服应用中，电动机要求实现转矩的快速变化，以消除作用在被控目标上变化的运动阻力的影响。对伺服电动机的运行分析要求对电机的瞬态过程有一个全面的了解。

另一个需要电机数学模型的情况是对电场中与电网相连的同步发电机进行暂态过程分析。电网的暂升和暂降是由大型电力用户的开启和关闭或短路引起的。它们造成了发电机负荷的突然变化。对瞬变的发电机电压和电流的分析不能使用稳态等效电路。相反，它需要有一个描述电机内部瞬变现象的数学模型。

1.4.5 数学模型

数学模型由一组描述电机的瞬态和稳态行为的代数和微分方程表示。电压平衡方程表达电机绕组的电压平衡关系，它们的形式为 $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。转子转速的变化是由牛顿微分方程 $J\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{m}}/\mathrm{d}t = T_{\mathrm{em}} - T_{\mathrm{m}}$ 描述的。变量如 J 和 R 是参数，而 Ω_{m} 和 Ψ 是描述电机状态的变量（状态变量）。一个电气工程师需要利用电机模型分析能量转换过程，分析转换损耗，设计电源和控制以及解决电机使用过程中可能发生的问题。因此，必须有一个相对简单和直观的模型，将电机的过程和状态以简洁和清楚的形式表现出来。一个好的模型应该彻底和简洁地勾勒出电机内部关系，适用于进行总结并且可用于确定电机的电源、控制和用途。

电机中存在一些不太相关的问题和现象，只是在一个非常有限的范围内对电机有影响。它们被称为二次或寄生效应，为了获得一个更简单更实用的数学模型，它们通常被忽略。例如，电机中电场内的能量密度 $w_{\mathrm{e}} = \varepsilon E^2/2$ 可以被忽略。它比磁场能量密度低几个数量级。在建模的过程中，可以采用其他适当的忽略以获得一个简化的模型。最简单却又描绘了所有相关的动态现象的模型是最合适的。二次效应的适当忽略将会使数学模型更简化和直观。使用这样的模型，观察系统的主要特征更容易。解决问题和决策的过程将变得快速和简单。

在电气工程应用时，模型通常是用一组微分方程来描述系统的行为。电机或变压器的模型可以简化成描述稳态运行的等效电路。利用模型就可以确定电机的机械特性。

1.5 采用的方法和分析步骤

总之，本书给出的内容适用于电气工程专业的学生。许多初次接触电机的学生需要将数学、物理学和电气的基本知识应用于电机的实际研究中。从一般概念开始学习，然后深入到细节。本书可以使初学者对电机的基本用途、外观和基本特征有所了解。介绍性章节之后，本书研究了电机典型应用、等效电路的工作模式、机械特性、电源拓扑和控制，以及损耗和开发中存在的问题。之后，焦点转向三个主要类型的电机相关的细节。

在本书里着重介绍的是直流、异步和同步电机，其他类型的电机没有被详细研究。与电机设计相关的问题简要提及。绕组技术、磁路设计、二次分析现象以及二次和寄生损失和结构细节没有在本书中进一步研究。本书的主要目的是向读者介绍电机的作用，研究它们的电气和机械特性，以获得确定电机的电气和机械特性、定义它们的电源和控制规律、设计电动机和发电机系统的能力。

电机的学习首先从基本运行原理开始，然后考察发电机和电动机在它们最频繁使用的场合的功能。分析步骤包括机电转换原则和通过一台静电电机的例子来研究转换过程。耦合电场能量的分析是通过分析场、电源和机械端口之间的能量转化过程来进行的。后续分析了一个磁耦合的简单机电转换器。“电机的磁路和绕组建立”

内容之后是确定转换损耗。随后，旋转机电变换器与磁耦合被提出，旋转电机是本书研究的主体。基本概念和定义包括磁阻和电路、集中和分布式绕组、每匝线圈的磁通计算方法和绕组磁通和绕组自感、电感互感、漏感等。本书解释和分析了集中和分布式绕组的磁动势和电动势。对其气隙磁场进行了分析，并将这种分析应用到圆柱式电机的机电转换建模中。用磁通和磁动势描述了电磁转矩和机电转换功率。旋转磁场的概念和产生过程被详细研究，并被用来描述直流（DC）电机和交流（AC）电机的差异。有 N 匝线圈的圆柱式电机的数学模型，绕组中电功率、机械功率、功率损耗表达式，磁路，机械子系统都在本书中进行了研究。本书对电机分析中经常忽略的次生现象进行了说明。与此同时，本书对一些次要现象不能被排除在分析之外的应用示例和操作过程进行了明示。

后面的章节介绍了直流电机、异步电机（AM），同步电机（SM）。每一章开始于简单的描述和相关电机的工作原理，然后最重要的方面是其结构，之后描述其优点、最常见的应用和某些缺点。推导了磁动势、磁通、电动势、转矩和转换功率的表达式。使用数学模型推导，描述电机在瞬态过程的工况，提供了获得等效电路和机械特性的依据。在交流电机的情况下，建模包括引入三相/两相坐标变换（克拉克变换）和从静止坐标系到旋转坐标系的坐标变换（帕克变换）。

从稳态分析推导出了电机的等效电路。在电源电压，负载转矩 T_m 和转速是已知且不变的条件下，等效电路用来计算在稳定状态下的电流、电压、磁通、转矩和功率。电机的机械特性也可以通过数学模型获得，它给出了电机速度和传递到旋转轴的转矩的稳态关系。对于每一种电机，分析了其稳态时刻可持续运行的区间，在 $T_{em}-\Omega_m$ 平面上称为稳态运行区域。同样，定义了 $T_{em}-\Omega_m$ 平面上电机的瞬时操作区域，它表示了在短时间内的瞬态工作状态。

这部分特别关注能量转换损耗。对线圈和磁路中的损耗、电机的发热和冷却方法进行了深度分析。对电流、功率和转矩的最大耐受值进行了定义和研究。这些值和其他相关量的最高可持续值被称为额定值㊀。重点介绍了电机在弱磁范围内运行的要求，推导了相关的关系式。

分析了直流电机和交流电机的瞬态操作区域。它来源于对短时间内超载运行的电机的机电端口的分析。该分析考虑了电机的供电电源的峰值电流和峰值电压的影响。本书给出了直流电机、异步电机和同步电机的包括电源、控制和典型功率变换器拓扑结构在内的基础信息。

㊀ 额定值是连续运行中电流、电压、功率、速度和转矩的最大允许值。持续地高于额定值运行将会由于过热等现象毁坏电机的关键部件。额定值通常是工程计算的结果，往往显示了电机的重要性能。额定值通常联系到具体的环境温度。典型地，额定功率是电机在 40℃ 环境中能够连续传递的最大功率。电机的铭牌或说明中称为铭牌值或者标称值。标称值和额定值通常是相等的。极少数情况，厂商可以有理由宣称标称值比额定值低。本书中假定标称值与额定值相对应。用一个下标字母 n 表示，例如 U_n 或 I_n。

预备知识

在这本书中，理解分析和思考是前提，为了获取知识和目标技能，数学和物理的相关知识是解决问题的基础，本书适用于电气工程领域的本科第一年的工程教育和研究。同学们应知道运动的基本规律，知道旋转和转化的关系。同学们需要对包括稳态电场和磁场的背景、介电值和铁磁材料的基本特征，静电和磁场边界条件的知识有所了解。例如第 2 章介绍了电磁能量转换、分析了能量和电磁力与铁磁材料和空气等电介质之间的关系。进一步，分析了包括简单直流或交流电流电路的问题。此外，分析了磁回路电动势（磁电压）、磁链和磁阻。同学们应该知道电气工程的基本法则，像法拉第电磁感应定律、安培定律，洛伦兹定律，基尔霍夫定律和类似的定律。当前的研究包括空间分布和能源分布。因此，笛卡尔坐标系或圆柱坐标系以及相应的单位向量系统将被使用。贯穿于本书前后一致的内容相信会让读者对于不熟悉的概念也有加深和了解，如旋度（curl、rot）或散度（div）。因此，熟悉麦克斯韦微分方程并不是一定要求具备的。相反根据麦克斯韦微分形式的定律，就应该足以知道它们的积分形式，如安培定律，这是在处理复杂的数字和向量时必需的技能。为了确定矢量的方向，以及处理标量和矢量的产物，应该熟悉右手定则。同学们还需要知道空间分析的能力和感知三维物体之间关系的能力，如确定封闭的表面定义一个域，磁动势定义一个表面和表面法线。在本书中，都是在相对简单的曲线和曲面积分和一阶线性微分方程中解决相关的问题。通过应用拉普拉斯变换而降低微分方程和操作基本矩阵和向量的能力也应该具有。

1.6 变流器供电的变速电机的注意事项

对于打算准备设计电机的读者，这本书还不是很全面。这本书的主要目标是从用户的角度研究电机的电气和机械特性，然后读者可以有能力选择一个适当的电机、操作电动机和发电机，解决其与电源和控制相关的问题，以及处理电机运行过程中可能出现的问题。读者可以对设计电机所需的专业知识进行进一步的研究。进一步研究的先决条件是对包含在这本书的知识和技能完全地接受。对熟练设计电机的设计师的要求比以前更高了。一些原因如下：

1）在 20 世纪，电机的电能直接从电网上获得，使用恒定的电压和频率。静态功率变换器的发展，提供幅值和频率变化的三相电压，允许根据所需的速度和转矩调整电机的电源。大多数新设计的电动机包含了静态功率变换器的配合使用，变换器将电网的能量转化为最适合实际的速度和转矩的形式。电压和频率可以调整，以减少功率损耗，同时提供给定速度下的参考转矩。因此，追求设计与静态功率变换器和变频电源结合使用的电机的潮流正在兴起。

2）电动机在电气车辆和驾驶工业机器人等领域的应用，使得转子速度往往需要超过几百转每秒，它要求的电源频率达到 $f > 500\text{Hz}$ 的阶数。因此，在当代伺服电动机、牵引电机中，电流和磁感应脉动频率都很高。快速变化的磁场需要应用新型磁性材料和设计新的磁路方案。频率的增加使绕组电流要求新的解决方案。

3）推进工业机器人要求电机具有快速响应、低惯性。因此，应设计同步电动机永磁体转子，转子形状和大小导致低惯性和快速加速，如光盘或双气隙的空心机座。

4）可替代和可再生能源的增加对同步发电机的设计带来新的要求，这体现在风力涡轮机、潮汐涡轮机以及类似的电机。这些电机的转速和操作频率是可变的，而在某些情况下，发电机运行速度很低。同时，发电机的惯性和重量应该尽量低，以降低可能的功率损耗。

5）超临界蒸汽压力火电厂的建立，使得单机发电容量可以超过 1GW。汽轮机机械功率通过频率为 50Hz 的同步发电机转化为电能。设计这种高功率的发电机，需要应用新的设计解决方案，新的绝缘和铁磁材料和新的冷却方法和系统。

增加电能生产和减少对环境的热排放的需求，可以通过减少电能损耗同时增加电机的能源效率来达到。适当的控制可以提高发电机和电动机的效率，也可以通过设计和制造新颖的电机和应用新材料来达到高效。

1.7　高效电机的评价

功率损耗的减小将使电机的效率增加，并且缓解冷却的问题。因为所有电机的损耗都会转化为热能，损耗的降低将会减小对周边环境的热排放。电机的热排放是一种形式的环境污染，并且它应该被限定在低水平。考虑到 2/3 的工业国家将它们的电能使用在电动机上，电机中能效的提高在能源节约计划中有很大的发展潜力。此外，热排放通常需要特殊的工业处理，这增加了成本和设计的复杂性。考虑到这些因素，有越来越多的关注投入到设计新型的、更高效的电机中，并且设计控制电机的方式以使电机的损耗更低。设计这些新型的发电机和电动机需要十分深入的电机的基本知识，并且一定要使用新型的铁磁材料和新的设计理论。一个例子就是使用永磁体励磁以消除励磁绕组并且降低了同步电机中的转子损耗。此外，一个高效的机电能量转换装置也需要一个新的供电装置。当代大部分电机都不是直接和电网相连也不是使用电网的电压和电流。它们使用从电网通过静止变流器转换而来的电源供电，这也和电机的高效运行的原则是一致的。用静止变流器供电可以改变电机的运行磁链，这样就可以选择一个合适的磁链水平以使损耗减小。应用静止变流器供电的电机设计需要对电机中电场和磁场的知识有深入的理解，同时也要对功率开关器件的能量转换过程有所了解。

1.8　铁和铜的利用率的评价

广义而言，电机的能效也包括在设计制造它们时所消耗的能量。制造电解铜和电解铝需要大量的能量，而制造硅钢片也同样如此。因此，使用少量稀土材料的电机可能效率会更高。电机的结构和功率变压器很相似，这两者都具有磁路和一些电路。通常情况下，磁路是由硅钢片制成，电路（绕组）是由绝缘的铜导体制成。变压器和电机都使用在包含有能量变换器的系统之中，包括半导体开关管、传感器、微处理理控制系统和集

成软件。整个系统造价的决定性因素是其中铁和铜的重量。也就是说，制造半导体材料需要相对少的原材料，例如硅晶锭、一些稀土材料和相对而言小得多的等离子材料。而且，研发、设计和软件的制造费用对于整个系统的造价没有明显的影响。因此，设计时减小铁和铜的重量对于整个系统而言是非常有意义的。减少原材料用量能够通过以下三个方面达到。

系统设计方面，电机在系统中的运行情况将会被考虑到以使整体设计时所使用的原材料减小。

电机制造方面，在某种程度上这是将电路和磁路做一定调整以减小原材料用量。例如，四极电机㊀较之于两极电机有着更好的磁路利用率。

电机的运行方面，电机的运行需要静止变流器的馈电，对于给定的电路和磁路这是可以使用控制方法以使转矩和功率最大化㊁。使用这个方法，将会使转矩和功率有一个提升。考虑到转矩和功率的需要，可以设计和制造铜铁用量更少的电机。

用于电机设计的当代计算机工具，使得制造和测试样机之前优先考虑电机特性变为可能。这也就便利和加快了电机的制造过程。而且，这可以让设计人员在很短的时间内尝试不同的设计方式和方法。大部分软件包都使用的是分析电路、磁路、机械和温度场的有限元的方法。计算机的应用减小了疏忽发生的可能性。但同时也带来了一些创造性方面的问题。计算机工具对于任意一组输入的数据都会给出一组输出的数据，而不考虑这组输入的数据是否有意义。因此，设计人员通常都需要对设计有足够的经验，以发现可能出现的不合理的结果和问题。一个合理的使用计算机的方法是使用计算机加快计算的时间，如果设计人员有足够的时间也要自己验算电机的性能。

㊀ 多极对数的电机的运行将在异步电机的章节中解释。

㊁ 对于给出的电机，比较矩是有效转矩与电机的质量（或体积）的比值。也就是单位质量（体积）转矩，同样适用于比转矩。具有更高的比转矩（功率）的电机，同样用途下更小（或更轻）。

第 2 章　机电能量转换

电机包括静止和运动的部分，它们由电场和磁场相耦合。这些场在电机机电能量转换部分扮演着关键的作用。因为这个原因，它常常被称为耦合场。本章节解释了电机运动部分产生力和转矩的具体的原因。在所有涉及到的情况中，力的产生是由于电机中静电场和磁场的作用。依赖于耦合场的自然特性，电机中能够产生磁场或者静电场。

2.1　洛伦兹力

电机是将电能转化为机械能或者将机械能转换为电能的装置。电机机电能量转换中最基本的原则将会在接下来讨论。

机电能量转换中一个物理法则是洛伦兹定律，这个定律决定了一个在电场和磁场中以速度 v 运动的电荷 Q 所受到的力。

$$\vec{F}=Q\vec{E}+Q(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{2.1}$$

电机运行最主要是基于耦合磁场的作用。电机中导体和铁磁材料在磁场中受到电磁力。磁场感应强度 $\boldsymbol{B}$ 也被称为磁密。导体中存在的电流方向是一束充电电荷的运动方向。因此，式（2.1）能被用来决定导体上电流所受到的力。

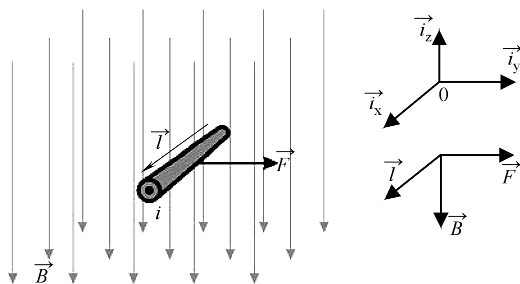


图 2.1　在均匀磁场中直导体所受到的力

图 2.1 展示了放在各向同性磁密 $\boldsymbol{B}$ 中载有电流 i 的导体，该导体的直线部分长度为 l。电磁力 $\boldsymbol{F}$ 的大小依赖于导体上的电流 i，导体长度 l，磁密 $\boldsymbol{B}$ 和磁场与导体方向的夹角。在图 2.1 所示的例子中，导体是垂直放置在磁场中。应用笛卡尔坐标系的坐标轴 x、y 和 z，磁场感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$，导体长度和力能够被表达成矢量形式。

$$\vec{l}=l\vec{i}_x$$

$$\vec{B}=-B\vec{i}_z$$

$$\vec{F}=i\cdot(\vec{l}\times\vec{B}) \tag{2.2}$$

$$\vec{F}=i\cdot(\vec{l}\times\vec{B})$$

因为矢量 $\boldsymbol{B}$ 是与导体正交的，力矢量等于 $F=lBi$。力的方向由矢量乘积决定。右手定则[㊀]能够用来快速确定矢量乘积的方向。如果导体部分在 y 轴上有一小段位移 Δy，对应的机械功率是 $\Delta W=F\Delta y$。在一个恒定的转速 v_y，机械功率假设为 $p_m=Fv_y$。在力的运动的方向上，功率 p_m 为正，系统以电动机模式运行，传输机械能和功率。否则，运动方向和力的方向是相反的，功率 p_m 为负，机械能被转换为电能，系统以发电机模式运行。

在各向同性磁场中运动的导体，感应电动势 e 取决于磁密 $\boldsymbol{B}$，运动速度 v，导体长度 l。电动势 e 和电流 i 的乘积等于力和速度的乘积($p_m=Fv_y$)，后面将会演示。假设能量损耗被忽略，电动机运行可以被看做从电能到机械能的无损耗转换。相对应的功率能由电能和机械能的微分得到。

2.2　平行导体的相互作用

在之前的例子中，考虑的是导体是在各向同性的外部磁场下的情况，这个外部磁场是在外部电流或者磁体作用下产生的。导体上所受到的力也存在于没有外部磁场的情况，但是需要两个导体同时有电流。

一根导体产生的磁场与另一根导体相互作用，按照如图 2.2 中所示的原则进行。这个相互作用的结果将在另外一个导体上表现为力的作用。当两根导体上的电流有相同的方向时，力将表现为将两根导体拉近。当两根导体上的电流有相反的方向时，力将表现为将两根导体推远。

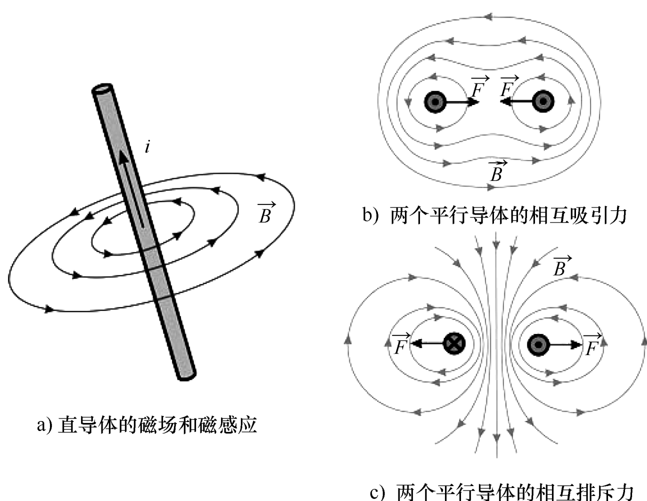
在所考虑的情况下，两根平行导体所受到的力非常的小。如果两根非常长并且细的导体，每根导体中的电流是 1A。放置在距离 $d=0.1\text{m}$ 的距离，一根导体将会发现自己在另一根导体产生的磁场中。一根非常长的导体所产生的磁感应强度可以被表示为

$$B=\mu_0\frac{I}{2\pi d}=4\pi\cdot10^{-7}\frac{1}{2\pi\cdot0.1}=2\times10^{-6}\text{T} \tag{2.3}$$

因为磁场和磁感应强度对于导体是正交方向，所以在 1m 长的导体部分产生的电磁力可用下式表示：

$$F=lBI=2\times10^{-6}\text{N} \tag{2.4}$$

㊀ 右手定则要求拇指和食指成直角。中指与二者垂直。现在，将食指指向矢量 $\boldsymbol{l}$ 方向，中指指向 $\boldsymbol{B}$ 方向，大拇指的方向就是力的方向。另一种办法是，任何矢量积的方向可以通过一个假想试验确定，就是第一个矢量向第二个矢量的方向旋转。这样的旋转形成一个螺旋，螺旋的方向将垂直于矢量形成的平面。螺旋的前进方向就是矢量积的方向。



a) 直导体的磁场和磁感应

b) 两个平行导体的相互吸引力

c) 两个平行导体的相互排斥力

图　2.2

磁路将会在本书的后面部分讨论。磁路由具有高磁导率的铁磁材料构成，磁通[㊀]从磁阻较低的路径通过。磁场集中在磁回路的方式类似于电流被包含在导体和绕组之中。反过来，有一个相当大的磁通密度 $\boldsymbol{B}$ 的增加，导致电磁力的增加，其产生的力也成正比增加。

2.3　运动导体的电动势

相当数量的电机是将机械能转换为电能，例如在电厂中的同步发电机。图 2.3 显示了机械功率作用于机械获取电能和电磁力的工作原理。图中显示的直导线长度的一部分，沿着 y 轴运动的速度为 v 。导体放置在一个均匀磁场中感应到外力 $\boldsymbol{F}_s$ 而运动。向量 $\boldsymbol{B}$ 的方向与 z 轴方向相反。

运动的导体在磁场引起的感应电场为 $\boldsymbol{E}_{ind}$。感应场强可以由一个和移动的导体一起移动的观测者感觉到，而不能由一个固定不动的观察者感觉到。电场强度可以在式（2.1）的基础上计算，表达力作用在一个移动的电荷 Q 上；考虑的区域不包含任何静

㊀ 通量是无方向的标量。穿过面 S 的通量，等于磁感应强度也叫做磁通密度 B 的面积分。面 S 被曲线 C 包围，这样，所说的面积分就叫做穿过曲线的磁通量。穿过一个放置在各向同性的外部磁场中的平面的磁通量依赖于与磁场的相对位置。B 的方向在 S 的正法线方向，穿过面 S 的磁通量为 $\Phi = BS$。虽然磁通量 Φ 是标量，它还是固有的与面 S 的空间方向或/和矢量 $\boldsymbol{B}$ 的方向有关。在所给的例子中，Φ 的空间方向是 S 的正法线方向。正法线方向通过对回路 C 的环绕方向运用右手定则得到。外部磁场不是由回路 C 的电流产生的。

电场，因此产生在式（2.5）中 QE 等于零。

$$\vec{F}=Q\vec{E}+Q(\vec{v}\times\vec{B})=Q(\vec{v}\times\vec{B})=Q\vec{E}_{ind} \tag{2.5}$$

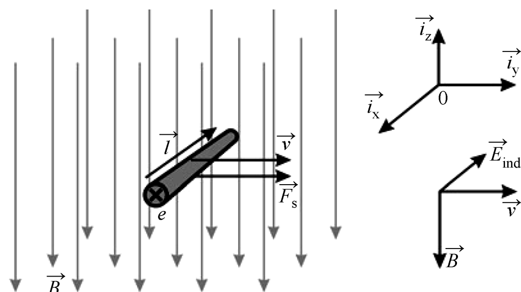


图 2.3　当导体穿过均匀外部磁场时，导体的直线部分感应的电场和电动势

由于其在均匀磁场中，力 $\boldsymbol{F}$ 作用于电荷 Q 将使其运动。注意，在式（2.5）中，同样的效果可以通过用静电场替换磁场 $\boldsymbol{E}_{ind}$实现。因此，感应电场可以用电场力 $\boldsymbol{F}$ 除以电量 $\boldsymbol{Q}$ 得到，感应电场也是磁通密度向量 $\boldsymbol{B}$ 和速度的矢量积：

$$\vec{E}_{ind}=\vec{v}\times\vec{B} \tag{2.6}$$

计算长度为 l 的导体直线部分的感应电动势是非常重要的。在一般情况下，导体中的电动势感应线积分的计算是由导体的长度和向量 $\boldsymbol{E}_{ind}$ 计算的。由于感应电场中导体不同，线积分的大小是矢量 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{E}_{ind}$的共同产生的结果。电动势可以由式（2.7）计算：

$$e=\vec{l}\cdot\vec{E}_{ind}=\vec{l}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{2.7}$$

在上面的情况中，导体本身放置于平行于 x 轴，磁场朝着 z 轴方向，速度矢量与 y 轴重合。因此，感应电场的向量与在同一条线上的导体可由式（2.8）表示；因此，感应电动势是 $e=lvB$。感应电动势的 e 取决于采用导线的参考方向。在目前的情况下，它是向量 l 的方向。

$$\vec{l}=-l\vec{i}_x,\vec{B}=-B\vec{i}_z,\vec{v}=v\vec{i}_y,$$
$$\vec{E}_{ind}=-vB\vec{i}_x,\ e=\vec{l}\cdot\vec{E}_{ind}=lvB \tag{2.8}$$

2.4　发电模式

图 2.3 中所示导体的端子可以连接到固定的终端电阻，以这种方式形成一个封闭的包含感应电动势 e、连接线和电阻 R 的电路。这条通路如图 2.4 所示。忽视连接线的电阻和电感，电路中电流可表示为 $i=e/R$。移动导体起着电势生成器的功能，而电阻 R 是一个电能的消耗者。由于导体中的电流方向对应电动势的方向，导体是电磁力和能源的来源。导体中电流产生的力 F_m 将阻碍导体的运动。外力 $\boldsymbol{F}_s$与电磁力 $\boldsymbol{F}_m$方向相反，克服阻力 $\boldsymbol{F}_m$。分析图 2.4 中系统的运行对建立初始机械功率 F_sv 和电磁力 ei 之间的关

系是很重要的。

感应电动势 $e=lvB$，它感应在导体中，大小等于电阻 R 上的电压 $u=Ri$。导体上的电磁力作用，如图 2.4 所示，从右到左，由式（2.9）给出：

$$\vec{F}_{m}=i(\vec{l}\times\vec{B}),\ |\vec{F}_{m}|=ilB \tag{2.9}$$

外力 $\boldsymbol{F}_s$ 克服了电磁力 $\boldsymbol{F}_m$ 并使导体移动。机械做功转移到电气做功是通过电磁感应产生的。运动的导体产生感应的电动势 e，它保证了电路中电流 $i=e/R$ 的通过并向电阻提供电能。

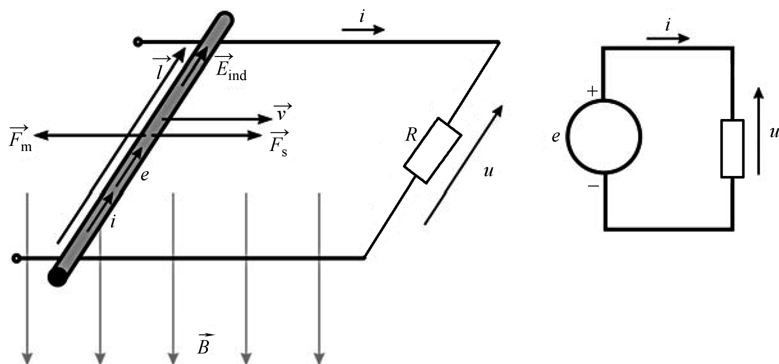


图 2.4　导体的直线部分穿过均匀外部磁场时，扮演了一个向电阻 R 传递能量的发电机的角色

作用在导体上的力的总和等于零：

$$\vec{F}_{s}+\vec{F}_{m}+m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=0$$

在动态平衡的状态，速度 v 是恒定的。加速度 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 等于零，惯性力 $F_i=m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 等于零。因此

$$\vec{F}_{s}+\vec{F}_{m}=0;\vec{F}_{s}=-\vec{F}_{m};\ |\vec{F}_{s}|=|\vec{F}_{m}|=ilB \tag{2.10}$$

外力 F_s 产生的机械功率等于 $P_m=F_sv=ilvB$。感应电动势 e 产生功率 $P_e=ei=ilvB=P_m$。当 $P_e=e^2/R>0$ 时，系统将机械功转换为电能。在这一分析过程中，忽略了能量损耗。因此，输入（机械）功率和输出（电气）功率之间有平衡的关系($P_e=P_m$)。

问题（2.1）：在图 2.4 所示的情况下当电阻随导体一起移动，电路中通过的电流是多少？

解答（2.1）：由于导体和电阻是平行运动，它们每个导体之中感应相同的电动势，从而相互抵消。因此，总电流将等于零。

2.5　制动转矩

置于磁场中的铁磁材料趋于与磁场同向和磁阻最小的位置，这可以用来实现机电能

量转换。图 2.5 显示了一个细长的铁磁材料，它具有高磁导率（$\mu_{Fe} \gg \mu_0$），斜对磁场的方向。电磁力趋向于将铁磁材料带到垂直位置，那里与磁场方向共线。

在图 2.5 中，假定永磁体产生了磁场。铁磁材料的移动（转子）部分会旋转到垂直位置，那里沿着磁力线方向的磁阻较低（磁阻沿着磁通路径）。转子在垂直位置时，磁导率很高，磁通进入转子磁极。铁磁转子总是倾向于与磁场同向。转矩往往使铁磁趋向于垂直位置，这个转矩被称为磁阻转矩，从转矩的产生的角度考虑的原则被称为磁阻原则。磁阻转矩取决于可动部分的空间位移产生的磁阻变化。磁阻转矩会使转子处于磁阻最小的位置。转子可以连接到一个工作电机以提供机械功率。

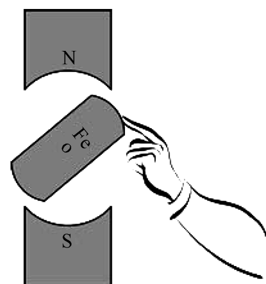


图 2.5　由于制动转矩的作用，铁磁材料试图与磁场对齐，因此提供了一个最小的磁阻

问题（2.2）：在水平位置时，作用于转子的磁阻的值是什么？

解答（2.2）：磁阻转矩会使转子处于磁阻最小的位置。在水平位置，磁阻假定它是最大值。转子在任何方向的假设的变化将导致磁阻减小。除非在水平位置，转子没有在任何方向移动的趋势，从而磁阻转矩等于零。在这个问题中，转子有一个不稳定的平衡。转子两侧的任何运动将导致对初始运动加速的磁阻转矩的产生。

2.6　制动力

图 2.6 显示了一个磁阻力导致了平移运动的系统。电磁力作用于放在一个各向异性的磁场中由铁磁材料构成的铁块，作用力倾向于把铁块推向磁通密度 B 更高的地方。

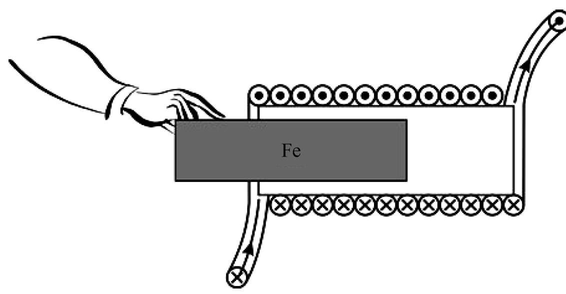


图 2.6　电动势试图将铁磁材料困在线圈内部

图 2.6 所示的线圈是由圆形绕线导体携带直流电流。这个系统的导体（线圈、绕组或圆柱）建立一个磁场，磁场延伸到线圈外，但线圈内部的磁场的强度最大。因此，磁通路径会通过圆柱线圈。一块移动铁磁材料可以插入线圈或者取出。

如果铁磁块在线圈之内，磁阻沿着磁通路径比较低。当铁磁块在线圈之外，磁阻比

较高。

考虑铁磁材料的运动往往趋向于向磁阻最小的位置移动，所以将会出现一个力试图将铁磁材料带入线圈之中。

2.7　电场中导体所受到的力

由于电场的作用，人们可以通过电场获得力和能量，如图 2.7 所示。在平行空间中，有两个带电电容板和一个静电场 E。在板块之间的距离与板块大小相比是小尺寸的情况下，可以被认为是均匀的。即磁力线是平行的，因而板块之间的磁场强度不会改变。

电荷分布在板块的内部的表面上。表面上电荷力倾向于把导电板块向中间区域运动，即力 F 可能导致板块运动。如果板块有一个变化 Δx，一个机械能 $F\Delta x$ 将实现做功。

基于这一原则，耦合电场可以使机电转换器运行，这也称为静电电机。

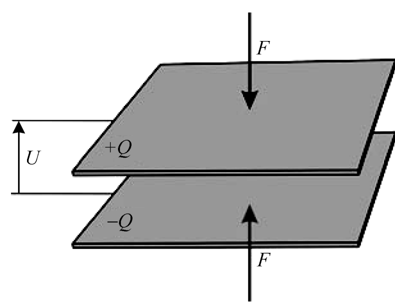


图 2.7　充电电容板所受到的电磁力，并且电磁力试图减小电容板之间的距离

2.8　介电常数的改变

机电转换可以基于作用于介电材料的移动部分（介电常数 ε）与由于环境的介电常数不同产生的电磁力而实现。图 2.8 显示了两个导电块和一块移动的介电材料，介电常数为 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$。在两个电极之间的自由空间中充满了空气，空气的介电常数为 ε_0。

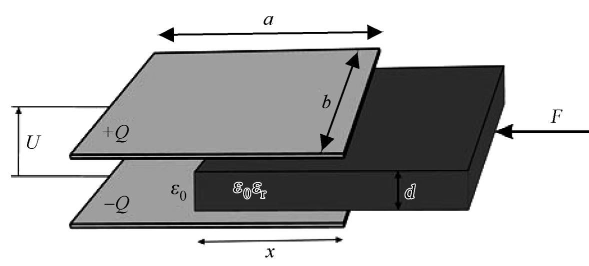


图 2.8　电磁力试图将绝缘体块拉入两块平行板之间的空间。绝缘体的绝缘系数要比空气的绝缘系数高

介电材料的相对介电常数 $\varepsilon_r > 1$，它可以沿水平方向移动。通过移动到左边，位置 $x = a$，它完全填充板之间的空间。向右移动，介质位置 $x = 0$，两板之间的空间则完全由空气填充。下面的分析将表明，当介质块处于 $0 < x < a$ 时，将会有电磁力 F 试图将介质块拖入两块平行板之间。

当两块平行板之间被施加电压 U，板块之间的空间电场 E 是 $E=U/d$，d 是两板之间的距离。导电板代表了等位面；因此，关系式 $U=Ed$ 适用于空气以及其他均匀介质，而电场的强度在这两个截面之间是一样的。在电介质中，电位移矢量为 $D=\varepsilon_r\varepsilon_0 U/d$，而在空气中，$D=\varepsilon_0 U/d$。电场的总能量是由式（2.11）确定，$S=ab$ 是板块的表面积：

$$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2\cdot\frac{a-x}{a}Sd+\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2\cdot\frac{x}{a}Sd=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2\cdot\frac{Sd}{a}[(a-x)+x\varepsilon_r] \tag{2.11}$$

如果板连接到一个恒压源，一个小位移 Δx 将会改变空间磁场的能量积累。电源 U 将提供一定数量的电能，而力 F 将有助于传递机械功 $\Delta W_{meh}=F\Delta x$。ΔW_e保证了能量的平衡，改变在这一区域能源的大小 ΔW_i，ΔW_e和机械能的做功是由关系 $\Delta W_i=\Delta W_e+\Delta W_{meh}$确定。本章下面的方程（3.8）证明了 $\Delta W_e=\Delta W_i/2$ 和 $\Delta W_e=\Delta W_{melt}$。因此，介质中作用于移动的板块的电磁力可表示为式（2.12）：

$$F=\frac{dW_e}{dx}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2\cdot\frac{Sd}{a}(\varepsilon_r-1) \tag{2.12}$$

可以认为电磁力 F 会分离性质不同而介电常数不同的两种介质。从静电学的基础上得出结论，电磁力作用于两个分离表面之间的空间充满了两种不同的介质材料，它们的等效压力为 $p=w_{e1}-w_{e2}$。w_{e1}和 w_{e2}是静电场在两个分离的介质的特定能量。它们也被称为空间静电场的能量密度。空气介质中电场的能量密度为 $w_0=1/2\varepsilon_0(U/d)^2$，而在介质之间是 $w_0=1/2\varepsilon_r\varepsilon_0(U/d)^2$。力 F 可从式（2.13）得到，两个区域分界面的矩形表面积是 $S_d=bd=Sd/a$。

$$F=(w_d-w_0)S_d=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2\cdot(\varepsilon_r-1)\cdot\frac{Sd}{a} \tag{2.13}$$

问题（2.3）：确定断开电源连接时电磁力的方向。应该注意，总电荷 Q 在现有导电块之间是恒定的，而板块之间的电压是取决于介质的位置的变化。

解答（2.3）：在板块之间的空间，有一个均匀的电场。金属板的电导率 $1/\rho$ 非常高，一个板块之上所有点的电势是相同的。因此，板块之间的电压是由电场强度和介质的距离决定的。电场和距离的乘积 Ed 等于电压 U；因此，电场 $E=U/d$ 在空气和介质中是一样的。由于介质中的介电常数更高，所以介质中的电位移大于空气中的电位移：

$$D_0=\varepsilon_0\frac{U}{d},D_d=\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{U}{d}$$

导体的表面的电荷密度是标量，它是由矢量电感和介质表面的方向矢量产生的，在一个给定的点：

$$\sigma=\vec{n}\cdot\vec{D}$$

在所考查的情况下，电感的向量方向是垂直于导体的表面而和法向量 n 是在同一条直线上的。因此，表面电荷密度的 σ 等于电位移 D 。因此，靠着介质的平行板上的电荷面密度将会大于没有靠着介质的平行板部分。如图 2.8 所示，总电荷 Q 可以用 x 值的改变和 D_d和 D_0 的值之间的关系表达。

$$Q = (a-x)b \cdot D_0 + xb \cdot D_d = (a-x)b \cdot \varepsilon_0 \frac{U}{d} + xb \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{U}{d}$$
$$= b\varepsilon_0 \frac{U}{d}(a - x + x \cdot \varepsilon_r)$$

而电容 C 可表达为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{b\varepsilon_0}{d}(a - x + x \cdot \varepsilon_r)$$

当平行板与电源的连接断开时，机械功 $\Delta W_{meh} = F\Delta x$ 通过抵消这个场能量而做功，即 $\Delta W_{meh} = -\Delta W_e$。因此，电磁力可以根据表达式 $F = -\Delta W_e/\mathrm{d}x$ 确定。电能的耦合场可以表示为 $W_e = 1/2Q^2/C$ 或 $W_e = 1/2CU^2$。在目前的情况下，Q 是常数，而电压 U 是可变的，电磁力可以根据表达式确定：

$$F = -\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{C}\right)$$

通过对电容的倒数值微分，得到电磁力的表达式：

$$F = -\frac{Q^2}{sb\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{a - x + x \cdot \varepsilon_r}\right) = \frac{Q^2}{sb\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\left(\frac{1}{a - x + x \cdot \varepsilon_r}\right)^2$$

由于上面的表达式为正值，所以电磁力的方向与平行板连接电源时是一样的。通过引入替代 $Q = CU$ 到在上面的表达式中，电磁力可表示为

$$F = \frac{U^2}{2}(\varepsilon_r - 1)\frac{b\varepsilon_0}{d} = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{d^2}(\varepsilon_r - 1)\frac{Sd}{a}$$

表达式（2.12）和式（2.13）是完全等效的。可以得出的结论是，力不会因为电源开关的打开或关闭而改变，只要电荷 Q 在这两种情况下是相同的。

解题（2.4）：思考当一个如图 2.8 所示的带电电容器导电块，假设板块不连接到电源。E 和 D 部分由空气填充和其他电介质填充有什么区别？在总能量增加或减少的情况下，介质会被推到更远的板块之间的空间吗？

解答（2.4）：在板块之间的空间各点的电场 E 是相等的。导电块之间的电介质的能量密度为 $w_{ed} = 1/2\varepsilon_r\varepsilon_0E^2$，$\varepsilon_r$是空气中能量密度的 $w_{ea} = 1/2\varepsilon_r\varepsilon_0E^2$ 倍。区域的总能量是 $w_{ea}V_a + w_{ea}V_d$，w_{ea}和 w_{ed}是空气和介质中的能量密度，而 V_a和 V_d是由空气和电介质电极间的空间的体积。当电介质块向两平行板中间移动时，V_a体积减少，而体积 V_d增加。因为 $w_{ea} < w_{ed}$，有迹象显示，总能量增加。然而，由介电材料填充板之间的空间增加了等效电容 $C = Q/U$，因为它是与填充板之间的空间介质材料的介电常数成正比的。由于电荷 Q 是常数，电容的增加将导致电压的降低。因此，电场 E 将减小。空间的能量密度取决于磁场强度的平方。因此，可以得出结论，电介质插入更深将减少电场的总能量。这些因素可以通过分析验证 $w_e(x)$ 的表达式得到：

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2}\frac{d}{(a - x + x \cdot \varepsilon_r)b\varepsilon_0}$$

本节内容表明，对于恒定电荷 Q，当 x 的值上升时总磁场能量减少，也就是说，它

将被推移到两平行板更中间的位置。

2.9　压电效应

在硅晶体表面施加压力会在其表面感应电荷并产生电压差。这种效应被称为压电效应。在一台压电扩音器中，声波通过空气使得晶体表面产生不同的压力。因此，晶体表面将会产生不同的压力。一种声质的电信号将在晶体中产生一种电压。这个电压可以被放大和再加工，如图 2.9 所示。

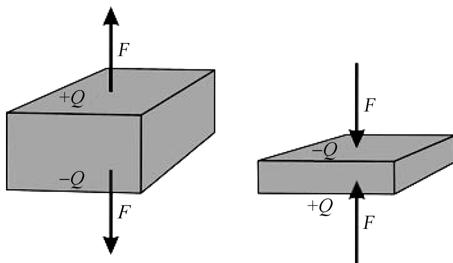


图 2.9　晶体面上所受到的变化的压力导致测量电压的变化

制造一种电压和压力之间呈现线性化的晶体是可实现的。这种的晶体能够被用作设计精确的电度量器具。

压电效应的反效应可以被用作实施能量转换。如果晶体的表面被可变电压连接的导体覆盖，一个随着不同电压变化而变化的力将会产生。这种效应能够被用来通过控制施加电压来产生很小的移动。如果被连接的电压代表了一种音质，不同的力将会在晶体表面产生不同的压力，这样就制造了压电效应扩音器。

在一个压电效应装置中，晶体表面移动一段非常小的距离。基于压电效应的电机能够被用到运动控制应用中，它有非常小的分布和非常高的精度，例如在硬盘驱动器的磁头定位上。

2.10　磁致伸缩

适用于机电能量转换的一个原则是磁致伸缩。大体上而言，铁磁材料的磁致伸缩能改变它们的形状和尺寸。这个现象被称为磁致伸缩。如图 2.10 所示，在磁场中，铁磁棒的长度将会改变。这个现象引起力的改变。乘以机械位移，这个力将产生机械功率。但是，因为非常小的位移和非常小的功率质量比率，所以基于磁致伸缩的机电转换器是非常少见。传统的电机和电力变压器通常用硅钢片构成磁路，在其中磁场以电压频率波动。磁致伸缩效应引起了磁场的振动。因为磁致伸缩力与磁场强度的平方成正比，因此其振动频率是其电压频率的两倍。这个振动引气声波的振动并产生声音，这个声音听起

来像是“嗡嗡”声，它在电磁装置中频繁地出现。

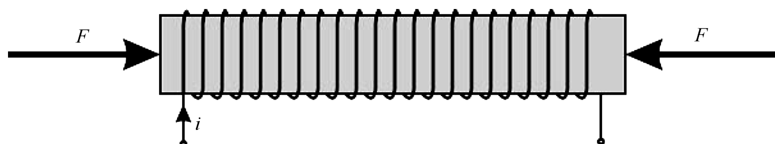


图 2.10　磁化和作用力的相互关系试图将铁磁材料压缩或拉伸

与磁致伸缩对应的是由于机械压力而导致的铁磁材料电导率的改变。也就是说，由于外部施加力的影响，材料的磁化特性将会改变。当一个外部的力施加到一个铁棒上，相同的磁场强度 H 将会得到一个更大的电磁感应，即磁密 B。这个效应被称为法拉利效应。通过应用所描述的原则，可以测量钢结构材料部分的强度，例如桥和摩天大厦。

本章讨论了作用在机电能量转换器的运动部分的电磁力发生的原则，也提供了机电能量转换的过程的分析方法。下面的章节将介绍基于电耦合场和磁耦合场的机电能量转换器的一些基本原则。

第 3 章　电磁耦合场

机电能量转换以电磁场中的电磁力或电磁转矩为基础。这些作用于运动部分的电磁力或电磁转矩是电场或磁场作用的结果。机电转换装置中的这一电磁场耦合了装置的运动部分和静止部分。因此，该场又称为耦合场。本章介绍通过耦合电场或耦合磁场实现机电能量转换的一些基本概念。

3.1　基于静电场的机电能量转换装置

静电场装置中的机电能量转换以耦合电场为基础。运动部分之间的耦合电场是实现转换的先决条件。耦合电场存在于可动电极之间的媒质中，产生作用于电极的电场力。

基于耦合电场实现机电能量转换的示意图如图 3.1 所示。该电容器由两块平行的金属板电极构成，其中金属板的面积（S）远远大于两金属板之间的距离（d）。因此，两金属板电极之间的电场可以认为是均匀电场，即电场强度 $E=U/d$(V/m)，其中 U 是两个电极之间的电压。电位移矢量 $\boldsymbol{D}$(As/m^2)由电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 和媒质介电常数 ε 相乘得到。作用在金属板上的电场力取决于电容器存储的电荷量。如果其中的一个金属板电极发生移动，那么电场力和金属板位移的乘积即是输出的机械功。机械功可以由耦合电场转化而来，也可以由与金属板电极相连的电源提供。

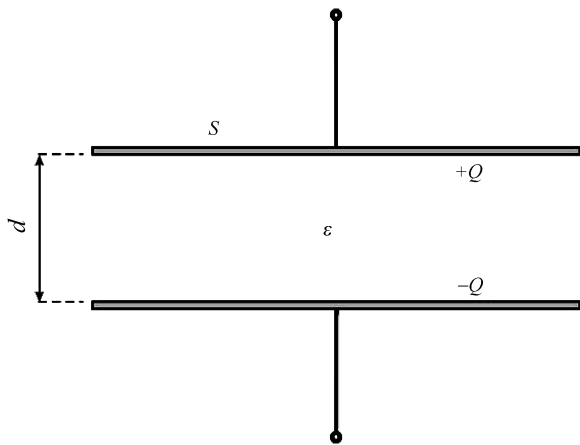


图 3.1　平板电容器（极板距离远小于极板尺寸）

3.1.1　电荷、电容和能量

既然平行金属板电极之间的耦合电场是均匀电场，那么电场强度由电极间电压和极间距离的比率决定，即 $E = U/d$。电位移 D 又称为电通量密度，即 Q/S。同时，D/E 取决于媒质的介电常数 ε。

$$E = \frac{U}{d}; D = \sigma = \frac{Q}{S} = \varepsilon E; \Rightarrow Q = \varepsilon ES = \varepsilon S\frac{U}{d} \tag{3.1}$$

电容量 C 由电荷量 Q 和电极间电压 U 的比率决定。所以，平行金属板电容器的电容 C 取决于金属板电极的面积 S、电极间的距离 d 和电极间媒质的介电常数 ε。

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon\frac{S}{d} \tag{3.2}$$

耦合电场的总能量可以通过对电场域的能量密度 w_e 求积分而得到。在平行金属板电容器中，耦合电场和电场能存在于两金属板电极之间的空间，电场能量密度是常量，$w_e = 1/2\varepsilon E^2$。积分域（电场域）为体积 $V = Sd$。因此，耦合电场的总电场能量 $W_e = 1/2CU^2 = 1/2Q^2/C$

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V w_e \mathrm{d}V = \int_V \left(\int \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{E}\right)\mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)\mathrm{d}V \\ &= Sd\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right) = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C} \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.1.2　电能、机械能和场能

图 3.2 展示了一个上极板可以移动的平行金属板电容器及其充电电路。可以看出，通过向下移动上极板，电场能将转化成机械功。两金属板电极上所存储的电荷极性相反，因此两电极之间将产生一个电场吸力 F。如果上金属板电极向下移动 Δx 的位移，那么可得机械做功为 $F\Delta x$。伴随上金属板电极的移动，耦合电场的电场能 W_e 也将改变。

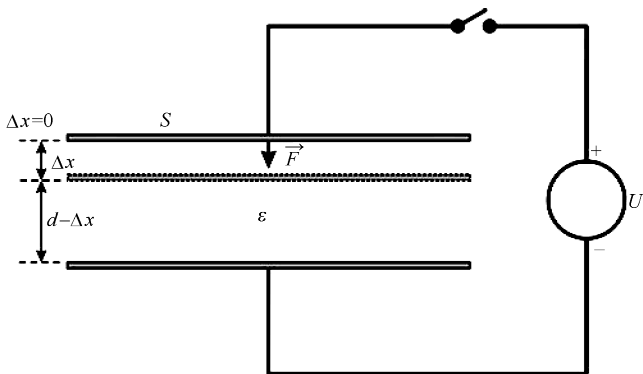


图 3.2　一个上极板可移动的电容器

由于电容器的两金属板电极与电源相连，通过与电源进行电荷交换，金属板电极上存储的电荷量将发生改变。

作用在金属板电极上的电场力可以用虚功法（也称虚位移法）进行确定。虚功法通过计算电场能和电源电能的变化来求解电场力。首先假定上金属板电极向下移动一段非常小的位移 Δx，且电场吸力 F 的方向与假定的虚位移 Δx 一致，可得虚机械功 $\Delta W_{meh}=F\Delta x$，那么电场力可以通过虚机械功 ΔW_{meh} 除以虚位移 Δx 而求得。同样的虚功法可用于旋转类机电转换装置中转矩的求解。用虚角位移 $\Delta\theta$ 代替虚位移 Δx，那么虚机械功 $\Delta W_{meh}=T_{em}\Delta\theta$，其中 T_{em} 是由电场力产生的转矩。T_{em} 作用于装置的旋转部分而影响其转速。

在图 3.2 中，恒定电压源 U 通过开关与电容器的金属板电极相连。闭合开关，将电压源与金属板电极连接，维持两电极间的电压 U 不变。假定将两金属板电极间的距离 d 减小虚位移 Δx，则电容器的容量 C 将增大。由于电容量增加，则电容器所存储的电荷量 $Q=CU$ 也将增大，因此电源将向电容器额外提供 ΔQ 的电荷量。伴随虚位移，电源所需额外提供的电能为 $\Delta W_i=U\Delta Q$，而虚机械功 $\Delta W_{meh}=F\Delta x$。由于整个系统的能量由电源提供，因此电源输出的电能包括全部电场能和机械功。在电压恒定的情况下，电场能的计算式如式（3.4）。

在接下来的分析中，将会看出电源提供的电能增量将分成相等的两部分 $\Delta W_{meh}=\Delta W_e=1/2\Delta W_i$。

如果将图 3.2 中的开关打开，将电源与电容器断开连接，则电源不再提供电能。金属板电极上的电荷量将不再发生变化（$Q=$ 常量），电通量密度 D 也不再发生变化。因此电场能量密度 $w_e=1/2D^2/\varepsilon$ 也为恒定值。

随着两金属板电极间距离的减少，耦合电场的积分域也逐渐变小，所以 ΔW_e 为负值，总电场能也减小。由于电容器与电源分离，所以减少的电场能全部用于产生机械功，即 $\Delta W_{meh}=-\Delta W_e$。在恒电荷量情况下，电场能的计算式如式（3.5）。

$$W_e(\Delta x)=S(d-\Delta x)\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)=\frac{1}{2}CU^2=\frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon S}{d-\Delta x} \tag{3.4}$$

$$W_e(\Delta x)=S(d-\Delta x)\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)=c=\frac{Q^2}{2}\frac{d-\Delta x}{\varepsilon S} \tag{3.5}$$

3.1.3 电场力表达式

基于耦合电场运行的机器称为静电场机电变换装置。耦合电场由电介质材料填充。电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 成比例关系（$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$）的电介质称为线性电介质。使用线性电介质的静电场机器称为线性静电场机器。图 3.2 所展示的结构就是一个可忽略能量损耗的线性静电场器械。因此在恒电荷量（$Q=$ 常量）的情况下，机械功 $\Delta W_{meh}=F\Delta x$ 取决于 $\Delta W_{meh}=-\Delta W_e$；在恒电压情况下，$\Delta W_{meh}=+\Delta W_e=+1/2\Delta W_i$。根据以上表达式，可以说电场力是电场能 W_e 在相应坐标 x 处的派生表达。这里的坐标指的是可动电极在系统运动方向上的位移。

如图 3.2 中所示的系统，当电源不与电容器相连时，电容器所存储的电荷量为常量，电源供电电能为 0。应用虚功法，通过式（3.6）可以求得电场能和机械功的变化量。

$$\Delta W_{\mathrm{i}} = U\Delta Q = 0$$

$$\Delta W_{\mathrm{i}} = \Delta W_{\mathrm{meh}} + \Delta W_{\mathrm{e}} \Rightarrow \Delta W_{\mathrm{meh}} = -\Delta W_{\mathrm{e}} \tag{3.6}$$

当电源不与电容器相连时，作用于可动电极上的电场力 F 可通过式（3.7）求解。当 ΔW_{e} 和 Δx 非常小时，$\Delta W_{\mathrm{e}}/\Delta x$ 可以看作是 $W_{\mathrm{e}}(x)$ 的一阶微分。

$$F = -\frac{\Delta W_{\mathrm{e}}}{\Delta x}$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{Q^2}{2}\frac{d-x}{\varepsilon S}\right\} = \frac{Q^2}{2S\varepsilon} \tag{3.7}$$

如果电源与电容器相连，则电容器两电极间的电压是恒定值。应用虚功法，电源提供的电能、电场能的变化量和机械功可以通过式（3.8）求得。

$$\Delta W_{\mathrm{i}} = U\Delta Q;\Delta W_{\mathrm{e}} = \Delta\left(\frac{CU^2}{2}\right) = \frac{1}{2}U\Delta Q = \frac{1}{2}\Delta W_{\mathrm{i}}$$

$$\Delta W_{\mathrm{i}} = \Delta W_{\mathrm{meh}} + \Delta W_{\mathrm{e}} \Rightarrow \Delta W_{\mathrm{meh}} = \Delta W_{\mathrm{i}} - \Delta W_{\mathrm{e}} = \Delta W_{\mathrm{e}} \tag{3.8}$$

当电源与电容器相连时，作用于可动电极上的电场力 F 可通过式（3.9）求解。当 ΔW_{e} 和 Δx 非常小时，仍将 $\Delta W_{\mathrm{e}}/\Delta x$ 看作是 $W_{\mathrm{e}}(x)$ 的一阶微分。

$$\begin{aligned} F &= +\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon S}{d-\Delta x}\right\} = \frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon S}{(d-x)} \\ &= \frac{E^2}{2}\varepsilon S = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{Q^2}{2S\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.9}$$

式（3.7）和式（3.9）所给出的电场力表达式仅适用于以介电常数与电场强度无关的线性介电材料作为电介质的情况。当电源不与电容器相连时，电容器电极的移动不引起电荷量 Q 的任何变化，但是能引起电容量和两金属板电极间电压的变化。电源不与电容器相连时的电场力表达式可改写成如下形式：

$$F = -\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{Q^2}{2}\frac{1}{C}\right\} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{1}{C}\right\}$$

当电源与电容器相连时，电容器两金属板电极间的电压是恒定值。因此，电容器电极的移动将使电容量 C 和电荷量 Q 发生改变。此种情况下，电场力的表达式如下所示：

$$F = +\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}x} = +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{U^2}{2}C\right\} = +\frac{U^2}{2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$$

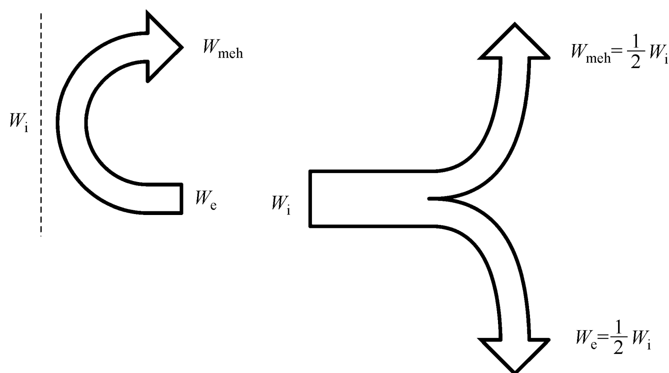
问题（3.1）：式（3.7）给出的是电源不与电容器相连时电场力 F 的计算表达式，式（3.9）给出的是电源与电容器相连时电场力 F 的计算表达式，需要指出的是两种情况下电场力的计算表达式相同，正比于 Q^2。那么作用于可动电极上的电场力与电容器连接或不连接电源是否有关？请提供解释。

解答（3.1）：作用于金属板电极上的电场力可以看作是作用于分布在金属板上的

每个电荷的电场力的总和。每一份电场力都取决于金属板上的电荷密度和空间电场强度。因此，有必要比较电源与电容器相连时的电场力和电源不与电容器相连时的电场力。如果两种情况下金属板电极上所存储的电荷量 Q 相同，那么此时金属板上的电荷密度也相同。金属板表面的电荷密度决定了电场的电通量密度 D。所以两种情况下的电场强度 $E=D/\varepsilon$ 也相同。从而可以得到两种情况下电场力也相同的结论。

3.1.4　机电能量转换循环

从以上部分可见，机电转换表现为两种不同的模式。不连接电源时，机械功 ΔW_{meh} 来自于耦合电场的所存储的电场能，即 $\Delta W_{meh}=-\Delta W_e$。如果外接电源，电源供电电能 ΔW_i 被分成相等的两部分，即 $\Delta W_{meh}=\Delta W_e=1/2\Delta W_i$。两种模式下的机电能量转换图如图 3.3 所示。需要引起注意的是这两种转换模式没有任何一种可以无限制地持续进行。



a）极板不连接电源　b）极板连接电源

图 3.3　机电转换的一个循环

如果外接电源，机电能量转换表现为把电源供电电能的一部分转化成机械能，而其余的部分作为电场能存储于耦合电场中。电场能 W_e 取决于电场能量密度 $w_e=1/2\varepsilon E^2$ 和电场域的体积。最大电场强度受限于媒质材料的介电强度。如空气媒质下最大电场强度 $E_{max}\approx 30\text{kV/cm}$。超过电介质所能承受的最大电场强度将导致电介质损坏，电流流过媒质并产生电弧。电介质损坏最终损害器械性能或毁坏装置。所以，耦合电场的电场强度和能量密度 w_e 都是受限在一定范围之内的。而电场域的体积又由金属板电极的面积和电极间的距离决定。所以耦合电场的电场能是有上限的，最大电场能 $W_{e(max)}$ 不允许被超过。正是这个原因，电场能不能无限制地永恒增长。因此外接电源也不能无限地提供电能。

在不连接电源的情况下，机械功由耦合电场所存储的电场能转化得到。随着电场能消耗殆尽，转化也将最终停止。因此能量转换也不能无限地持续进行。

当要求机电能量转换持续进行时，需要当前的两种模式都要运行。也就是说，在一个转换循环中需要通过接通和切断开关以实现两种模式交替运行。接通开关接入外部电

源运行一段时间，紧接着就切断开关以不连接电源的模式再运行一段时间。如此交替运行，保持耦合电场的电场能既不超过 $W_{e(max)}$ 也不跌落为 0，以提供持续的机械功。因此机电转换通常以这种方式循环运行。图 3.3 对两种模式的周期性交替运行进行了说明。在旋转类装置中，一个循环周期对应转子旋转一圈（有时候不到一圈）。

问题（3.2）：请估算在一个电极可动的平行金属板电容器中一个机电能量转换循环所能获得的最大机械功。已知两金属板间的最大距离和最小距离，电介质所允许的最大电场强度 $E_{max}=30\text{kV/cm}$。

解答（3.2）：一个转换循环中所能获得的最大机械功取决于耦合电场所能存储的最大电场能。金属板电极的面积 S，两金属板电极间的最大距离 d 和耦合电场的最大能量密度 $w_e=1/2\varepsilon E^2$ 均已知，所以一个转换循环中所能获得的最大机械功 $\Delta W=Sdw_{e(max)}$。

问题（3.3）：如果每秒完成 f 次机电能量转换循环，请估算平均功率。

解答（3.3）：每秒完成 f 次机电能量转换循环时的平均功率 $P_{av}=f\Delta W=fSdw_{e(max)}$。

3.1.5　电场和磁场的能量密度

机电转换装置的功率取决于耦合场的累积能量的密度。如果耦合场具有较高的能量密度，则给定体积的转换装置往往具有较高的平均功率。给定能量转换装置的功率，提高耦合场的能量密度将减小装置的体积和重量。功率-体积比也称为功率系数。下面的分析将显示基于耦合磁场的机电转换装置比静电场装置拥有更高的功率系数。

一个转换循环所能获得的机械功取决于耦合场所存储的能量。耦合场所存储的能量的最大值取决于场的能量密度和能量转换装置的体积。如果两个能量转换装置的体积相同，那么能量密度较高的装置在一个能量转换循环中可产生更多的机械功。如果两个转换装置的转换频率相同，能量密度较高的装置具有较高的平均功率。

磁场的能量密度远大于电场的能量密度。真空的介电常数（D/E）$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ F/m≈10^{-11}F/m，而磁导率（B/H）$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$H/m≈10^{-6}H/m。因此，磁场的能量密度 $w_m=1/2\mu_0H^2$ 比电场的能量密度 $w_e=1/2\varepsilon_0E^2$ 高得多。正是这个原因，电机大都基于磁耦合场实现机电能量转换。

耦合场的能量密度主要取决于场强的二次方。由介电强度决定，空气所允许的最大电场强度 $E_{max}=30\text{kV/cm}\approx3\text{MV/m}$。在以磁耦合场为基础的电机中，耦合磁场由磁路构成，包括气隙和铁磁材料（例如铁）。

气隙中的磁密受限于铁磁材料中的磁密，通常铁磁材料所允许的最大磁密 $B_{max}=1\sim2\text{T}$。所以电机气隙中的最大磁场强度 $H_{max}\approx B_{max}/\mu_0\approx1\text{MA/m}$。而且 $\varepsilon_0\approx10^{-11}$F/m，$\mu_0\approx10^{-6}$H/m，所以磁场能量密度远高于电场能量密度。两个体积相同的机电能量转换装置中，耦合磁场较耦合电场具有更高（$10^3\sim10^4$ 倍）的场能，所以基于磁耦合场的机电能量转换装置也具有更高的平均功率。

3.1.6　耦合场和能量传递

需要指出，无论是基于磁耦合场还是基于电耦合场的机电能量转换均涉及到两个场

量，那就是电场强度矢量 **E** 和磁场强度矢量 **H**。在电机中通过运动部分周围的空间（气隙）进行电端口和机械端口间的能量传递，在电动机中能量从电端口传递到机械端口，在发电机中能量从机械端口传递到电端口。通过气隙传递的能量可以用坡印亭矢量（Poynting vector）衡量。因此，当气隙中有能量传递时，其坡印亭矢量为非零值。坡印亭矢量等于电场强度矢量和磁场强度矢量的矢量积，表示功率的面密度，单位是W/m^2。坡印亭矢量的面积分表示积分面内外两个区域之间的能量传递率。坡印亭矢量的方向就是能量传递的方向。电场强度矢量 **E** 和磁场强度矢量 **H** 缺少任何一个则坡印亭矢量为零值，也就是说不存在能量传递。由此，电机中电场是怎样感应出磁场以使坡印亭矢量不为零的问题便出现了。

当机电转换装置中的耦合电场处于静态的时候，其所感应的磁场为零，此时的坡印亭矢量也为零。装置的运动部分尚未运动，装置转换的能量为零，所以此时装置的功率为零是理所当然的状态。也可以说因为装置的功率等于电场力与运动速度的乘积，装置的运动部分尚未运动时虽然电场力可能存在但运动速度为零，所以装置的功率等于相乘的结果，即等于零。如果转换装置的运动部分在耦合电场中处于运动状态，那么电场强度矢量 **E** 和电通量密度矢量 **D** 都将成为变量。电通量密度 **D** 对时间变量的一阶微分将构成感应磁场的磁场强度矢量 **H** 的空间微分。基于安培环路定律的第二麦克斯韦方程如下：

$$rot\,\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{3.10}$$

因为在耦合场域内磁场强度矢量 **H** 的空间微分存在非零值，所以场域内所有点的磁场强度矢量 **H** 的代数值不会都等于零。从而可以得到静电场机械运行时在耦合电场域内有某一特定的磁场强度 **H** 存在的结论。结合电场强度矢量 **E**，可得坡印亭矢量 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$。

在基于磁耦合场的机电转换装置中可以得到同样的结论。在静磁场中，磁场强度矢量 **H** 存在，但电场强度矢量 **E** 和坡印亭矢量 **P** 均为零。由于 $\boldsymbol{P}=0$，所以没有能量传递到装置的运动部分，装置的功率为零。同样是装置的功率为零的结论可以按照装置功率等于电磁力与运动速度乘积的关系计算得到。当转换装置的运动部分在耦合磁场中处于运动状态，磁场强度矢量 **H** 和磁通密度矢量 **B** 都将成为变量。基于法拉第电磁感应定律的第一麦克斯韦方程如下：

$$rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{3.11}$$

因此，磁场 **B** 的变化结果是电场的偏微分导致变换器内部电场 **E** 的出现并且产生非零的坡印亭矢量。

3.2 基于磁耦合场的机电转换装置

基于磁耦合场的机电转换装置通过磁场对运动的导体和运动的铁磁材料的作用来实

现机电能量转换。在这样的装置中，磁耦合场是实现机电能量转换的先决条件，其存在于装置中由固定部分和运动部分组成的磁路和电路空间中。装置的运动部分可以做直线运动或者旋转运动。

作用在运动部分的电磁力取决于磁场的磁通密度和导体中的电流。机械功可以从磁场储能获得，也可以从与载流导体相连的电源获得。

3.2.1　直线运动的转换装置

图 3.4 展示的是一个导体在均匀磁场中做直线运动的简单机电转换装置。接下来重点分析装置的电动机特性。

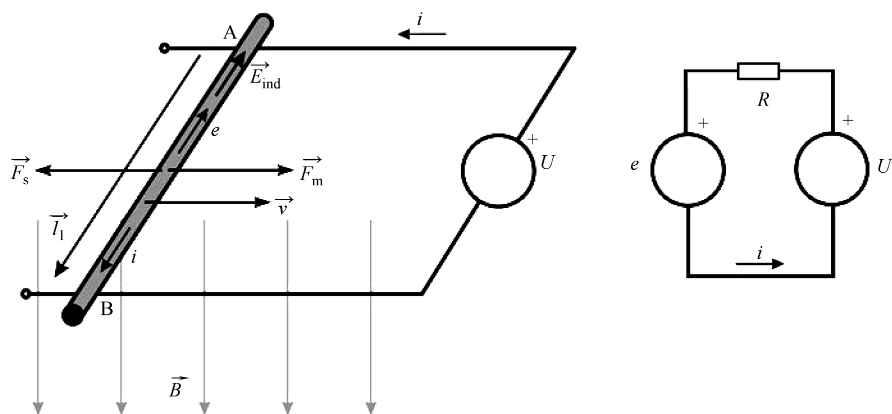


图 3.4　一个磁耦合场直线机电变换器

装置外接恒定电压源 U，其输出的机械功是从电压源提供的电能转化获得。长度为 l_1 可运动的导体 AB 通过固定的平行导电导轨与电压源 U 连接。由可动导体 AB、固定的导电导轨和电压源组成的电路如图 3.4 中右侧部分所示。导体 AB 的电阻忽略不计，而电路中其他部分的电阻整体记作 R。

电压源 U 在电路中产生电流 i。导体 AB 中电流的方向与矢量 $\boldsymbol{l}_1$ 的方向相同，如图 3.4 所示。导体置于一个磁通密度矢量为 $\boldsymbol{B}$ 的外部㊀均匀磁场中。作用在可动导体 AB 上的电磁力 F_m 由式（3.12）确定。

$$\vec{F}_m = i(\vec{l}_1 \times \vec{B}) \tag{3.12}$$

由于矢量 $\boldsymbol{l}_1$ 与磁通密度矢量 $\boldsymbol{B}$ 正交，所以电磁力的值 $F_m = l_1 iB$。图 3.4 中电磁力的方向为从左指向右。假定电磁力使导体运动的方向与导体运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同，则导体受

㊀　外部环境引起的磁场叫做外部磁场。外部环境不在考虑范围之内，它们与所考虑的系统没有关系。外部磁场可以由外部载流导体、外部永磁体、地磁极或其他磁场源产生。

到一个与运动速度方向相反的外力 F_{ex} 作用。在动态平衡状态下，导体运动的加速度为零，运动速度 $\boldsymbol{v}$ 保持不变，作用于运动导体上的合力为零，外力与电磁力在数值上相等。

$$\vec{F}_{ex}+\vec{F}_{m}=0;\vec{F}_{ex}=-\vec{F}_{m};|\vec{F}_{ex}|=|\vec{F}_{m}|=il_1B \tag{3.13}$$

当导体 AB 在磁场中运动时，导体两端将感应出电动势 e_{AB}。导体内部的感应电场的电场强度 $\boldsymbol{E}_{ind}$ 取决于导体的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 和磁场的磁通密度矢量 $\boldsymbol{B}$。沿导体方向其内部的感应电场的电场强度不变，所以感应电动势 $e=e_{AB}$ 的计算式如式（3.14）

$$e=(-\vec{l_1})\vec{E}_{ind}=(-\vec{l_1})(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{3.14}$$

由于导体内部的感应电场的方向与导体同向，所以感应电动势 $e=l_1vB$。感应电动势 $e=e_{AB}$ 的符号与采用的参考方向有关，如图 3.4 所示。感应电动势符号为正，$e=e_{AB}>0$，表示从导体 B 端到 A 端电动势增加。

从图 3.4 可见，电路中的电流 $i=(U-e)/R$。稳态时，电流 i（t）不随时间变化，其值为 $I=(U-l_1vB)/R$。电源的功率 $P_i=Ui=ei+Ri^2$，其中包括有用功部分 $P_{AB}=ei=l_1vB$ 和损耗部分 $P_r=Ri^2$。损耗部分是由导体的焦耳效应引起的，损耗的大小与导体的电阻和电流的二次方成正比。有用功部分 P_{AB} 是传递到运动导体中的能量。作用于导体上的电磁力 F_m 克服与导体运动方向相反的外力 F_{ex} 而维持导体的运动。导体所受作用力的方向与导体的运动方向同向，所以机电转换装置输出的机械功 $P_{meh}=F_mv=l_1vB$，由电压源 U 所提供的电能转化而来。由于 $P_{meh}=F_mv=P_{AB}=ei=l_1vB$，所以电压源 U 所提供的电能 P_i 可表示成

$$P_i=Ui=ei+Ri^2=F_mv+Ri^2=P_{meh}+Ri^2 \tag{3.15}$$

电压源 U 所提供的电能被分成电路的热损耗和机械功两部分，其中机械功是机电转换装置所输出的能量。由感应电动势输出的能量 $P_e=e(-i)=-ei<0$，所以感应电动势吸收能量 $ei=l_1vB$。感应电动势吸收的能量之后被转化成机械功，其功率 $P_{meh}=F_mv=ei$。在当前的机电装换装置中机械功率等于感应电动势与导体电流的乘积。式（3.16）给出了所有电机中的固定关系式

$$ei=F_mv \tag{3.16}$$

由功率关系式 $P_r=Ri^2$ 决定的焦耳损耗最终转化成热量，导体和装置的其他部件将被加热，装置的温度将升高，而超过环境温度。高温的装置将通过对流、传导和辐射的方式将热量传递给周围环境。当焦耳损耗产生的热量与装置向周围环境传递的热量相等时，装置的温度不再升高，系统达到热平衡状态。由于机电转换装置主要用于实现电能和机械功之间的转换，所以尽可能减少装置的焦耳损耗是十分必要的。由于热量损耗，装置的转换效率会降低。而且为了使装置不致过热，焦耳损耗产生的热量必须被散发出去。因此针对装置的散热和冷却必须考虑相应的解决方案。从方程式可见，通过减小电路中的电阻可以减少焦耳损耗。为了减小电路中的电阻，需要增加电路中导体的截面积，从而装置中的用铜量增加，装置的体积、重量和成本也均增加。

图 3.4 所示的能量装换装置也可以运行于发电机状态。假定导体 AB 中的电流方向和其所受的电磁力方向均保持不变，为了维持运动状态作用于导体 AB 上的外力 F_{ex} 应该反

向。在发电机模式下，装置将机械能转换成电能。发电机运行的详细分析见 2.4 节。

3.2.2　旋转运动的转换装置

通过旋转运动将电能转换成机械功的旋转机械是最常见的机电能量转换装置。一个简单的旋转机电能量转换装置的例子如图 3.5 所示，尺寸为 $D \times L$ 的矩形铜线圈 ABCD 在均匀外部磁场 B 中绕水平轴线顺时针旋转。线圈位置用角度 θ_m 衡量，其旋转的角速度 $\Omega_m = d\theta_m/dt$(rad/s)。

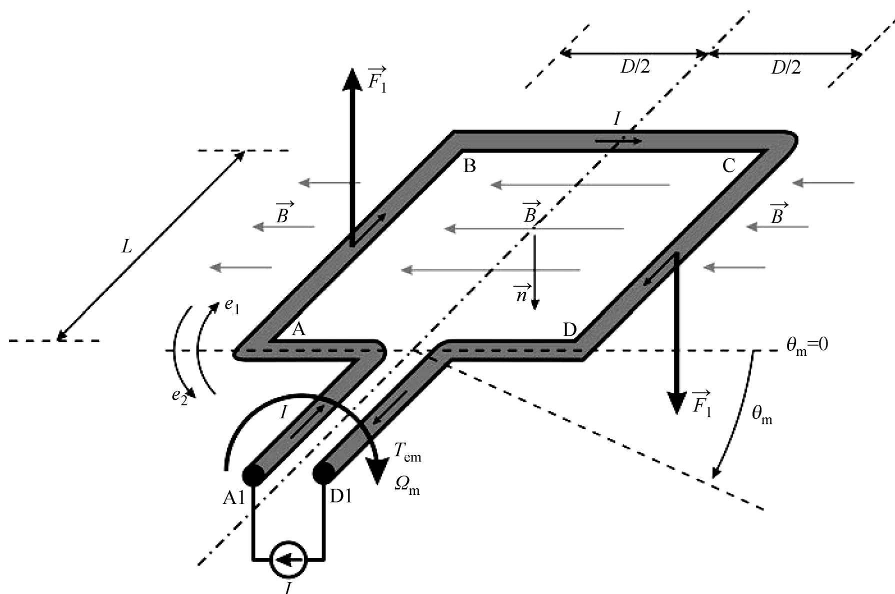


图 3.5　一个磁耦合场的旋转机电变换器

指定矩形线圈所围成的平面 $S = D \times L$ 与磁力线平行时线圈所在的位置为 $\theta_m = 0$。线圈端子与电源连接，线圈中流过电流 I。

线圈在 $\theta_m = 0$ 位置处，电磁力 F_1 作用在导电线圈中与磁力线正交且长度为 L 的 AB 边和 CD 边上，所以电场力的表达式为 $F_1 = LIB$。由于与磁力线共线，导电线圈中长度为 D 的横向边 BC 和 DA 上不受电场力作用。在电磁力作用下线圈旋转到 $\theta_m = \pi/2$ 位置处，两个共线的大小相等且方向相反的电场力作用在横向边 BC 和 DA，所以作用效果相互抵消。

图 3.5 中 AB 边和 CD 边上所受电磁力产生的电磁转矩为 $T_{em} = DF_1$。假定线圈旋转的角速度 $\Omega_m = d\theta_m/dt$，则在 ($t = 0, \theta_m = 0$) 时产生的瞬时机械功率 $P_{meh} = T_{em}\Omega_m = DLIB\Omega_m$。$P_{meh}$ 是机电转换装置的输出功率，其由电源所提供的电能转化而来。

对比电源所提供的电功率和转换装置所输出的机械功率是非常有益的。连接恒定电流源 I 的线圈端子 A1 和 D1 间的电压为 $u = v_{A1} - v_{D1}$。电源与线圈 ABCD 相连，所以线圈电压为 $u = RI + d\Phi/dt$，其中 Φ 是穿过线圈所围成的面域 S 的磁通量，R 是线圈的等效

电阻。磁力线以面域 S 的法线 $\boldsymbol{n}$ 的正方向为参考方向。以线圈 ABCD 中流过的电流所感应的磁场的磁力线方向作为面域 S 的法线 $\boldsymbol{n}$ 的正方向。在图 3.5 和图 3.6 中，以矢量 $\boldsymbol{n}$ 标记面域 S 的法线。线圈绕水平轴旋转，所以穿过面域 S 的磁通量取决于磁通密度矢量和线圈所在平面之间的夹角 θ_m。

根据图 3.6 中所示，记线圈所围成的平面 S 与磁力线平行时的位置 θ_m 为 0。在 0 位置处，磁通量 Φ 为 0。当线圈转过 θ_m 角度时，平面 S 的法线由 n 变化到 n_1。假定外部磁场是均匀磁场，则磁通量 Φ 的表达式为 $\Phi(\theta_m)=\Phi_m\sin(\theta_m)=\Phi_m\sin(\Omega_m t)$，其中是最大磁通量 $\Phi_m=BS$，其对应位置角为 $\theta_m=\pi/2$。利用磁通量的关系式，计算线圈两端的电压，$u=RI+\Omega_m\Phi_m\cos(\Omega_m t)$。在 $\theta_m=0$ 位置处，电流源 I 所输出的电功率可由式 (3.17) 计算。

$$P_i=uI=RI^2+I\Omega_m\Phi_m=RI^2+I\Omega_m BS=RI^2+DLIB\Omega_m=P_{meh}+RI^2 \tag{3.17}$$

可见，电流源 I 所输出的电功率中的一部分转化成了机械功率，而其他部分则由于焦耳效应转化成热损耗。

在 $\theta_m=0$ 位置处，作用在线圈上的电磁转矩 $T_{em}=\Phi_m I=P_{meh}/\Omega_m$。从图 3.6 可见，当线圈转过 θ_m 角度时电磁力的力臂 $K=(D/2)\cos\theta_m$。所以电磁转矩所位置角 θ_m 变化的关系式如式 (3.18) 所示。

$$T_{em}=\Phi_m I\cos\theta_m \tag{3.18}$$

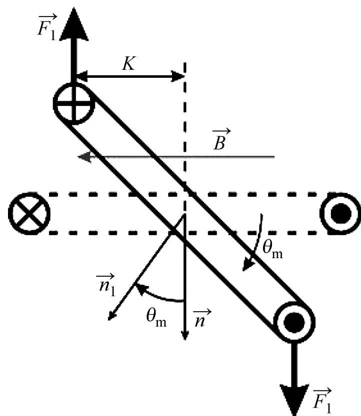


图 3.6 旋转电路中的磁通和电动势变化

所有旋转电机的电磁转矩方程均与式 (3.18) 相似。分析图 3.5 所示的转换装置的运行过程可以得到该装置完整旋转一周其所输出的平均电磁转矩为零的结论。通过加入其他线圈或者改变电源供电可以改变以上结论，当然整个运行过程也更复杂。

通过改变电流流向或者旋转方向可以使图 3.5 所示的装置工作于发电机状态，实现机械功向电能的转化。外接电流源的端电压和电流也将改变符号，电流源工作于吸收电能的状态。

3.2.3 反电动势[⊖]

图 3.5 中标识的箭头 e_1 和 e_2 是线圈中感应电动势的两个可能的参考方向。参考方向的选择决定了反电动势的符号和等效电路的连接。所以针对两种情况分别给出相应的

⊖ 英文中的 Back electromotive force（BEMF），counter-electromotive force（CEMF），中文都叫做反电动势。反电动势的方向是阻止产生它的电流的变化的方向。BEMF 是由磁场变化引起，由楞次定律描述。电动势和反电势的差异仅仅是参考方向不同，也就是符号不同。

表达式和对应的说明是有必要的。

图 3. 7 给出了线圈转动时从端子 A1 和 D1 看进去与恒定电流源连接的等效电路图。字母 Φ 是穿过线圈所围成的面域 S 的磁通量，以面域 S 的法线 $\boldsymbol{n}$ 的正方向作为参考方向，如图 3. 5 和图 3. 6 所示。

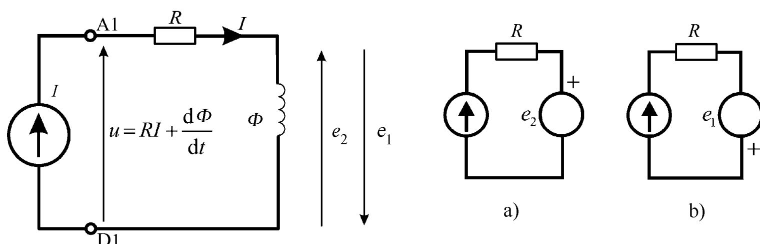


图 3. 7　电动势和反电势参考方向的定义

以线圈 ABCD 中流过的由电流源 I 作用的电流所感应的磁场的磁力线方向作为面域 S 的法线 $\boldsymbol{n}$ 的正方向。磁通量 Φ 的大小取决于位置角 θ_m。按图 3. 5 所示的方向旋转线圈，穿过面域 S 的外磁场的磁通量将增加。

穿过面域 S 的全部磁通量取决于外磁场的磁通密度 B 和线圈中的电流。也即是说，线圈中的电流所产生的磁通量是总磁通量的一部分。总磁通量可以表示为 $\Phi = LI + \Phi_m \sin(\theta_m)$。系数 L 是外磁场不存在时磁通量 Φ 与电流 I 的比率，$L = \Phi(I)/I$，又称为线圈的自感系数。

磁通量 Φ 的每一次变化都将在线圈中感应出反电势。反电动势取决于磁通量的一阶微分。在反电动势作用下线圈中形成电流。电流的大小取决于电路中的等效电阻。在图 3. 7 所示的情况下，线圈与恒定电流源连接。恒定电流源的等效电阻 $R_{eq} = \infty$，从而反电动势 e_1 在电路中不引起电流的任何改变。当线圈端子 A1 和 D1 直接短接或者外接电压源或者外接等效电阻有限的元件时，则反电动势 e_1 将在电路中引起电流和磁通量发生变化。

根据楞次定律，反电动势是由于磁通量的变化引起的。出现电流是反电动势作用的结果。感应电流与磁场变化的方向相反，趋向于维持磁通量不变。

线圈中的电流产生的磁场和磁通量正比于线圈的自感系数。自感应磁通量的方向与原磁通量的方向相反。因此，感应电动势产生的电流和自感应磁通量趋向于阻碍原磁通量的改变。正是这个原因，感应电动势又称为反电动势。

在如图 3. 5 中线圈按照图中标识的方向旋转时，穿过线圈所在面域 S 的外磁场磁通量增加，则在线圈中形成的电动势 e_1 如式（3. 19）所示。

$$e_1 = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{3.19}$$

外磁场磁通量增加，线圈中的感应电动势 $e_1 < 0$，其将在线圈 ABCD 中产生一个与电路中的电流方向相反的感应电流。因此由线圈中的感应电流产生的感应磁场和磁通量

与法线 $\boldsymbol{n}$ 方向相反。总磁通量等于正在增加的外磁场磁通量和符号为负的感应磁场的磁通量之和。

感应磁场对磁通量变化的阻碍强度取决于电路参数。当等效电路的电阻 $R_{eq}=\infty$ 时，感应电动势将不能产生任何对磁通量变化起阻碍作用的电流。当等效电路的电阻为 0（$R_{eq}=0$，超导线圈短接）时，线圈的电磁感应现象将阻止磁通量的任何变化。所以，电压平衡方程如式（3.20）。

$$u=Ri-e_1=Ri+\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{3.20}$$

在 $u=0$ 且 $R=0$ 的条件下，$\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t=0$，磁通量不发生变化。所以，在直接短接的超导线圈中不管外磁场怎样变化，穿过线圈的磁通量始终维持常值不变。

如图 3.5 中线圈外接恒定电流源时的等效电路如图 3.7 所示。从图 3.5 和图 3.7 可见，感应电动势的参考方向可以是箭头 e_1 或 e_2。如果选择 e_1 作为参考方向，等效电路如图 3.7b 所示，电动势的计算式如式（3.19）；如果选择 e_2 作为参考方向，等效电路如图 3.7a 所示，电动势的计算式如式（3.21）。$e_2=+\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ 被称为反电势。

$$e_2=-e_1=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{3.21}$$

第 4 章　磁　　路

本章介绍和讲解了电机的磁路。磁路分析所需要的基本准则和技巧在一些已经解决的问题和例子中得到了阐释。一些术语如磁阻、磁力、铁心磁通和绕组磁通等被提及和应用。双回电路得到了介绍和解释，并被应用到解决磁路问题中。铁磁材料的基本性质被提及，其中包括饱和现象，涡流损耗和磁滞损耗。作为降低铁耗的方法，对迭片磁路进行了说明和分析。

基于磁场的机电转换器的一个关键的操作原则是产生作用在磁场中的载流导体的洛仑兹力。磁场可以从一个永久磁铁或者电磁铁中产生。电磁铁是一个载流绕组系统，并且产生磁场。它通过线圈携带相对较小的电流来代替永磁铁。为了使电磁铁的电流适中，有必要采用由铁磁材料制成的磁路，类似于铜导体传导电流一样来运输磁通。类似于铜导体为电流提供了一个低电阻路径，磁路也为磁通提供了一个低磁抗路径。图 4.1 展示了一个关于磁路的例子。

图 4.1 所示的磁路由铁和一种铁磁材料组成，其磁导率为 $\mu = B/H$，比真空磁导率（μ_0）高几个数量级。该磁路有一个尺寸为 δ 的空气间隙。在这个气隙中，可以放置一个载流导体来得到洛仑兹力，并且实现电磁能量转换（该导体在图中没有显示）。磁路中的磁通是由具有 N 条串联的封闭曲线的励磁绕组产生的，也被称为匝数。每匝线圈都包围着磁路。假设没有损耗，磁场线也是平行的，可以得出结论，铁中的磁感应强度（B_{Fe}）和空气中的磁感应强度（B_0）是相等的。

铁心中磁场的强度是 $H_{Fe} = B_{Fe}/\mu_{Fe}$，然而在气隙中，它等于 $H_0 = B_0/\mu_0$。由于铁心的磁导率高一些，所以铁心中的场强会比气隙中的场强小很多。由安培定律 $Ni = H_0\delta$ 可知，为了得到气隙中的磁场 H_0，所需电流大小为 $i = H_0\delta/N$。

为了获得气隙中的磁感应强度 B，需要在励磁绕组中建立大小为 $i = B\delta/(N\mu_0)$ 的电流。因此，所需的励磁电流正比于气隙 δ。尝试将磁路中的铁心部分移除，可以表示为将气隙从 δ 增加到 $\delta + l_{Fe}$，其中 l_{Fe}为磁路中铁心部分的长度。所需的电流将增加 $1 + l_{Fe}/\delta$ 倍。因为 $l_{Fe} \gg \delta$，所以铁心的移除将导致励磁电流的激增以及相关的损耗。因此可以得出结论，磁路是电机关键的一部分。它引导磁场集中在导体移动和电磁转换发生的区域。铁心磁路的存在有助于用更小的电流和更低的损耗来产生所需的励磁。

在前面的部分，我们已经完成了一个简单磁路的分析。在分析过程中，我们做出了某些简化。为了分析更复杂的磁路，我们将在下一节中介绍一系列有助于简化分析的基本准则和常用的近似值。

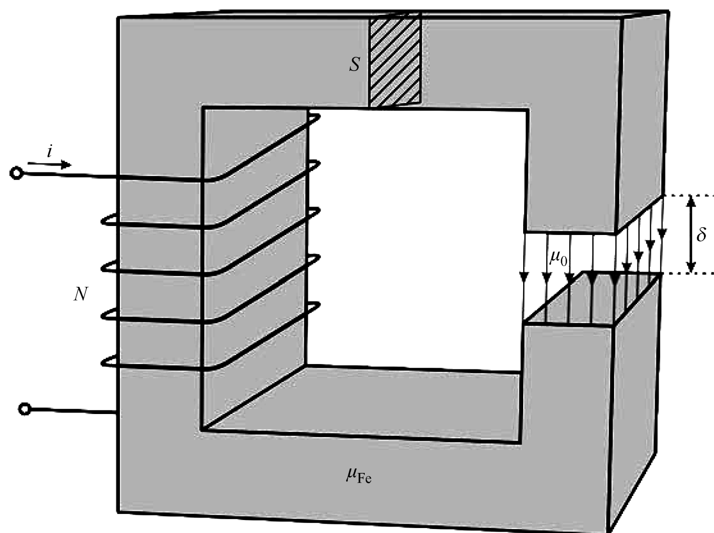


图 4.1 由铁心和气隙组成的磁路

4.1 磁路的分析

磁路是一个通过一个或几个电流电路或者永磁铁产生磁场的区域。下面是一些适用于磁路分析的准则：

1）磁通连续原理；

2）安培环路定律；

3）用于描述磁性材料的基本关系 $B(H)$。

4.1.1 磁通守恒定律

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{4.1}$$

在考虑产生磁路的铁磁材料的铁磁特性时，一系列的简化可以方便对它们的分析。其中一个假设是磁路外面没有磁力线泄漏。忽略漏磁，会发现磁路中的磁通保持不变。换句话说，磁路每一个横截面上的磁通都是相同的。每一个横截面的磁通也被称为铁心磁通或者单匝线圈磁通，也即环绕磁路的每一匝独立线圈的磁通。横截面磁通的代数值是按照垂直于横截面表面的磁感线界定的，用 ϕ 来表示。大多数情况下，磁路是被 N 匝有方向的线圈串联环绕的。假设磁路中没有漏磁，则每匝线圈的磁通都为 ϕ。因此整个绕组的磁链为 $\psi = N\phi$，与每一匝线圈中的参考方向相同。

线圈通过电路连接而成。通过绕组的电压等于 $u = Ri + \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$，其中 R 是串联线圈的电阻，i 是线圈电流，$\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ 是反电动势。将电路（电流）的基准方向与磁路（磁通）的方向进行匹配是至关重要的。一般来说，磁通的参考法线是由电流的参考方向根据右手定则确定的。

通过应用磁通连续原理，可以证明一个封闭曲线（线圈）中的磁通等于通过其他任何一个紧挨着该封闭曲线表面的磁通。这个等式将用来简化圆筒形电机绕组磁通的计算。

我们常用的假设是每一个磁路横截面上的磁场是均匀的，并且每一条磁场线的长度都等于该磁路的平均的典型磁场线的长度。

4.1.2　安培环路定律

公式（4.2）给出的是有固定电流的场的安培环路定律，封闭曲线 c 和表面积 S 如图 4.2 中所示：

$$\oint_c \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{4.2}$$

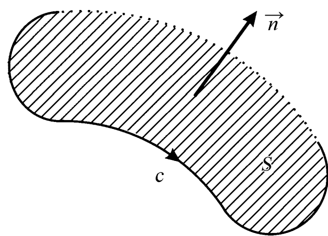


图 4.2　封闭曲线 c 包围的表面 S 的参考法线 n

电机中的电流不是分布在空间中，而是存在于形成线圈电流回路的导体中。导体通常是由铜导线制成的。导线都被一层绝缘材料包裹着，使它们与其他部分没有电接触。因此，电流是沿着导线流动而没有泄漏的。因此，我们应该使用穿过曲面 S 的导体中的电流总和，而不是电流密度 J 的面积积分，并且相关的参考方向是由单位适量决定的。所以，式（4.2）改为式（4.3）的形式

$$\oint_c \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I \tag{4.3}$$

4.1.3　磁场强度 *H* 和磁感应强度 *B* 的基本关系

磁场强度 ***H*** 的矢量和磁路中各个单独部分的磁感应强度 ***B*** 的关系是由磁性材料的性质决定的，在公式（4.4）给出

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H}) \tag{4.4}$$

在线性媒介中，磁感应强度 ***B*** 正比于磁场强度 ***H***。比例系数是一个标量 μ，称为磁导率。真空中的磁导率是 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$。在像铁这样的铁磁材料中，$B(H)$ 的特征是非线性的。它的特征通常以图形形式呈现或者取相应的解析近似值，称为磁化特性。对于场强比较小的磁场，铁的磁化特性 $B(H)$ 是线性的，并且斜率为 $\Delta B/\Delta H$，该值比真空磁导率 μ_0 高几千倍。

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{4.5}$$

4.2 磁链矢量

图 4.2 中通过封闭曲线的磁通是一个标量。穿过紧挨着封闭曲线 c 的面积 S 的磁通，是由磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的矢量的面积积分决定的。在电机的分析过程中，通过一个封闭曲线的磁通通常被看成是一个矢量。磁通矢量是通过将路径、方向和标量 Φ 联系在一起得到的。空间方向是由面积 S 的单位法线得到的。在以几个封闭曲线（线圈）形成绕组并且所有的封闭曲线有相同的方向的情况下，则有可能定义绕组的磁链矢量。磁链的代数强度为 $\psi = N\Phi$，然而它的路径和方向是由垂直于表面 S 的单位法线决定的。绕组可以由具有不同空间方向的封闭曲线（线圈）串联而成。在这种情况下，绕组磁链的矢量是由每一个封闭曲线的磁通矢量求和得到的。

4.3 铁磁材料的磁化特性

电机和变压器的磁路大部分是由铁片构成的。铁片作为一种铁磁材料，其磁化特性 $B(H)$ 如图 4.3 所示。特性在两条直线之间延伸。斜率为 $\Delta B/\Delta H = \mu_0$ 的直线描绘了真空的磁化特性，而斜率为 μ_{Fe} 的直线对应于函数 $B(H)$ 在原点处的一阶导数。B-H 坐标系的横坐标是外部磁场 H，是通过在励磁绕组中建立一个电流得到的，而纵坐标是存在于铁磁材料中的磁感应强度 B。

铁的磁特性起源于分子内部或者分子团内部的微观安培电流。这些电流是永磁体或者其他磁性材料的磁场的起源。上述电流是磁场中铁磁材料产生力的原因所在。微观电流的出现，可以通过将铁磁材料看成一个微型磁偶极子的巨大集合，如图 4.3 所示。不存在外部磁场 H 时，磁偶极子不具有相同的方向。它们根据材料的温度以一定的速度振荡和改变方向。因此，外部磁场的缺失，导致了材料内部磁感应强度为零。

当有磁场 H 产生励磁电流时，磁偶极子转动起来试图与磁场对齐。偶极子的热运动妨碍了它们保持一致，并使它们改变了方向。场强 H 越高，就有越多的偶极子与磁场保持一致。结果导致了磁感应强度的值为 $B = \mu_{\mathrm{Fe}}H$，远远地高于真空中对应的值($B = \mu_0 H$)。通过这种方式，铁磁材料有助于提供所需的磁感应强度而只需要很小的励磁电流。

当磁感应强度达到 $B \in [1...2]T$ 时，所有的微型偶极子获得相同的方向，与励磁磁场 H 对齐。后来任何磁感应强度的进一步增加都不能改进偶极子的方向，因为没有更多方向混乱的偶极子了。这种状态成为磁性材料的饱和。在饱和区域中，磁感应强度的增加与它在真空中的增加是相同的，$\Delta B = \mu_0 \Delta H$。饱和区域如图 4.3 中右边的曲线所示。

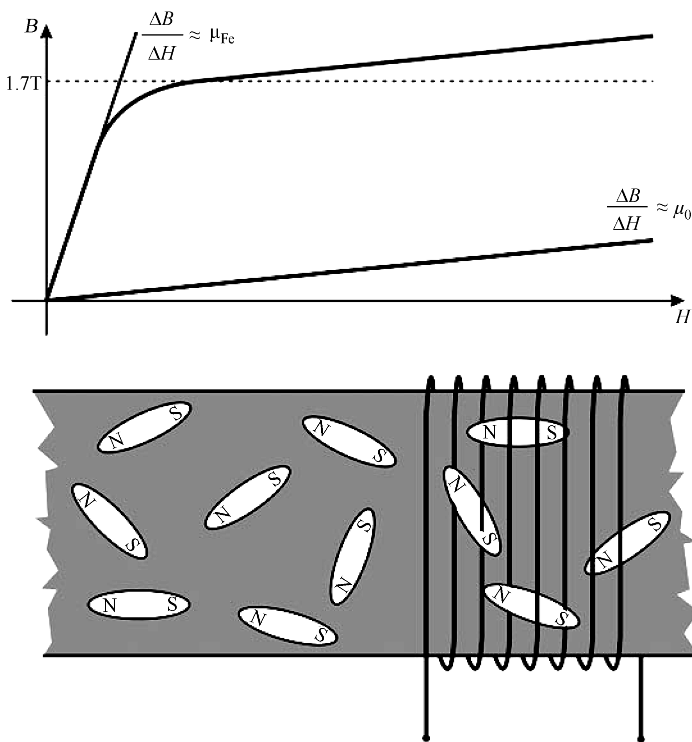


图 4.3　铁磁材料的磁化特性

4.4　磁路中的磁阻

电机中磁路的作用是引导磁耦合场中的磁感线到发生电磁转换的空间。在绕组中电流的作用下，磁路中将出现磁感应强度和磁通量 Φ。磁场强度 H 取决于 Ni 的乘积，其中 N 是绕组线圈的匝数，i 是电流。这样，Ni 的值可以在磁路中建立磁通 Φ。因此，Ni/Φ 的比值是该电路的磁阻。电路磁阻越小，它所需要的产生给定磁通的电流就越小。磁路有几个部分，可以由铁磁材料、永磁体、非磁性材料或者空气等构成。磁路中空气填充的部分也被称为气隙。它对决定由几个不同成分的部分组成的磁路的磁阻有重要作用。

磁路的铁磁材料的磁化特性是非线性的，如图 4.3 所示。磁路的运算通常在$B(H)$图的原点附近进行。因此，将磁化特性线性化以及将铁磁材料（铁）磁导率看成一个常数是合理的。在线性化的铁磁磁路中，铁磁材料的非线性忽略不计，磁路每一部分的磁导率都看成是常数。此外，假设磁路外面不存在磁场泄漏。线性磁路分析中所用到的基本假设和步骤是基于以下考虑给出的。

在式（4.3）的基础上，如图 4.4 所示的，沿着封闭曲线 c 的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的线积分，与 Ni 的乘积相等。磁力 $F=Ni$ 与穿过闭合曲线以及磁路所有部分的场强 $\boldsymbol{H}$ 的积分相等。磁力 $\boldsymbol{F}$ 是一个标量。将标量 $F=Ni$ 进行空间定向，就得到了磁力 $\boldsymbol{F}$ 的矢量。磁力 $\boldsymbol{F}$ 的方向是由矢量 $\boldsymbol{H}$ 决定的。$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的方向都与环绕在磁路周围的绕组中的电流有关。在图 4.4 中，磁力 $\boldsymbol{F}$ 的矢量与法线 n_k 是共线的，n_k 是由电流的参考方向依据右手定则确定的。

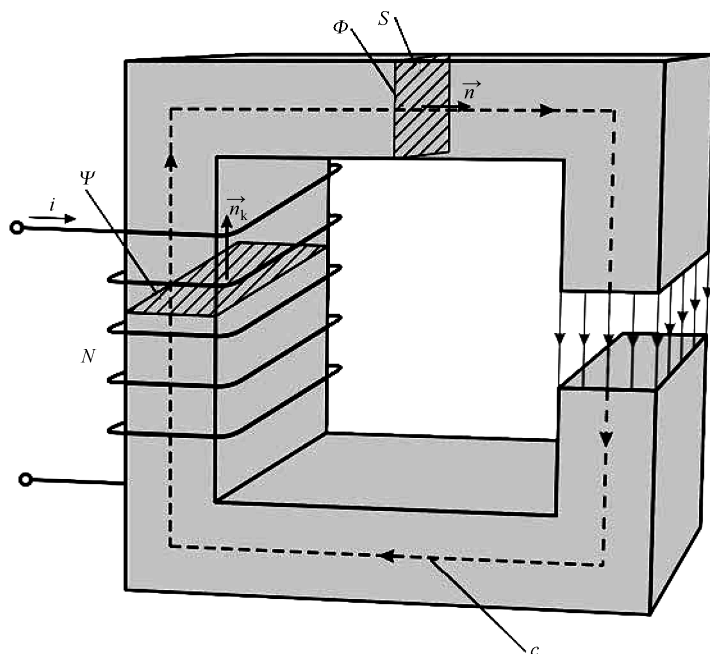


图 4.4　具有铁心横截面、铁心磁通、绕组磁通和典型的平均磁感线的磁路实例。磁路有一个大的铁心，它的右手边有一个小的气隙

磁感应强度在曲面 S 上的积分用 Φ 来表示，被称为铁心磁通或者穿过磁路横截面的磁通或者单匝线圈磁通。假设磁路外没有磁场的泄漏，对穿过磁路的每一条封闭曲线，沿着该曲线的场强 H 的线积分都等于 Ni。由于基本假设是磁力线的长度与典型磁感线的平均长度是相等的，可以认为磁路的每个横截面的磁场都是均匀的。因此，单匝线圈的磁通为 $\Phi=BS$，绕组磁通 $\psi=N\Phi$ 代表穿过 N 匝线圈的磁通。

穿过磁路每一个横截面的磁通量是常数。因为 $S=S_0=S_{\mathrm{Fe}}$，$SB_{\mathrm{Fe}}=SB_0$ 成立。因此，$B_{\mathrm{Fe}}=B_0$，其中 B_0 是气隙中的磁感应强度，而 B_{Fe} 是铁磁材料（铁）中的磁感应强度。气隙中的磁场是 $H_0=B_0/\mu_0$，铁磁材料中的磁场为 $H_{\mathrm{Fe}}=B_{\mathrm{Fe}}/\mu_{\mathrm{Fe}}$。由安培环路定律得到公式（4.6），其中 l 是铁磁电路的平均长度，l_0 是气隙长度。

$$H_{\mathrm{Fe}}l+H_0l_0=Ni \tag{4.6}$$

在式（4.6）中代入 $H_0=B_0/\mu_0$，$H_{Fe}=B_{Fe}/\mu_{Fe}=B_0/\mu_{Fe}$，可以得到式（4.7），其中令 $B_{Fe}=B_0$。

$$\frac{B_0}{\mu_{Fe}}l+\frac{B_0}{\mu_0}l_0=Ni=F \tag{4.7}$$

因为铁心磁通为 $\Phi=BS$，它和磁力的关系可以表示为式（4.8）：

$$\Phi=\frac{Ni}{\frac{l}{\mu_{Fe}S}+\frac{l_0}{\mu_0 S}}=\frac{F}{\frac{l}{\mu_{Fe}S}+\frac{l_0}{\mu_0 S}}=\frac{F}{R_\mu} \tag{4.8}$$

一种双回电路可以与磁路关联，如图4.5所示。在这个电路中，电动势 E 可以在电阻 R 中产生电流 $i=E/R$。电动势 E 与发电机中外部电场的积分相等。在磁路中，磁力 F 产生磁通 $\Phi=F/R_\mu$。磁路中磁通 Φ 与磁阻 R_μ 的关系就像电路中电流 $i=E/R$ 和电阻 R 的关系。出于这个原因，电路也是磁路的等效表示，因此被称为双回路。更详细的分析可以证明基尔霍夫法可以适用于复杂的磁路中，就像在电路中的应用一样。

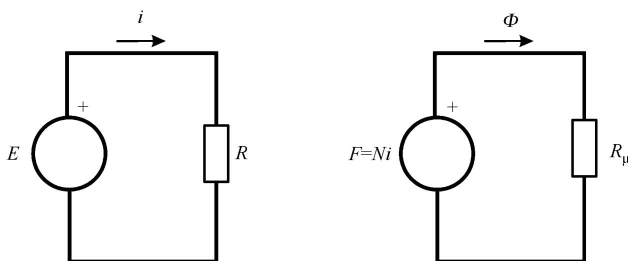


图4.5　磁路由等效电路的表示

磁力 F 被看作闭合曲线 c 的磁动势。通过与电流公式 $i=E/R$ 对比，得出磁路中的磁通为 $\Phi=F/R_\mu$，其中 R_μ 是磁路的电阻或者磁阻。因此，磁路的磁通可以由磁力 Ni 除以磁阻 R_μ 得到。这应用在线性磁路中，即有定值磁导率 μ，忽略磁漏，整个磁路的铁心磁通也是常数。最后一个条件源于磁通守恒定律。磁路中的参数 Φ，F，R_μ 与等效电路中的参数 i，U 和 R 相对应。公式（4.8）表示磁路中的“欧姆定律”或者霍普金斯定律。

一个长度为 l、横截面积为 S、磁导率为 μ 的均匀磁场的磁阻与 $R_\mu=l/(S\mu)$ 相等。磁路可以包括几个不同尺寸、不同磁性质的部分。磁路的各部分通常是串联连接。磁路的等效磁阻可以通过将串联各部分各自的磁阻相加得到。对于一个有 n 个部分的磁路，等效磁阻可以通过将各个磁阻相加得到 $R_{\mu k}=l_k/(S_k\mu_k)$，如式（4.9）所示：

$$R_\mu=\sum_{k=1}^{n}\frac{l_k}{\mu_k S_k} \tag{4.9}$$

公式（4.9）假设同一部分的磁导率 μ 不变，所有部分的单位横截面积上有相同的磁通，各个部分内部的磁感线的长度与本部分的平均长度相等。在横截面 S 和磁导率 μ 沿着磁路连续变化的情况下，磁阻由公式（4.10）决定，其中 c 取磁路中典型的平均磁

感线的方向。横截面 $S(x)$ 和磁导率 $\mu(x)$ 是变量 x 的函数，表示沿着闭合曲线的环路通道，也即沿着平均磁感线的路径。考虑磁路中一个很小的部分，长度为 Δx，横截面 $S(x)$，磁导率 $\mu(x)$，假设 $S(x)\approx S(x+\Delta x)$，$\mu(x)=\mu(x+\Delta x)$，该假设是合理的。因此磁路该部分的磁阻 ΔR_{μ} 等于 $\Delta x/(S\mu)$。磁路的等效磁阻由各个部分的磁阻相加得到，从而得到（4.10）的积分。公式（4.10）与计算具有可变横截面 $S(x)$ 和可变电抗 $\sigma(x)$ 的电阻器的公式一致

$$R_{\mu}=\oint_{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mu(x)S(x)} \tag{4.10}$$

磁阻可以用来确定环绕在磁路周围的 N 匝线圈绕组的自感。绕组的电感等于绕组中的磁链 $\psi=N\Phi$ 与绕组中电流的比值。在式（4.11）的基础上，绕组的电感等于线圈匝数的二次方与磁抗的比值。

$$L=\frac{\Psi}{i}=\frac{N\Phi}{i}=\frac{N}{i}\frac{Ni}{R_{\mu}}=\frac{N^2}{R_{\mu}}=\frac{N^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{l_{\mathrm{i}}}{\mu_{\mathrm{i}}S_{\mathrm{i}}}} \tag{4.11}$$

4.5　磁路中的能量

磁场能量是由磁场存在的区域内的空间能量密度 w_{m} 的集成决定的。在线性铁磁材料和空气中，磁能的空间密度是 $BH/2$。在磁路没有泄漏的情况下，仅在磁路内部有磁场。因此，公式（4.12）中采用的集成空间 V 被限制在磁路范围内。

$$W_{\mathrm{e}}=\int_{V}w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=\int_{V}\left(\int\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{B}\right)\mathrm{d}V=\int_{V}\left(\frac{1}{2}BH\right)\mathrm{d}V \tag{4.12}$$

磁路可以被分解为基本的体积，$\mathrm{d}V=S\mathrm{d}l$，其中 S 是磁路的横截面积，$\mathrm{d}l$ 是基本体积单位的长度，并沿着典型的平均磁感线（闭合曲线 c）进行测量。根据磁通连续原理，磁路中每个横截面穿过的磁通都是相等的。因此，磁感应强度 B 的面积积分与磁路每个横截面的磁通 Φ 相等。一个通常且有理有据的假设是磁场在每个横截面处都是均匀的，即穿过横截面的磁感应强度 B 不变。因此，可以推断出每个横截面 S 处的磁感应强度 B 是 Φ/S。由于 $\mathrm{d}V=S\mathrm{d}l$，公式（4.12）中的积分可以通过将 $w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V$ 代替为 $1/2\Phi H\mathrm{d}l$ 得到简化。矢量 $\boldsymbol{H}$ 与 $\mathrm{d}l$ 是共线的。因此，这两个矢量的标量积可以用它们代数强度的乘积所代替。

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\int_{V}(BH)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}}\mathrm{d}S\oint_{c}BH\mathrm{d}l=\frac{\Phi}{2}\oint_{c}H\mathrm{d}l=\frac{\Phi}{2}\oint_{c}\vec{H}\,\mathrm{d}\,\vec{l} \tag{4.13}$$

根据安培定律，沿着代表磁路平均线的闭合曲线 c 的场强 $\boldsymbol{H}$ 线积分等于 Ni。因此，磁场能量的表达式为（4.14）的形式。需要指出的是，公式（4.14）的结论不能应用在非线性磁感材料的磁路中：

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{\Phi}{2}\oint_{c}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\,\vec{l}=\frac{\Phi}{2}Ni=\frac{\psi i}{2}=\frac{1}{2}Li^2 \tag{4.14}$$

问题（4.1）：图4.4 所示的磁路是由磁导率可视为无穷大的铁磁材料构成的。求绕组的自感。

解答（4.1）：假设 μ 无穷大，磁路的磁阻为 $R_{\mu} = l_0/(S\mu_0)$。绕组的电感为$L = \mu_0 SN^2/l_0$。

4.6　磁路的参考方向

围绕着铁心，磁路可能有不止一个绕组。图 4.6 显示了一个具有两个绕组 N_1 和 N_2 的磁路。绕组磁链产生于每一个绕组。两个绕组被磁路耦合。因此，每个绕组的磁链取决于两个电流，i_1 和 i_2。绕组磁链的参考方向是根据右手定则由相关绕组中电流的参考方向决定的。图 4.6 中，磁链 ψ_1 的参考方向由单位矢量 n_1 来表示。该方向与选定的封闭曲线 c 的环路方向一致。表示这个方向的单位矢量是法线 n。选取的方向称为磁路的参考方向。磁链强度是由铁心磁通和线圈匝数的乘积决定的，所以有 $\psi_1 = N_1\Phi$。另一个绕组中的磁链 ψ_2 的参考方向是由单位矢量 n_2 表示的，它与选取的方向相反。由于铁心磁链 Φ 被定义为沿着单位矢量 n 的方向穿过横截面 S 的磁通，第二个绕组的磁链是负的，$\psi_2 = -N_2\Phi$。磁路参考方向的选取是随意的；因此在分析有几个绕组的电路时，每个绕组都应该根据右手定则分配参考方向并且与磁路的参考方向进行比较。

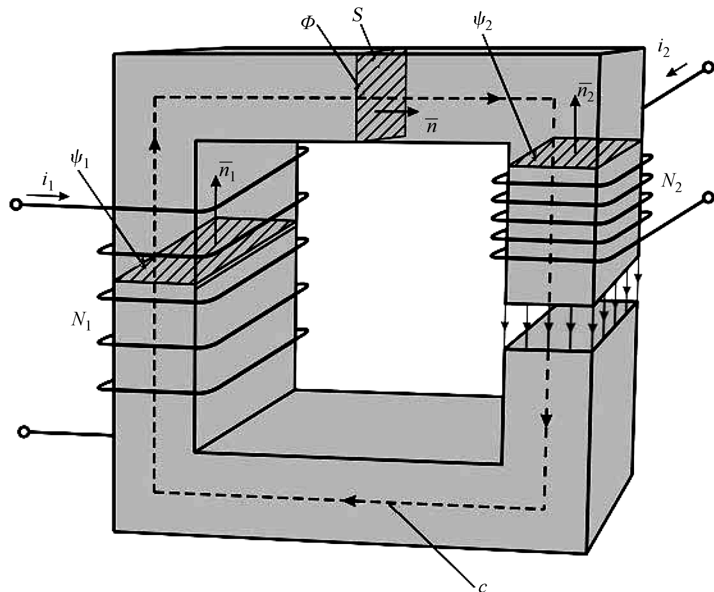


图 4.6　同一铁心中的双耦合绕组

在假设磁场没有泄漏，也就是说，穿过横截面的磁通保持不变的情况下，我们可以

得到 $\psi_1 = N_1\Phi$ 与 $\psi_2 = -N_2\Phi$ 的关系。当没有漏磁时，绕组 N_1 线圈中的磁链和绕组 N_2 线圈中的磁链是相等的。因此，ψ_1/ψ_2 的比值等于线圈匝数的比值 N_1/N_2。这同样适用于绕组中感应电动势比值 e_1/e_2。在真实的磁路中，一定量的磁链从磁路中泄漏。绕组 N_1 中的磁链在到达绕组 N_2 之前会有一小部分从铁心处泄漏。这部分磁链被称为一次绕组的杂散磁链或者漏磁链。以同样的方式，二次绕组 N_2 的漏磁环绕着绕组 N_2，但它在到达绕组 N_1 之前将有一小部分从铁心泄漏。当漏磁不能忽略时，ψ_1/ψ_2 的比值将不等于线圈匝数的比值 N_1/N_2。两组绕组之间磁偶合的强度通过电感耦合系数 $k \leqslant 1$ 来描述。在没有漏磁时，耦合系数等于 1。当 $k = 0.9$ 时，漏磁相对量为 10%。

4.7 磁路中的损耗

机电转换器的场中积蓄的能量呈现出周期性的变化。因此，磁路中的磁感应强度也成周期性变化。在交流电机和变压器中，磁感应强度具有正弦变化。磁感应强度 B 在铁磁材料中的变化引起了能量损失。这些可以分为涡流损耗和磁滞损耗。每单位质量损失的功率也被称为比功率或者损失功率密度。

4.7.1 磁滞损耗

铁磁材料中磁场的变化意味着设置磁偶极子的运动并且改变它们的方向。磁偶极子的旋转需要一定的能量。这个能量的大小可以从 $B = f(H)$ 的磁滞曲线上估计。当磁感应强度 B 随循环时间（周期）T 振荡时，如图 4.7 所示，$B = f(t)$ 特性上的工作点沿着所谓的磁滞曲线的轨迹运行。一个周期 T 内，偶极子转动所消耗的能量正比于（$B - H$）工作点所掠过的磁滞曲线包围着的表面积。

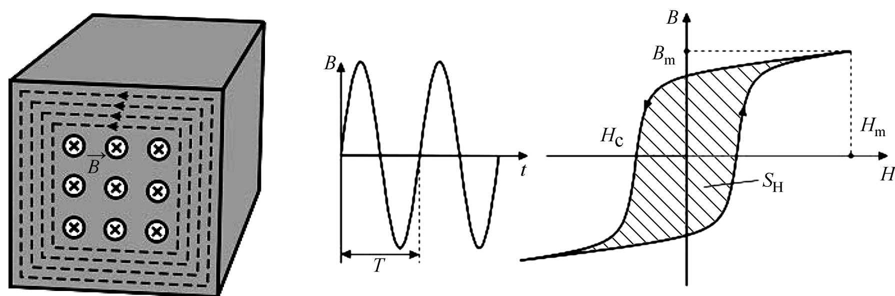


图 4.7　均匀铁块磁路中的涡流（左侧）。一个存在磁滞现象的磁化特性例子（右侧）

磁滞损耗的起源是相邻的偶极子在循环的旋转过程中相互之间的摩擦。这种内部的摩擦导致了能量的消耗，变成了热量。由磁滞 p_H 产生的具体的功率损耗正比于工作频率以及在 $B - H$ 平面上被磁滞曲线包围的面积。体积为 V 的铁磁材料在每一个工作周期内的磁滞能量损耗是

$$W_H = V\oint H\mathrm{d}B = VS_H \tag{4.15}$$

式中，S_H是磁滞曲线包围的面积。当工作频率是f时，磁滞能量损耗是

$$P_H = fV \cdot S_H \tag{4.16}$$

具体的功率损失，也就是说，单位体积的损失是

$$p_{H1} = \frac{P_H}{V} = f\,S_H \tag{4.17}$$

磁滞曲线的表面积S_H取决于曲线的形状，磁场H_m的峰值以及磁感应强度B_m。表面积正比于H_mB_m的乘积。磁场H_m的峰值和磁感应强度B_m相互成比例。因此，表面积S_H也正比于B_m^2。因此，单位体积的损耗可以表示为

$$p_{H1} = \sigma_{H1} f B_m^2 \tag{4.18}$$

通过引入与比例系数σ_{H1}相等的系数σ_H和铁磁材料的具体质量，则每单位质量磁滞损耗的具体值为

$$p_{H1} = \sigma_H f B_m^2 \tag{4.19}$$

4.7.2　涡流损耗

铁磁材料通常都是导电的。由于磁路的一部分是由导电铁磁材料构成的，可以将导电材料想象成一个环形管道，并把它们都看成是可以承载电流的封闭曲线。磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的变化改变着每一个封闭曲线中的磁通量。结果，这些封闭曲线中将感应出电动势，并且产生阻碍磁通变化的电流。每一片铁磁体内都会产生一些导电封闭曲线。因此，磁感应强度的改变产生了空间分布电流，进而在磁路中产生了损耗。这些电流也被称为涡流。与这些电流相关的损耗称为涡流损耗。

图 4.8 展示了一块具有振荡磁感应强度 B 的铁磁材料，其磁感应强度 B 的振幅为 B_m，角频率为 ω。磁感线被封闭曲线 C 环绕，与此同时封闭曲线 C 又是横截面积为 S_c，长度为 l_c管状平均线。因为这个管是在有限电导率的铁磁材料中，它可以用一个等值电阻为 $R_c = l_c/(S_c\sigma)$ 导电封闭线圈来表示。磁感应强度 B 的改变导致了磁通的变化。反过来，磁通的变化又使得封闭曲线中产生了感应电动势。

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-SB_m\sin\omega t) = \omega SB_m\cos\omega t \tag{4.20}$$

其中，S 是图 4.8 中被封闭曲线所包围的表面积。封闭曲线中感应电动势的幅值正比于角频率和磁感应强度 B，因此 $E \propto \omega B_m \propto 2\pi f B_m$。导电封闭线圈中建立的电流正比于电动势，反比于封闭曲线的阻值[㊀]，$I \propto E/R_C \propto 2\pi f\,B_m/R_c$。电路中的功率损耗正比于电阻 R_C和电流 I_C的二次方，如式（4.21）所示

㊀ 参考的封闭曲线有电阻 R_C和自感 L_C。它有一个角速度为的感应电动势 E。封闭曲线中的电流应该由按照封闭曲线阻抗 $Z_C = R_C + \mathrm{j}\omega L_C$划分的电动势来计算。低频时 $R_C \gg \omega L_C$，封闭曲线中的电抗 ωL_C可以忽略。

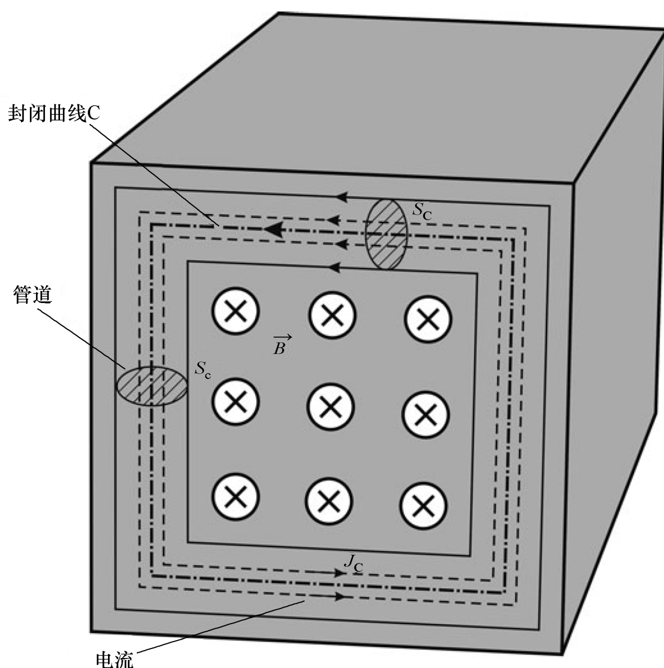


图 4.8 铁块中涡流造成的损耗。该图显示了一个包含空间分布电流流动的管道

$$P_C \propto R_C I_C^2 \propto R_C \left(\frac{\omega B_m}{R_C}\right)^2 \propto \frac{\omega^2 B_m^2}{R_C} \tag{4.21}$$

因此，磁路中总的涡流损耗正比于角速度的二次方和磁感应强度的二次方。涡流损耗的具体值为：

$$p_V = \sigma_V f^2 B_m^2 \tag{4.22}$$

式中，σ_V是比例系数，取决于材料具体的电导率和具体质量。

问题（4.2）：如图 4.8 中所示的磁路的横截面。这些横截面的尺寸为 $L \times L = S$。横截面上且垂直于表面 S 的所有的点处的磁感应强度 B 都是相等的。对分布在距离中心 $L/2$ 处的涡流损耗和分布在距离中心 $L/4$ 处的涡流损耗做个近似的比较。

解答（4.2）：涡流可以通过考虑两个封闭曲线来估计，大的封闭曲线的半径为 $L/2$，小的封闭曲线的半径为 $L/4$。具体的涡流损耗，即每单位体积的损耗，取决于感应电场 E_i的二次方，$P_V \propto \sigma E_i^2$。可以通过将封闭曲线的感应电动势 E 按照封闭曲线的长度来划分，进而来估计感应电场。半径为 $L/2$ 的封闭曲线有 4 倍大的表面积，因此就有 4 倍大的磁通和电动势 E。它的长度是小的封闭曲线的两倍。沿着大的封闭曲线的感应电场 E_i的强度是沿着小的封闭曲线的感应电场的两倍。最终，更加远离中心的那个点的涡流损耗是 4 倍大。

4.7.3　磁路中的总损耗

具体的磁滞损耗和涡流损耗的和在式（4.23）中给出。具体损耗 P_{Fe}用单位 W/kg 来表示。当磁通密度 B 均匀时，磁路中的损耗分布也是均匀的。在这种情况下，质量为 m 的磁路中的总的磁场损耗为 $P_{Fe}=p_{Fe}m$。

$$p_{Fe}=p_H+p_V=\sigma_H f B_m^2+\sigma_V f^2 B_m^2 \tag{4.23}$$

当磁路中的横截面可变或者电路包含不同的材料以及属性的情况下，电路中各个部分的具体损耗 P_{Fe}是不同的。因此，总损耗 P_{Fe}是通过综合磁路体积上的具体损耗决定的。

4.7.4　减少铁耗的方法

机电转换器磁路中的功率损耗降低了它们的效率。此外，这些损耗最终变成了热量，增加了磁路温度。过热可能会导致磁路或者附近的机器上的其他部分的损坏。因此，有必要将这些热量传递到环境中。换句话说，有必要提供合适的冷却方式。降低损耗简化了冷却系统，增加了转换效率，减少了传递到环境中的热量。

在由铁片或其他铁磁材料制成的电机和变压器的磁路中，涡流损耗超过了磁滞损耗。涡流损耗比磁滞损耗大一个数量级。在设计和制造磁路的时候采取额外的措施降低了损耗，从而提升了电机的效率，防止过热。

通过在铁中添加硅其他低电导率的材料来制造磁路，这种合金的电导率降低了。封闭曲线中涡流电阻的增加降低了电流的幅值（见式（4.21）），降低了涡流损耗。

另外一种降低涡流损耗的方法是迭片结构，一个用片状铁磁材料组装磁路的过程。这些片材沿着磁场的方向放置，如图 4.9 所示的方式。叠片磁路不是由实心铁构成的，而是由电气上相互隔离的铁片构成的。

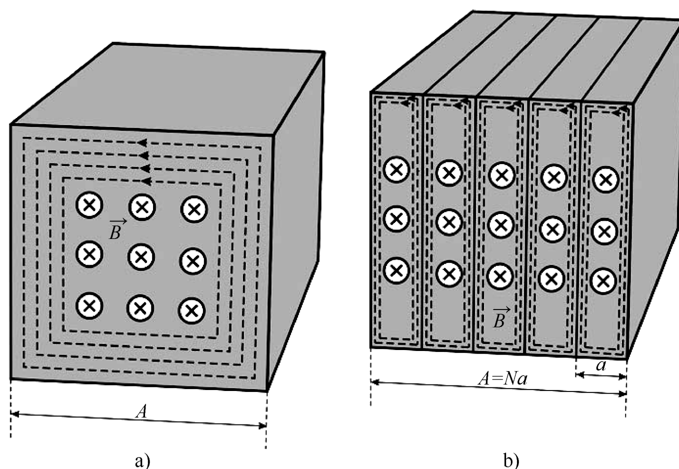


图 4.9　电绝缘材料被放置在磁路各层之间来防止涡流的流动

由于铁片与磁场平行，感应涡流的封闭曲线垂直于磁场。相邻层之间的电气绝缘可以防止涡流；因此，它们只能在单独的层中形成。可以证明，这种方法可以显著降低涡流损耗。

用于设计工频变压器（50Hz 或 60Hz）和常规电机磁路的铁片的厚度为 0.2 ~ 0.5mm。铁片之间的绝缘是通过插入薄层绝缘材料（纸、漆）或者将铁片短时间浸湿在酸中形成一层薄的不导电的铁化合物（盐）制成的。

应用在电动汽车，混合动力汽车和替代能源上的当代电机，工作频率可能会超过 1kHz。这些电机的磁路是由很薄的铁片（0.05 ~ 0.1mm）构成或者由基于铁、锰和其他金属的合金构成，或者铁氧体的无定形带组成。铁氧体是由熔融铁合金暴露在激增的压力之下，通过一个非常小的孔送到喷口处得到的一种材料。在喷嘴处扩大，熔融铁合金被分散为直径 50mm 的小球。这些球的短时间氧化形成了一层薄薄的氧化物。然后，微型球落入冷却油当中。通过收集它们，我们可以得到一粒由绝缘铁磁球构成的细小的粉尘。在压力下（熔结），这个尘埃还会变成一种硬而脆的材料，即所谓的铁氧体。铁氧体的磁性质与铁类似。同时，假设不存在涡流，那么铁氧体中的损耗就会非常低。

4.7.5　叠片结构铁磁材料中的涡流

图 4.10 所示的是从制作磁路的铁磁包中取出的一个铁片。薄片的厚度是 a。磁感应强度 B 是沿着铁片定向的，按照 $B(t) = B_m \sin\omega t$ 变化，其中 B_m 是幅值，ω 是角速度。厚度 a 和薄片的高度 L 比起来很小。在薄片的横截面上，定义一个宽度为 $2x$ 的封闭曲线 C。因为 $x \leqslant a/2$，我们可以假设 $x << l$。在图 4.10 中，封闭曲线 C 的参考方向和磁感应强度的矢量方向相反；因此，通过封闭曲线的磁通是：

$$\Phi = -2xlB_m \sin\omega t$$

封闭曲线中的电磁力是由磁通的一阶导数决定的。它的幅值是由频率和磁感应强度的幅值的乘积决定的。在宽度为 $2x$ 的封闭曲线中

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi}{dt} = 2xl\omega B_m \cos\omega t$$

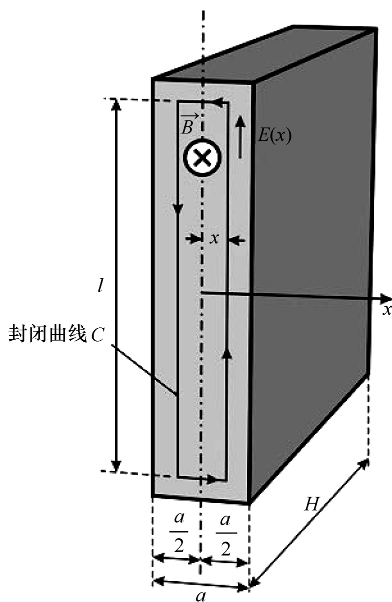


图 4.10　一片叠片结构的磁路中涡流密度的计算

电动势 e 的符号取决于选定的参考方向。该方向在计算反电动势时也会改变。在计算涡流损耗时，参考方向的选择不影响计算的结果。损耗取决于涡流大小的平方，反过来也取决于 e^2。因为 $x << l$，沿着封闭曲线 C 短边的那部分曲线积分可以忽略不计。因此，沿着封闭曲线 C 长边的感应电动势 E 可以由公式（4.24）求得：

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = 2lE(x) = 2xl\omega B_{\mathrm{m}}\cos\omega t,\ |E(x)| = x\omega B_{\mathrm{m}}\cos\omega t \tag{4.24}$$

处于感应电场 E 中的具有特定电导率 σ 的铁磁材料中，空间电流密度为 $J=\sigma E$。在选取的铁片中，电流密度为

$$J(x) = \sigma E(x) = \sigma x\omega B_{\mathrm{m}}\cos\omega t$$

有限电导率的材料中的空间电流引起的损耗也被称为焦耳损耗。这些损耗的具体能量等于电场的代数强度和电流密度的乘积。

$$p_{\mathrm{Fe}}(x) = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \sigma E^2(x) = \frac{J^2(x)}{\sigma} = \sigma(x\omega B_{\mathrm{m}}\cos\omega t)^2$$

尺寸为 $a\times l\times H$ 的单片铁磁材料中，总的损耗 $P1_{\mathrm{Fe}}$ 是通过空间整合得到的，由式（4.25）决定：

$$\begin{aligned} P1_{\mathrm{Fe}} &= \int_V P_{\mathrm{Fe}}(x)\mathrm{d}V = 2\int_0^{\frac{a}{2}} H\cdot l\cdot\sigma\cdot(x\cdot\omega\cdot B_{\mathrm{m}}\cdot\cos\omega t)^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{a^3}{12}Hl\sigma B_{\mathrm{m}}^2\omega^2(\cos\omega t)^2 = ka^3B_{\mathrm{m}}^2\omega^2 \end{aligned} \tag{4.25}$$

系数 k 取决于 H 和 L 的尺寸，具体的电导率 σ，平均值为 0.5 的 $\cos^2\omega t$ 因数，式（4.25）的结果可以用于分析厚度为 a 的分裂磁心层降低的损耗。

图 4.9a 所示的是一片均匀的铁磁材料，它可以被看成厚度为 $a=A$ 的一层。假设我们选取部分的厚度显著地小于它的高度，这就可以应用式（4.25），并且由式（4.26）来计算损耗 P_{hom}：

$$P_{\mathrm{hom}} = kB_{\mathrm{m}}^2\omega^2A^3 \tag{4.26}$$

选取的那部分磁路可以用 N 匝厚度为 $a=A/N$ 的相互绝缘层（薄片）构成，如图 4.9b 所示。如果铁磁片之间的电绝缘层远远地小于 a，则可以假定，叠片磁路的横截面是由铁填充的。因此，叠片磁路的磁阻就等于相同形状的，由均匀片状铁磁材料构成的磁路的磁阻，如图 4.9a 所示。式（4.25）给出了一片（层）的涡流损耗 $P1_{\mathrm{Fe}}$，不分大小。在图 4.9a 中，式（4.26）已经被应用到均匀磁路中，该磁路被认为是单层铁片，是图 4.9b 中所示的总数假定为 N 的铁片的 N 倍宽。宽度为 $A=aN$ 的迭片结构磁路中的损耗 P_{lam} 由式（4.27）决定：

$$P_{\mathrm{lam}} = NkB_{\mathrm{m}}^2\omega^2\left(\frac{A}{N}\right)^3 = kB_{\mathrm{m}}^2\omega^2Aa^2 = \frac{P_{\mathrm{hom}}}{N^2} \tag{4.27}$$

式（4.27）的结果表明，当铁磁材料被分成 N 个厚度相同的沿着磁场方向的绝缘层（片）时，给定尺寸的磁路中的涡流损耗将下降 N^2 倍。在可变磁场垂直于铁片的情况下，叠片不能降低涡流损耗。此外，叠片磁路也不能减少磁滞损耗。

在一个具备叠片结构的磁路中，涡流损耗正比于迭片厚度 a 的二次方，于是我们就可以得出结论，铁片做的越薄越好。因此，问题出现了，为什么不用薄于 0.1 ÷ 0.2mm 的铁片呢？这是因为更薄的片材很难切割和装配。同时，厚度的减小也会减小铁的等效

横截面积，减小峰值磁通，增加磁阻。也就是说，在片材之间有一层由纸或者不导电的铁化合物制成的绝缘层。它有几十微米厚，存在于片材的两侧。任何片材厚度的减小都将减少磁路中横截面上的铁的量，原因如下。

在由实心铁磁材料制成的磁路中，因为其中的涡流较大，磁场在横截面上不是均匀分布的。工作频率的增加都将导致显著的涡流变化，反过来又将导致铁心横截面上磁感应强度 B 的不均匀分布。也就是说，涡流产生了不利于铁心中磁感应强度变化的磁场。这种涡流效应在铁心中间更应该得到重视，因为那个区域被所有的涡流封闭曲线包围着（如图 4.9a 所示）。这种现象导致了铁心中央和铁心周围磁感应强度的不同。在由铁片构成的磁路中，这种影响就显著减小，并且在整个铁心的横截面上的电场强度没有显著的变化。

第 5 章　旋 转 电 机

本章提供圆柱形电机的基本知识。介绍说明典型电机的绕组和带齿槽的磁路的基本形式。这章还介绍代表绕组、磁场、磁通和磁动势的常用符号、标志和约定。除此之外，还介绍说明圆柱形电动机、发电机的典型损耗和功率平衡图。在本章的最后，还会给出圆柱形电机气隙中磁场能量的计算和关于转矩体积比的思考。

电机通常是靠磁场耦合产生电磁转矩的旋转装置。电机起到电能、机械能转换的作用，因此电机被称为旋转转换器。旋转电机静止的部分称为定子，转动的部分称为转子。转子通过轴进行旋转运动，轴再连接机械耦合的工作机器的转子。耦合磁场产生转矩并驱动转子旋转，转矩是电磁力相互作用的结果，因此，它被称为电磁转矩。

5.1　旋转电机中的磁路

电机主要是圆柱形的。电机静止的部分（定子）通常被做成空心圆筒以容纳圆柱形转子并承受转子在它的轴承上旋转，其间的摩擦力可以忽略不计。定子和转子都是用铁磁材料做成的，在它们之间是气隙。在转子的轴线上，有一根轴将电磁转矩传递到机械子系统。这根轴伸出电机以促进耦合到工作机器。定子和转子都包含绕组或是永磁体，以产生定子和转子磁场。由这些磁场相互作用产生电磁转矩，电磁转矩作用于转子产生旋转运动。图 5.1 显示了一台电机磁路的横截面。

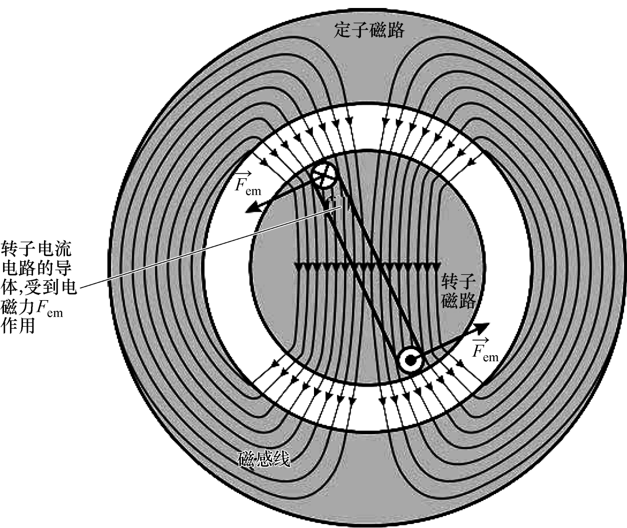


图 5.1　圆柱形电机的横截面

5.2 机械端口

旋转电机通过轴与负载或工作机器连接，转子和轴以机械角速度Ω_m旋转。电磁转矩T_{em}由一对电磁力F_{em}作用产生，并驱使转子运动。转矩T_{em}和旋转的速度Ω_m相乘得出电磁转换的功率$P_{em}=T_{em}\Omega_m$。假如转矩与旋转方向一致，功率P_{em}是正的。此时，电能被转化为机械能，所以，电机工作于电动机模式。转矩和速度的参考方向在图 5.2 中标出。

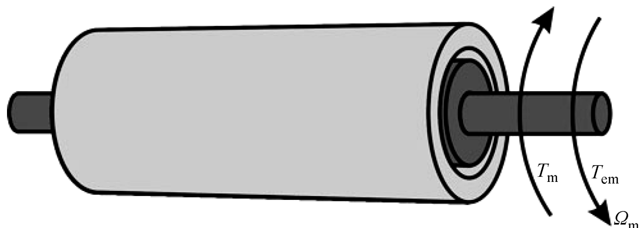


图 5.2 转速、电磁转矩和负载转矩采用的参考方向

轴代表机械连接，即电机的机械输入和输出。它以角速度Ω_m旋转并传递电磁转矩T_{em}。在这种情况下，电机作电动机运行，电磁转矩使电机运转（$T_{em}>0$），然而机械负载（负载或是工作机器）以相反的转矩抵抗运转，这个相反的转矩用T_m表示。在这种运行模式下，电磁转矩$T_{em}>0$，加速转子，同时相反的转矩$T_m>0$会趋向于使转子减速。转速的变化由用于旋转运动的牛顿运动定律决定：

$$J\frac{d\Omega_m}{dt}=T_{em}-T_m \tag{5.1}$$

一般来说，电机能作为电动机或是发电机运行。电动机作电能到机械能的机电能量转换；发电机作相反的转换。对于一台作电动机运行的电机，转矩T_{em}的符号是正的，反之，在发电机模式下，T_{em}的符号是负号。发电机的转子与转动它的涡轮连接，涡轮对电机提供机械功率。因此，相对于图 5.2 中所示的参考方向，假定转矩T_m是一个负值。发电机的电磁转矩T_{em}抵抗运转，相对于图示参考方向，也给它赋一负值。根据采用的参考方向，电磁转换的功率P_{em}是负的，表明电机将机械能转换成了电能。

5.3 绕组

除了产生磁场的磁路，电机还有电流电路，也被称为绕组，电流电路传导电流。绕组由若干串联绝缘的铜导体线圈组成。在圆柱形电机中，导体延圆筒轴线（共轴的）布置。通过串联若干导体就获得了一组绕组，两个导体串联并相反布置就组成一圈电路或一匝。一台电机会有许多线圈，它们既能布置在定子上，也能布置在转子上。每个绕

组有两个端子，绕组可以电路、开路或是连接电源给电机供电。通过将绕组连接到电流或电压源，绕组中就建立起电流。绕组的端子就是电机的电端口（连接，输入）。当一个 N 匝的绕组中有电流 i 时会产生 $F=Ni$ 的磁动势。磁动势除以磁阻R_{μ}就得到磁通 Φ。定子绕组产生定子磁通，转子绕组产生转子磁通。有的电机定子或是转子没有绕组，但是磁通由永磁体产生。

定子磁动势和转子磁动势的共同作用产生电机的合成磁通。磁感线穿过转子磁路、气隙和定子磁路。图 5.3 展示了气隙中的磁感线。在图示的区域中，磁感线穿出转子磁路，进入气隙㊀。这个区域称作转子的 N 极。正好相反与之对应的是 S 极。用同样的方法，可以确定定子的 N 极和 S 极。转子磁极与相反的定子磁极作用趋势下产生电磁转矩。

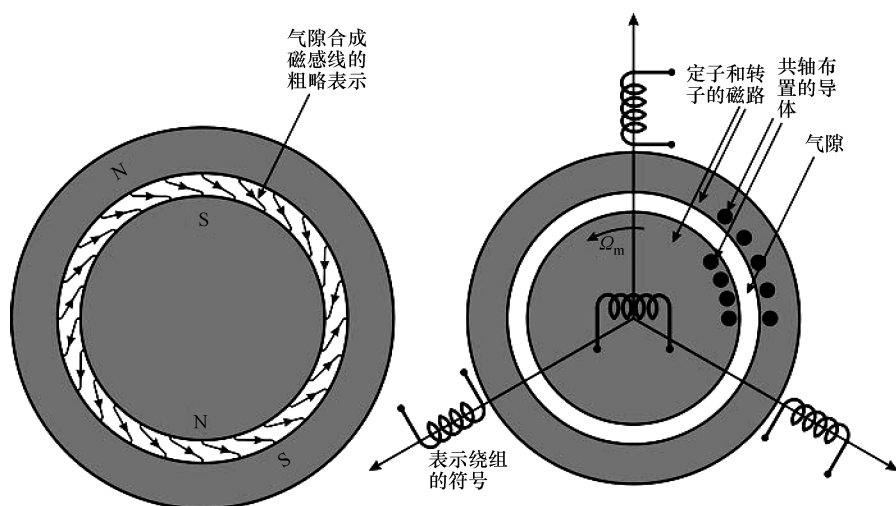


图 5.3　电机绕组和气隙磁场

图 5.3 的右图展示了电机的横截面。

定子磁通能用一个矢量表示，这个矢量的方向由定子磁极的位置决定，其代数强度（幅值）由磁通自身决定，换句话说，通过对磁感应强度的面积分，转子磁通也能用相

㊀ 图 5.3 展示了气隙磁场磁感线大概的形状，这与实际电机的气隙磁场是不一致的。磁路含有齿槽的电机将在接下来的章节中描述。齿槽的存在对气隙磁场存在影响，使之相对地更复杂。在假设的情况下，当磁路是理想的圆柱形并且铁磁材料的磁导率远大于空气的磁导率，磁场的磁感线与气隙和铁磁材料的交界面是垂直的。想像出分开气隙和铁磁材料的交界面是很有意义的。当交界面表面存在电流 J_S时，在交界面的任一面，边界条件都涉及磁场强度 H 的正切成分。当$J_S=0$，空气中磁场强度 H 的正切成分与铁磁材料中磁场强度的正切成分是相等的。因为$B_{Fe}<1.7T$，$H_{Fe}=B_{Fe}/\mu_{Fe}\approx 0$，空气中磁场强度的正切成分接近于零。所以，气隙中磁场的磁感线与气隙和铁磁材料的分界面是垂直的。

同的方法表示。在下面的章节中，将得出电磁转矩是由两个磁通的矢量相乘决定的，即磁通的幅值乘以磁通矢量夹角的正弦值。

5.4　磁路中的槽

为了减少功率损耗，定子和转子的磁路由铁片组成，这些铁片同轴布置。每个铁片的横截面如图 5.4 所示。大量的铁片组装加固制造出这样的磁心。定子通常采用空心圆筒的结构，同时转子是圆柱形，安装在定子的空腔中。定子与转子间的距离（气隙）能从 1 ~ 几毫米。



图 5.4　定子的圆柱形磁路，包含一匝由两根导体组成的线圈，安装在相对的槽中

电机的绕组由串联、互相绝缘的铜导体组成。导体间不但互相绝缘，而且与磁路和电机的其他部分绝缘。导体由涂漆、纸、硅橡胶和其他绝缘材料绝缘。沿着定子磁路的内侧和转子磁路的外侧，槽中安放着同轴布置着（与机械轴平行）绝缘的铜导体。图 5.5给出了一些槽的形状。为了获得更小或是更大的漏磁通，同时考虑到安装在这些槽中的导体的机械强度，可选择不同的槽形。图 5.5 的槽中可能有一根或更多的导体。在大部分情况下，定子槽中有两相不同绕组线圈的导体。

在图 5.6 中，定子磁路的横截面显示了沿着定子内侧的凹槽，这些凹槽称作槽。两个相邻槽之间的磁路部分称为齿。齿是在铁片切割相同的槽时形成的，切割好的铁片再堆叠形成磁路。在铁片堆叠完成后，就获得了梯形、椭圆形或是其他形状的槽。绝缘导体布置在槽里的方法如图 5.6 所示：图 c 为定子的正面；图 d 为定子的侧面；图 e 和图 f 为带有一组线圈的定子的 3D 图。

一根串联的导体布置在不同的槽中就得到了一匝线圈（图 5.6 中 A、B）。组成一匝线圈的两根导体能被布置在径向的槽中，当然也存在没有布置在槽中的线圈。属于同

一匝线圈的两根导体穿过槽，从磁路的后侧出来。在那里，它们由后端接连接起来，在图 5.6 中用 A、C 和 D 标示。布置在槽里的导体、后端接（D）和导体间的前端接（C）通常用单根绝缘导线构成。

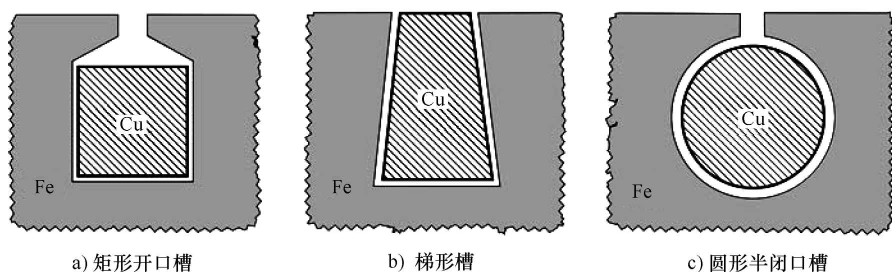


图 5.5　电机磁路槽的形状

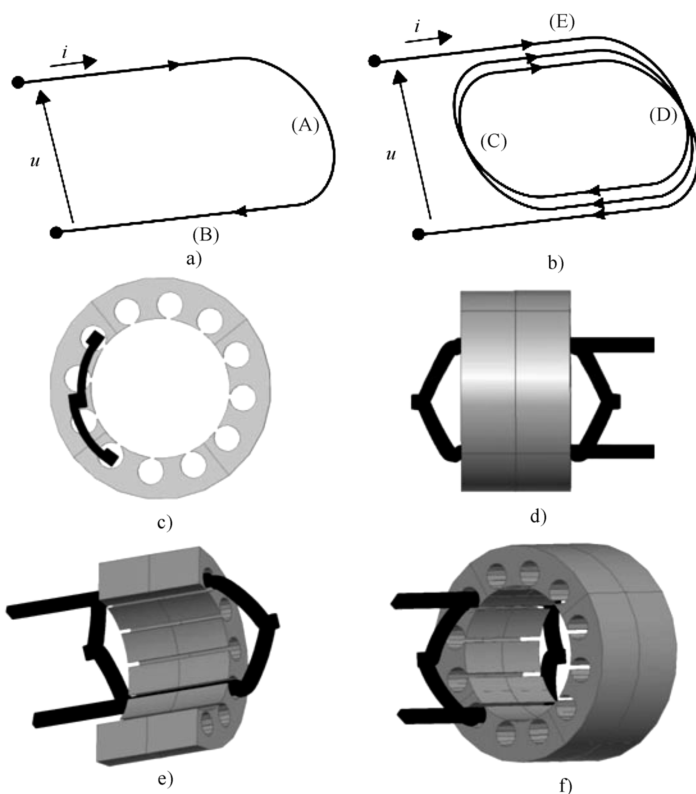


图 5.6　线匝和线圈组的定义

我们考虑的槽中可能不只有一根铜导体。因此，几匝导体可能处于相同的一对槽中。这些导体都串联起来，这样，就得到了线圈或线圈组（见图5.6中C～E)。为了连接这些串联的导体，线圈组在定子前端（C）和定子后端（D）都有端接。

一个线圈组可能有一匝或更多的串联线圈，一套绕组可能有一个或更多的串联线圈组。绕组的末端能与电源或电负载相连。它们代表了电机的电通路。在电机的定子和转子中可能会有几套绕组线圈。

一匝线圈的磁通与由线圈导体决定的轮廓中穿过的磁通相等。线圈的磁通用 Φ 表示，它等于磁感应强度在线圈构成的轮廓表面上的面积分。一个有 N 匝线圈的线圈组的磁链为 $N\Phi$。

问题（5.1)：齿中的磁感应强度相比于磁路的其他部分是要高还是低？为什么？

解答（5.1)：电机的磁通穿过定子磁路和转子磁路。在磁路的铁磁材料中，没有高磁阻的气隙。磁场的磁感线穿过气隙和齿。因为磁场指向齿而不是磁阻更高的槽，等效横截面就减小了。这样，因为一样的磁通经过更小的等效横截面，所以齿中的磁感应强度要强于磁路的其他部分的磁感应强度。

5.5　绕组轴线的位置和符号

根据电机类型的不同，绕组可以布置在电机的定子上、转子上或是两者都有。电机的主要类型包括直流电机、异步电机和同步电机。关于电机绕组的一些知识已经在5.3节中给出。在直流电机和同步电机中，励磁磁通可以由永磁体得到。在这样的情况下，因为没有励磁绕组，绕组的数量要少一些。异步电机和同步电机也被叫做交流电机，它们通常在定子上会有三套绕组，称为三相绕组。当处理带有大量绕组的电机时，详细描述全部这些绕组是不合实际的。太多的细节和不太清楚的描述不会有助于得到结论和做出决定。反而，每个绕组都可以用一个简单的符号表示，用以定义绕组的轴线即空间方向。

当绕组中的导体流过电流时就感应出磁场，磁场磁感线的方向决定了绕组的轴线。在前面的章节中，绕组被定义为布置在槽中、串联的一系列导体，并且通过绕组末端可连接到电源或是电能负载。一匝线圈就是串联的两根导体，被布置在不同的、差不多对称的槽中，导体由电机末端的端匝连接起来。聚集在一起后，它们组成了一个轮廓。两个导体的磁动势相加就是线匝或是轮廓的磁动势。电流在一匝线圈中产生的磁通与轮廓环绕的面垂直。这个面的这条法线定义了线匝的空间方向。组成绕组的线匝能被分布在电机的周边，并且有不同的空间方向。

当组成绕组的线匝在相同的槽中时，这些线匝具有相同的磁轴线。这些线匝中的电流会产生相同方向的磁动势和磁通。这样的绕组称为集中绕组。集中绕组中的绕组电流在气隙中产生磁场。磁场的磁感线经过铁心，因为铁的高磁导率，铁心中的磁场强度 H_{Fe} 非常小。除此之外，磁感线穿过气隙两次，如图5.7所示。因此，气隙中的磁场强度可由 $Ni = H_0\delta$ 得到。在气隙中，绕组产生的磁场有两块明显的区域：一个区域磁感线

穿出转子，经过气隙进入定子磁路；另一个区域方向相反。这些区域称为磁极。磁极的位置由磁场的方向决定。磁场方向沿着绕组轴线延伸。对于一套线匝由串联对称布置的导体构成的集中绕组，绕组的轴线方向与每个线匝的轴线一致。这根轴线与对称布置导体构成的面垂直。

在分析电机时，考虑所有绕组的所有导体太过复杂而且收获甚微。因此，将绕组用像线圈一样特殊的符号表示。每个符号的方向应该是延绕组轴线延长。也就是说，符号的方向需要与绕组中电流产生的磁场磁感线对齐。这种标记绕组轴线的方法如图 5.7 所示。

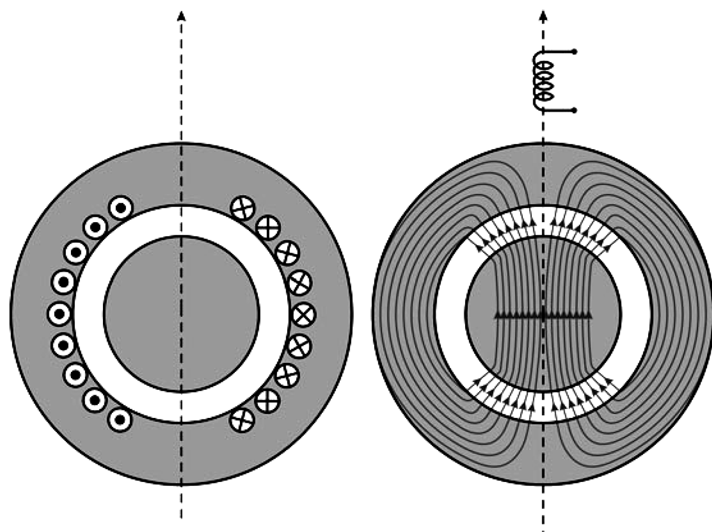


图 5.7　绕组和轴线的符号

电机的绕组可以做成一个槽含有不止一根导体。布置在一个槽里的导体不用属于同一套绕组。在三相电机中，有三套彼此分开的绕组，共有六个出线头。一个槽里的导体可能属于两套甚至三套单独的绕组。定子绕组的三个部分经常被称为相（三相绕组）。

5.6　转换损耗

电机能量转换过程中会涉及在磁路、绕组和机械子系统中的功率损耗。磁路中的损耗是铁磁材料中交替进行电磁感应引起的，它可分为磁滞损耗和涡流损耗。涡流引起的损耗可由叠片减少。叠压的磁路是由铁片构成的，每块铁片间由电气绝缘的薄层分开。用这样的方法，涡流及涡流损耗都被抑制了。绕组损耗与绕组电阻和电流的二次方成正比。机械损耗是转子转动的阻力引起的，主要是由轴承摩擦和气隙中的空气阻力引起的。当电机稳定运行在电动机模式下时，它从电源获得的功率为$P_{eM} = \sum ui_M$。在电动机

模式下，很容易假定从电源到电机的功率P_{eM}和电流i_M的方向。在机电能量转换的过程中，在磁路中存在P_{FeM}损耗，也被称为铁耗。在绕组中，存在P_{CuM}损耗，也被称为铜耗。传递到转子的机械能等于电磁转矩与转速的乘积，$T_{em}\Omega_m$。因为轴承摩擦和空气引起的旋转阻力导致机械损耗$P_{\gamma mM}$。通过轴传递到工作机器的功率为$P_{mM}=T_{em}\Omega_m-P_{\gamma mM}=T_m\Omega_m$。在电动机模式下，电源功率是电机输入功率，功率$P_{mM}$是输出，此时$P_{FeM}+P_{CuM}+P_{\gamma mM}$的和决定了功率损耗。比例$\eta=P_{mM}/P_{eM}$是效率，它的值总是小于1，运行于电动机模式下的电机的功率平衡如图5.8所示。

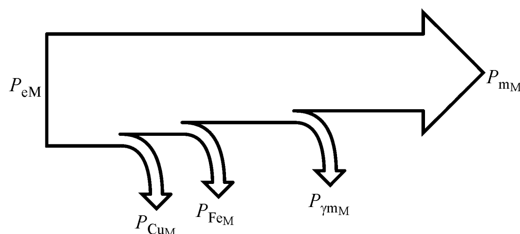


图5.8 电动机模式下电机功率平衡

在电机运行于发电机模式下时，电机将机械能转换为电能。发电机模式下功率平衡如图5.9所示。发电机得到来自水轮机、吸热的电动机或是其他相似的装置的机械功率P_{mG}。

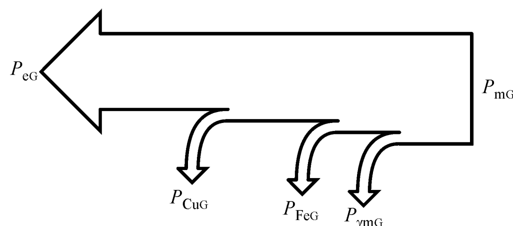


图5.9 发电机模式下电机功率平衡

在图5.8中，如果机械功率由涡轮导向电机，那么就认为机械功率是正的。在这种情况下，涡轮是机械功率的来源。在电动机惯例下功率和电流采用如图5.8所示的参考方向，由电机传递到工作机器的功率是正的，那么发电机惯例下的机械功率P_m就是一个负值。因此，发电机惯例下的参考方向经常改变以使功率P_{mG}（从涡轮接受）和P_{eG}（由发电机提供给连接到定子绕组的电路和负载）的值为正值。电流i_G通常也采用相同的参考方向。

P_{mG}代表输入到发电机的功率，它来自涡轮或其他形式的机械功率。在电机内部，输入功率的一部分用来克服转子旋转遇到的阻力。从输入功率P_{mG}中减去$P_{\gamma mG}$就得到转化为电功率的机械功率。得到的电功率中一部分损耗在绕组中，即铜耗P_{CuG}；还有一部分损耗在磁路中，即铁耗P_{FeG}。剩下的电能供发电机供电的用户使用。在定子绕组末端得到的电压和电流决定了提供给用户的电功率$P_{eG}=\sum u\, i_G$。

在设计电机时，通过减小绕组损耗（铜耗）和磁路损耗（铁耗），可以提高电机的效率。通过增大导体的横截面积，铜导体的电阻减小，从而减少铜耗。通过增大磁路的横截面积，产生相同磁通的磁感应强度减小了，因此，铁耗减少了。另一方面，这种减小电流密度和磁感应强度的方法导致电机的体积和重量的增加。同时，由电机功率和质量的比例决定的比功率也减小了。因此，对于一台预先确定功率的电机，减小的电流密度和磁通密度导致制造电机的用铜量和用铁量的增加，同时，电机的尺寸也增大了。

减小电流密度和磁通密度的设计策略减少了电机运行过程中的铜耗和铁耗。然而，这种设计策略的整体效果可能最终不容乐观。换句话说，效率的提高是由增加铁和铜的消耗而得到的。此时，与研究电机运行过程中耗费的功率一样，考虑电机制造过程中耗费的功率也是很值得的。生产用来绕制绕组的电解铜需要相当数量的电能，同样，生产堆叠磁路的绝缘铁片也需要电能。因此，通过减小铜耗和铁耗节约的电能与电机制造中增加的电能消耗抵消了。

在电机的设计过程中，电机电流密度和磁通密度的选择就确定了，这是一个折衷的选择。对于短时间工作的电机，接着是长时间的停机，选用增大的磁通密度和电流密度很有好处的。当电机大部分时间停机时，增大的铜耗和铁耗变得不太重要。但是另一方面，节省的铁和铜有助于显著减少电机制造过程中消耗的电能。

现在的电动机由功率变换器供电，功率变换器能调整电源的电压和电流，以满足电机的需要。此外，变工况运行使电机处于功耗减小的工况成为可能。

5.7　气隙中的磁场

在定子和转子之间有一个空隙，这个空隙常被称为气隙。在图 5.10 中，气隙用符号（C）标示。空隙长度 δ 相比于电机直径要小很多，范围从小电机的几毫米到大电机的 10mm。

铁磁材料（铁）的磁导率是非常大的。因为气隙磁通与磁路中的磁通是相等的，所以在气隙和铁磁材料中的磁感应强度差不多。因为 $\mu_{Fe} \gg \mu_0$，所以铁磁材料中的磁场强度 H 可以忽略不计。可以假定磁场强度 H 有一个非常大且非零的值 H_0 仅存在于气隙中（见图 5.11）。磁场的强度 H 的围线积分归纳为公式（5.2）所给出的值，公式（5.2）将磁动势 F 与磁场强度延闭合曲线的线积分联系起来

$$F = \sum Ni = \oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \cong 2H_0\delta \tag{5.2}$$

如图 5.11 所示，因为磁场磁感线穿过气两次，所以 H_0 与 δ 的乘积要再乘以 2。

因为 $Ni = 2H_0\delta$，所以选择较小的气隙长度 δ 是很重要的。这样，较小的绕组电流就能产生需要的磁场强度 H_0，也就减少了绕组中的损耗。但是，气隙的最小合适长度是有限制的。气隙必须足够长以确保定子和转子在任何情况下都不会接触。受制于机械制造的精度、转子的偏心率和轴径向弹性变形的存在，气隙长度不能低于 0.5～1mm。另外，在某些运行条件下可能存在转子刮坏定子的危险。

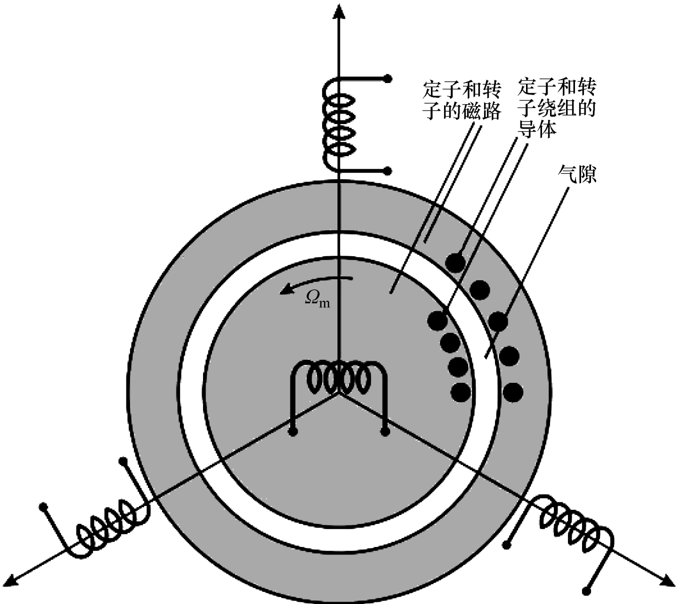


图 5.10 电机的横截面

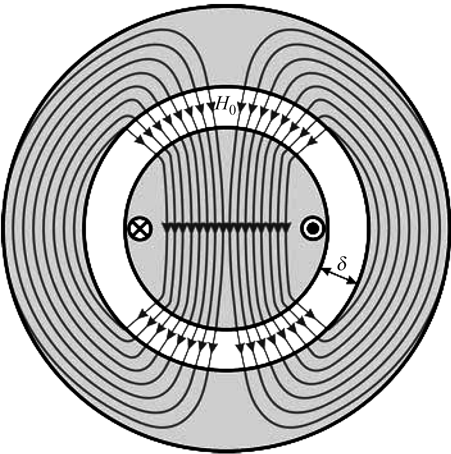


图 5.11 电机横截面里的磁感线

5.8 磁场能量、尺寸和转矩

基于磁场耦合的圆柱形电机通过磁场和绕组电流的相互作用产生电磁转矩。得到的

电磁转矩与电机尺寸相关。除此之外，电磁转矩可以由电机磁场能量估算。

基于耦合磁场的圆柱形电机有固定的定子和旋转的转子。转子绕圆柱形电机的轴线转动，轴线与图 5. 10 和图 5. 11 中所示的电机横截面垂直。衡量定子与转子间机械作用的是转矩。当转矩是由耦合磁场的作用获得时，它也被称为电磁转矩。电磁转矩是因为定子和转子磁场相互作用产生的，定子和转子的磁场既能由嵌入磁路的永磁体产生也能由绕组中的电流产生。图 5. 3 的左图说明转矩试图匹配定子和转子不同的磁极。为了确定转矩和耦合磁场中聚集能量的关系，概括机电能量转换的过程是很有用的，这就要考虑转换过程的周期性和一个转换周期中的两个阶段。在第一阶段，机电能量转换器与电源相连。电源提供的能量分为两部分：一部分增加耦合磁场中聚集的能量；另一部分提供机电能量转换过程的能量。在转换周期的第二个阶段，电源与机电能量转换器断开，机械能从储存在耦合磁场中的能量得到。在图 5. 12 中，W_i、W_{meh}和W_m依次表示电源能量、从转换器获得的机械能量和耦合磁场中聚集的能量。基于耦合磁场的转换器中的机电能量转换循环与基于电场耦合的转换器的循环类似，后者在 3. 1. 4 节—转换循环中做过描述。

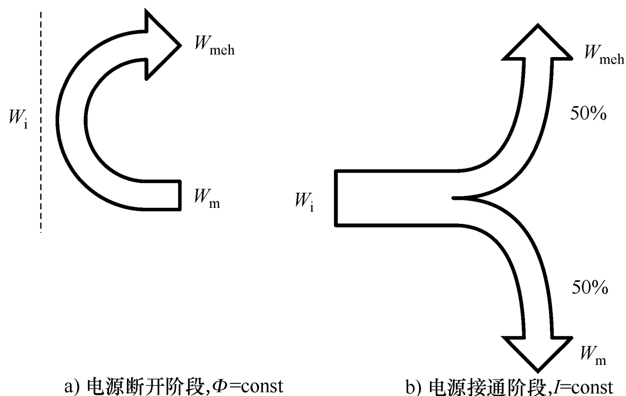


图 5. 12　一个转换周期内电源、磁场和机械子系统间的能量交换

当电机绕组与电源断开时（见图 5. 12a），绕组端线间的电压为 $u \approx N\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = 0$。忽略掉电压降 Ri，短路绕组中的磁通是恒定不变的。在电源断开的情况下，只能通过耦合磁场的储能获得机械功，因此，在这种情况下，$\mathrm{d}W_{meh} = -\mathrm{d}W_m$。这个结论可由一个例子解释，这个例子就是一个运动的铁片进入一个线圈的磁场。铁片移动距离 dx 产生的机械功为$\mathrm{d}W_{meh} = F\mathrm{d}x$，式中 F 为作用在铁片上的力。线圈的自感 $L(x)$取决于铁片的位置，因为铁片会改变线圈磁通的磁阻。当线圈与电源断开并且短路时，线圈的电阻 R 可以忽略不计，磁通的一阶导数为零，磁链 Ψ 恒定。因为位移 dx 引起的磁场能量变化由式（5. 3）给出，式中 i 表示线圈中流过的电流：

$$\mathrm{d}W_m = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \mathrm{d}\left(\frac{\Psi^2}{2L}\right) = -\frac{\Psi^2}{2L^2}\mathrm{d}L = -\frac{1}{2}i^2\mathrm{d}L \tag{5.3}$$

因为$dW_{meh}=-dW_m$，所以在短路线圈的磁场中，作用在移动铁片上的力可由式（5.4）决定：

$$dW_{meh}=F dx=-dW_m$$

$$=>F=\frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dx} \tag{5.4}$$

如果接通电源（见图5.12b），绕组中的电流由电源电流 I 决定。在磁通变化时，电流不变。根据位移 dx，电源做功为$dW_i=uIdt$，式中 $u=d\Psi/dt$ 为线圈端线间的电压。电源做功由式（5.5）表示：

$$dW_i=uIdt=Id\Psi \tag{5.5}$$

因为线圈电流不变，所以磁场储能相应的增量可由式（5.6）算出：

$$dW_m=d\left(\frac{1}{2}LI^2\right)=\frac{1}{2}I^2dL=\frac{1}{2}Id\Psi=\frac{1}{2}dW_i \tag{5.6}$$

由上式得出电源做的功分为相等的两个部分㊀$dW_m=dW_{meh}=dW_i/2$。在电源接通时，作用在一定铁片上的力可表达为 $F=1/2\ I^2dL/dt$，与式（5.4）一致，此式可用于电源断开、线圈短路的情况。

两个描述的过程都不会持续很长时间。如果电源永远断开，耦合磁场的能量W_m会转化成机械功直到耗尽。另一方面，如果电源永远接通，一部分电源能源转化为机械功，同时另一部分增加磁场储能。磁场储能的增加导致磁场强度 H 和磁感应 B 的提高，但是由铁磁材料组成的磁路的磁感应强度不可能无限增加。磁场能量的聚集受叠片中磁饱和的限制，这个限制为$B_{max}<(1.7\div2)$T。因为一个转换周期中的两个阶段不可能无限持续，所以它们交替进行以使磁场储能在限值内。所以机电能量转换循环进行，包括电源接通的阶段（图5.12a）和电源断开的阶段（图5.12b）。电源接通的阶段必须紧接电源断开的阶段，这样才能保证耦合磁场的磁场储能不会过度增加或减少。

当磁介质是线性，即磁介质的磁导率 μ 不取决于磁场强度时，式（3.7）和式（3.9）给出的电场力表达式可以使用。

所有的机电能量转换都是循环进行，在第一阶段，从电源获得机械功；在第二阶段，从耦合磁场储能获得机械功。电源周期性的断开和连接不需由开关实现，相反，电源可以做成提供脉冲电压或是交流电压，这样电源会周期性的改变方向或是在每个周期内的一段时间内保持为零。在交流电供电时，机电能量转换的周期由供电交流电周期决

㊀ 如果磁介质是线性的，也就是磁介质的磁导率 μ 不取决于磁场强度，电源所做的功的分配与式$dW_m=dW_{meh}=dW_i/2$ 一致。这时，自感系数 $L(x)$ 仅仅取决于铁片的位置 x。因此，Ψ/I 的比值既不取决于磁链，也不取决于电流。在这样的情况下，式（5.5）和式（5.6）是正确的，所以，关系式$dW_m=dW_{meh}=dW_i/2$ 也是有效的。但是当铁磁材料的磁感应达到饱和时，铁磁材料的磁化特性$B(H)$变成非线性。饱和导致磁介质（铁）的磁导率 μ 下降。在这样的情况下，线圈的电感变成是磁链和位置的函数，$L=\Psi/I=f(x,\Psi)$。因此，磁场能量增量的表达式将变成另外的形式。随后对非线性磁介质的分析将得出：电源做的功不会分为两个相等的部分。

定。在一个周期内，可得到的机械功堪比耦合磁场的能量。在图 5.12 示例中，假如耦合磁场在电源断开的瞬间具有最大磁能$W_{m(max)}$。在一个循环结束时，如果磁场储能减为零，那么在整个周期获得的机械功就是磁场储能峰值的两倍，$W_{meh(1)}=2W_{m(max)}$。对于旋转电机，一个循环周期通常是由转子旋转的一圈决定的[㊀]。在一圈中，由于电磁转矩T_{em}作用得到的机械功等于转矩乘以角轨迹（$2\pi T_{em}$）。因此，在耦合磁场储能峰值的基础上可以估算电机的电磁转矩。

磁场强度 H 的值在气隙中是唯一的。在铁磁材料中，因为磁导率相当大，磁场强度 H 可以忽略不计。因此，耦合磁场的能量主要集中在气隙中。

转矩T_{em}与旋转角速度Ω_m的乘积就是通过轴传递到工作机器的机械功率。在发电机模式下，能量以相反的方向转化，也就是说机械功转化为电能。在给定的参考方向下，发电机转矩T_{em}与转速Ω_m的乘积是负数，表示机械功率通过轴传递到了电机。

问题（5.2）：如果得知电机的尺寸和磁感应强度的峰值，如何估算由这台电机产生的电磁转矩？

解答（5.2）：电磁场中的能量主要集中在气隙中。气隙的体积为 $V=\pi LD\delta$，式中 D 为电机直径，L 是轴向长度，δ 是气隙长度。气隙中的磁感应强度 B 取决于绕组中的电流。磁场的磁感线穿过气隙，进入铁磁材料。通常组成定子和转子磁路的铁磁部分是由铁片组成的。因此，气隙中的磁感应强度不会超过$B_{max}\approx 1.7\mathrm{T}$。过大的磁感应强度 B 会导致铁片中的磁饱和。所以，气隙中磁场储能的密度不可能超过$\frac{1}{2}B_{max}^2/\mu_0$。耦合磁场的最大储能可估算为$W_{m(max)}\approx\frac{1}{2}\pi LD\delta B_{max}^2/\mu_0$，获得的能量再除以 2π 就得到了电机的电磁转矩。

㊀　例外就是电机不只有一对磁极，稍后解释。

第 6 章　电 机 建 模

这章介绍解释电机一般化的数学模型，包括解释建立模型的必要性、介绍解释近似法和忽略的现象，并且用一系列微分和代数方程表示一般化的模型。

研究电机时我们需要知道表示机电能量转换过程的数学表达式。我们有必要确定关联电机电气量（比如电压和电流）和机械量（比如转速和转矩）的等式，这些等式提供了电机的电端口（绕组的端线）和电机机械端口（轴）的联系。这两个端口如图 6. 1 所示，阐明了机电能量转换的过程并且表示了主要的损耗和磁场的储能。数学模型的等式用于计算电磁转矩、转矩、磁动势、电流、转速和其他有关变量的变化。除此之外，模型有助于计算绕组、磁路和电机的机械部分的转换损耗。

描述电机瞬态过程的方程组包含微分方程和代数方程，它也被称为动态模型。处于稳态运行的电机可由稳态等效电路描述，等效电路给出了绕组端线的电压和电流间的关系；稳态运行的电机也能由机械特性描述，机械特性给出了机械端口转矩和转速间的关系。在接下来的章节中，将给出电机建模的介绍。图 6. 1 给出的图中包括：电源功率 P_e、机械功率 P_m、绕组损耗 P_{Cu}、耦合磁场损耗 P_{Fe}、旋转引起的机械损耗 $P_{\gamma m}$（旋转助力损耗）和耦合磁场能量 W_m。

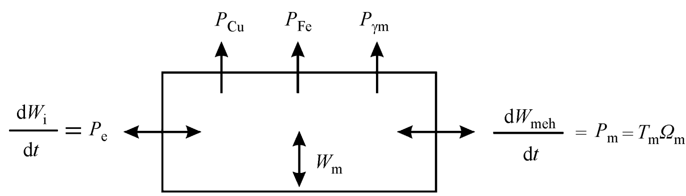


图 6. 1　基于耦合磁场的机电能量转换功率流

6. 1　建模的准备

熟知电机对于电机工程师的工作成功是至关重要的。当为特别的用途选用合适的电机时，当设计包含电机的系统时，当需解决工业和电力工程中出现的问题时，都需要具备电机稳态运行的等效电路和机械特性的知识。当需解决电机和发电机的控制问题时、当设计保护和监控系统时、当要决定机器人的结构和控制参数时、当需解决自动化生产、电动汽车和其他相似应用中的问题时，具备电机动态模型的知识是相当重要的。

在上述提到的各种情况中，需要知道关于电机尺寸、重量、结构、可靠性和效率的基本概念。

再更进一步，这节将提出电机的一般模型。随着这个模型，将列出、解释和证明建模过程中常用的近似。研究一般模型的主要目的就是要确定普遍使用的电机的动态模型并且获得它们的稳态等效电路和机械特性。

图 6.1 中标示的量有机电系统从电源获得的功率P_e、通过轴传递到机械子系统的功率P_m、电气子系统的损耗P_{Cu}、铁耗P_{Fe}、机械子系统因为摩擦引起的损耗$P_{\gamma m}$。发展相应的数学模型以描述如图 6.1 所示的机电能量转换的现象是很有必要的。

什么是好的模型？如何得到好的数学模型？

一般而言，模型就是考虑系统的数学表达。在大部分情况下，会忽略不那么重要的相互作用，然后得到简化的表达，但对于目的和应用来说仍然是足够的。在电气工程中，一个模型通常是描述某一系统的一系列微分方程。在某些情况下，比如稳态运行时，这些方程可以简化为等效电路。

电气工程师感兴趣的现象和系统通常是复杂的，并且包含一些相互作用，这些作用不是非常重要的不需要考虑。比如推动一台吸热电动机气缸活塞头的气压，这个作用是大量气体粒子持续碰撞活塞表面的结果。严格来讲，这个力不是恒定的，它是由每秒很多次的撞击（脉冲）组成的。但是，在分析电机传递给工作机器的转矩时，只有推力的平均值是有意义的。因此，忽略掉微小撞击的作用，推力是与活塞头的表面积和气缸气压成正比的。

在电气工程中，经常提到和使用的是无源元件，比如电阻器、电容和电感线圈（扼流线圈）。严格来讲，相比于广泛接受的简单模型，实际电感、电容和电阻的模型要更复杂。在高频时，电容寄生电感和等效串联电阻的影响变得显而易见。在类似情况下，电感线圈的并联电容在高频下不能忽略。对电阻器也能做出相似的结论。在严谨的分析中，电阻部分的模型必须是带分布参数的网络。但是我们感兴趣的经常是低频。在低频时，寄生效应可以忽略，众所周知的元件 R、L 和 C 可以认为是集总参数电路元件，它们可由下列关系式描述：$Ri = u$；$u = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$；$i = C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$。因此，在低频解决问题和工作时，寄生效应和分布参数可以不需考虑。当所有的寄生效应和副效应被建模时，RLC 网络变得相当复杂，分析它们也变得困难。基于过于复杂的模型，作推断和确定设计尺寸都变得几乎不可能。

因此，一个好模型不是一个考虑一个系统动态特性各个方面的模型，而是根据合理的近似作过简化的模型，简化模型促进改善了作结论和确定设计的过程，并且保留了系统中相关的（有意义的）现象。发展一个有助于定义适当的解析式不可能，但是作了近似后就成为了可能。在具备深入了解电机系统和材料的知识和使用的经验后，将重要的和不重要的区分开是必要的。给学习传统电机建模的初学者的一个建议就是只考虑到几十 kHz 的所有现象并且忽略更高频时的过程。

6.1.1　建模会遇到的问题

在建模的过程中，需要忽略掉不重要的现象以获得简单、清晰和可用的模型。对成功的建模和模型使用，有必要对能被忽略的现象作出正确的判断。如果重要的现象被忽

略或忽视，建模的结果将是不可用的。这里举一个例子说明做正确的决定总是依赖于对考虑系统和现象的广泛的知识，这也是工程实践所要求的。

考虑一个由两个平行极板和厚度为 d 的电介质构成的电容。通常认为介质中的电场是均匀的，且等于 $E=U/d$。如果这个电容用于高频特性不重要的系统，可以认为它是理想的，并且它电极间的电场是均匀的。现在考虑一个非常大斜率 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 的脉冲电压连接到极板上。在低频时，电容仍然可以认为是理想的，因为简化没有对低频时的反应造成任何影响。但是，非常高的 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 可能会导致介质的击穿，即使稳态电场强度 $E=U/d$ 远小于介电强度。介电强度相当于介质中能承受的最大电场强度，超过这个值就会导致介质击穿。高的 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 值会导致极板间电场分布瞬间的不均匀，在中间位置 $E<U/d$，在靠近极板附近 $E>U/d$。也就是说，供电给极板的过程中真实发生的是来自电源的电磁波的传播，并且由导体（波导）传递给极板。电磁波持续在介质中传播，因此，在极板附近的电场强度最高，极板间电场强度次之。在非常短的时间内建立起分布不均匀的初始电场，这个时间由电容尺寸决定，约为几纳秒。

由于电场分布的不均匀，电压突然上升（非常高的斜率 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$）会导致短时间内，在电容极板附近的电场强度超过绝缘材料的介电强度，即使 $E=U/d$ 很小。击穿导致绝缘介质结构和化学成分的破坏，不过，这只是局部的。绝缘介质破坏的区域只存在于接近极板的位置，介质内部还是保存完好的。但是，如果描述的情况频繁发生（比如一秒 10000 次），破坏的区域逐渐扩大，它们会改变电容的特性。按照规定的方式延长运行时间，最终会导致极板间的介质击穿，使电容失效。相似的现象发生在由三相晶体管变频器供电的交流电机的绝缘层中，三相晶体管变频器通常用于提供所说的恒 U/f 控制。三相变频器给电动机提供一系列电压脉冲，脉冲频率接近 10kHz。改变脉冲的宽度以获得期望的平均电压（PWM－脉冲宽度调制）。电压脉冲非常陡，有相当大的 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 值，它们给绕组绝缘带来了额外的压力。因此，在分析 PWM 供电的电机时，某些高频现象不能忽略。

上面举的例子不仅需要对过程深入了解，还要基于经验。彻底理解这个例子所要求的知识不是进一步约定的首要条件。但是，认识到通过实验室、实践、论文和工程充实学习是很有意义的，通过这种办法获得的经验对于一个成功的工程实践是必须的。一个成功的工程师会把理论知识、技术和建模过程的中的经验和现象结合起来解决分析可以解决的问题。为了充分利用知识和技术，首要的就是利用经验和对机电能量转换更深入的了解，然后将复杂的系统归纳为以后进一步工作的数学模型。

6.1.2　结论

一个好的模型是可能的最简单的模型，但仍能以合适的方式代表电机系统的动态性能的各个方面。

在建模的过程中，做合理的近似以使模型简单，并适用于认识相关的重要现象、做结论、进行工程和决定设计。在引入近似时，要小心不要使近似危及模型精度，使之扩大以致模型失效。

这本书首先为读者介绍带耦合磁场的圆柱形机电能量转换器。因此，电机分析和建模的第一步就是作某些近似。在 4 个主要的近似中，磁路中的损耗即铁耗可被忽略。这些损耗的忽略使电机的基本模型易于理解。在大部分电机中，因为叠片的原因，铁耗可以忽略，且提到的近似是比较合理的。但是，需要记住在更高的频率和更大的磁感应强度的情况下，铁耗可能是相当大的，需要在计算全部的损耗、效率和设计相关的冷却系统时考虑。

6.2　忽略的现象

在建模的过程中，忽略掉一些不是很重要的现象是有道理的，忽略掉的现象不会导致得到结果的偏差。4 条最普遍的近似是：

1）系统被认为是集中参数网络；
2）忽略寄生电容；
3）忽略铁耗；
4）铁磁材料被认为是线性的。

6.2.1　分布式能量和分布式参数

电机通常被认为是带有集总参数的网络，并且可以用由分立的电感、电阻组成的电路表示。如果考虑实际的电感和电容元件，线圈的能量处于空间分布的磁场中；电容的能量处于空间分布的电场中。众所周知，磁场的变化会引起感应电场，反之亦然㊀。感应场与诱导场的变化率成正比，即工作频率。因此，一个带交流电的线圈会被磁场环绕，同时还会感应出电场，感应电场的强度取决于工作频率。电容也能得到相似的结论。两个场的存在导致了线圈的寄生电容和电容的寄生电感。

集总参数法忽视电感和电容空间分布的能量，假定能量都处于分立的元件内，而不是空间中，数值分别为$\frac{1}{2}Li^2$和$\frac{1}{2}Cu^2$。电感和电容被认为是理想元件，集中参数 $L-C$ 元件。采用的模型为$u_L=L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和$i_C=C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$，忽略副效应，比如电感的电容和电容的电感。随着感应场与工作频率成正比，集总参数法在相对较低的频率时引入了可忽略误差，这个较低的频率用于电机的典型应用中。

忽略分布能量和分布参数的一个影响就是隐藏了功率的传递。在集总参数网路中，带有电流 i 和电压 u 的一对导体以 $p=ui$ 的速度传递能量。这个表达式涉及像电流、电压这样的宏观量，揭示导体间的能量传递。在实际情况中，能量是通过周围空间中的电场和磁场传递的。

㊀　参考麦克斯韦方程组，比如$\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$。

6.2.2 忽略寄生电容

对于基于耦合磁场运行的电机，绕组的寄生电容的作用和聚集在电场中的能量可以忽略不计。因为磁场的空间密度要远大于电场的空间密度（$\mu H^2 \gg \varepsilon E^2$），所以忽略绝缘导体间的电容和绕组磁路之间的电容是合理的。

6.2.3 忽略铁耗

一般认为有磁滞引起的损耗和涡流引起的损耗相比于转化的功率是相当小的，因此，它们可以忽略。铁磁材料中的特殊损耗（铁耗）取决于磁感应强度和工作频率，它们能由下式表示：

$$p_{\mathrm{Fe}} = \frac{P_{\mathrm{Fe}}}{m} = p_{\mathrm{H}} + p_{\mathrm{V}} = \sigma_{\mathrm{H}} \cdot f \cdot B_{\mathrm{m}}^2 + \sigma_{\mathrm{V}} \cdot f^2 \cdot B_{\mathrm{m}}^2$$

因为由涡流引起的损耗与频率的平方和磁感应强度的平方有关，当电机运行于较高的频率时，铁耗需要重新考虑。在这样的情况下，需要核定忽略铁耗是不是合理的。

6.2.4 忽略铁的非线性

磁性材料的磁化特性认为是线性的。因此，铁磁材料（铁）的饱和效应被忽略。认为磁导率 B/H 是恒定的，等于磁化特性所有运行点的微分磁导率 $\Delta B/\Delta H$。在磁感应强度超过 1.2T 时，有必要核定这样忽略是不是合理的。

基于上面提到的 4 条基本近似，之后可以发展基于耦合磁场的电机的一般模型。假定转换器有 N 套绕组，绕组既能是短路的，也可以接到电源。绕组镶嵌在转子或是定子上。

6.3 电源功率

图 6.2 显示了有 N 个磁耦合线圈（绕组）的转换器，绕组既能连接到电源，也能与电源断开然后短接。电机的绕组可以由电流源供电，也能由电压源供电。真实的电压源有有限的内阻（阻抗），电流源也有有限的内电导（导纳）。在下文中，假定电源是理想的，一般来讲没有损耗。

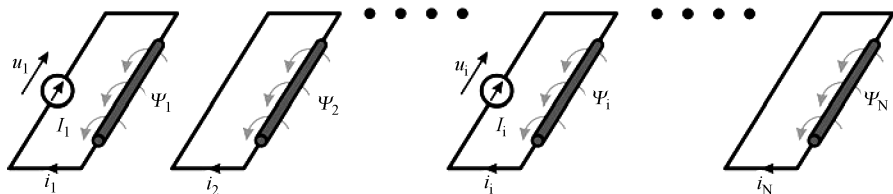


图 6.2 基于磁场耦合带有 N 个线圈（绕组）的机电能量变换器的模型。线圈 1 和 i 与电源相连，线圈 2 和 N 短接，因此它们端口间的电压为零

如果绕组与电流源相连，绕组电流是恒定的，大小由电源电流决定。如果绕组短路，那么绕组的电压平衡可由下式表示 $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t = 0$。如果绕线电阻忽略不计，那么 $\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t = 0$，短路绕组的磁通是恒定的。当绕组端线与电压源连接时，电源电压决定了磁通变化率（$u \approx \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$）。

电源传递给机电能量变换器的能量由式（6.1）决定，式中$\underline{u}$和$\underline{i}$为列向量，它们的元素为单个绕组的电压和电流。这个电源传递的电机的功率的表达式不取决于绕组是否与电流源或是电压源相连或是短路。

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{e}} &= \sum_{j=1}^{N} u_{\mathrm{j}} i_{\mathrm{j}} = \underline{i}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{u} \\
\underline{i}^{\mathrm{T}} &= [i_1, i_2, \cdots i_{\mathrm{i}}, \cdots i_{\mathrm{N}-1}, i_{\mathrm{N}}] \\
\underline{u}^{\mathrm{T}} &= [u_1, u_2, \cdots u_{\mathrm{i}}, \cdots u_{\mathrm{N}-1}, u_{\mathrm{N}}]
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

6.4　电动势

式（6.2）给出了绕组的电压平衡方程，式中 u 为绕组端线间的电压；i 为绕组电流；$\Psi = N\phi$ 表示绕组磁链；参数 R 表示绕组电阻。

$$
u = Ri + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = Ri + e_{\mathrm{CEMF}} \tag{6.2}
$$

考虑的绕组如图 6.3 所示。磁链的导数决定绕组中感应的磁动势。在画等效电路时，电动势可以用一个电压源表示，电压源向下标示一个 + 号，以与电流采用的参考方向一致。然后，电动势 $e_{\mathrm{EMF}} = -\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$，$-\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 的值为绕组中感应的电动势，如图 6.3b) 所示。

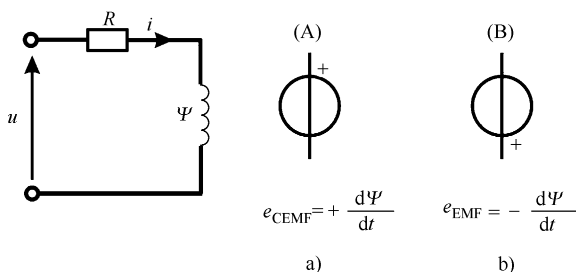


图 6.3　电动势和反电势

另一方面，也可以改变参考方向和符号（$e = +\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$），如图 6.3a）所示。$e_{\mathrm{CEMF}} = +\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 的值为绕组中感应的反电势。

方法（B）被用于电气工程基础和电磁学中的大部分情况，因为它清楚表示了每个线圈的情况，感应的电动势和电流阻止磁链的变化。比如说如果电流密度减小，穿过线圈的磁通减小，一个正值的 $e = -\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 出现。考虑到符号 + 是指向下的，得出电路中

感应的电动势阻止磁通的变化。

方法（A）得出电压参考正方向和电动势向上的等效电路。认为 $e=+\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$，则电路中的电流为 $(u-e)/R$。像这样定义，电动势与电压相反，所以被称为反电势。方法（A）经常用于解决包含电动势的电路，比如电机的等效电路。电动势参考方向的选择问题不是至关重要的，因为参考方向选择不会导致绕组中电压平衡方程的本质变化。在盎格鲁－撒克逊、德国和俄国文献中，等效方法是不同的，可能会误导读者。在实际中，两种方法都会采用，只要采用的参考方向与电动势的符号一致（$e=+/-\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$）。

线圈中感应的电势和反电势将在之后的章节中讨论，第 10 章“绕组中感应的电动势”。

6.5　电压平衡方程

式（6.2）给出了每个绕组的电压平衡方程。对于一个有 N 套绕组的系统，第 k 套绕组的平衡方程由下式表示：

$$u_k = R_k i_k + \frac{\mathrm{d}\Psi_k}{\mathrm{d}t} \tag{6.3}$$

式中，u_k、i_k、R_k 和 Ψ_k 分别表示第 k 套绕组的电压、电流、电阻和磁链。第 k 套绕组的磁链 Ψ_k 是穿过绕组的所有磁通的和，不管相关磁场的起因是什么。磁链可以是由第 k 套绕组自身电流产生的，也可以是由与第 k 套绕组磁耦合的其他绕组的电流产生的。磁链 Ψ_k 中由电流 i_k 产生的部分等于 $L_{kk}i_k$，系数 L_{kk} 也被称为绕组的自感。自感可表示为 H = Wb/A，它肯定是正的。如果绕组电流 i_k 是磁场的唯一起因，那么绕组磁链为 $\Psi_k = L_{kk}i_k$。余下绕组的电流（见图 6.2）也可能对磁链 Ψ_k 起作用。第 j 套绕组中电流 i_j 对磁链的影响正比于绕组 i 和 j 之间的互感系数 L_{ij}。参数 L_{ij} 可以是正的、负的、也可能为零。空间布置的两套绕组可能会出现一套绕组中的正电流会在另一套绕组中产生负的磁通。

一个有 N 套绕组的系统的电压平衡方程是由一系列微分方程构成的。在引入电压和电流向量后，这些方程可以变得更简短清楚：

$$\underline{i}^{\mathrm{T}} = [i_1, i_2, \cdots i_k, \cdots i_{N-1}, i_N]$$
$$\underline{u}^{\mathrm{T}} = [u_1, u_2, \cdots u_k, \cdots u_{N-1}, u_N] \tag{6.4}$$

定义绕组磁链向量为：

$$\underline{\Psi}^{\mathrm{T}} = [\Psi_1, \Psi_2, \cdots \Psi_k, \cdots \Psi_{N-1}, \Psi_N] \tag{6.5}$$

在式（6.6）中引入电阻矩阵 $\underline{R}$，它的主对角线上包含所有绕组的电阻。矩阵形式的电压平衡方程如式（6.7）所示，它代表 N 个式（6.2）形式的微分方程。电压平衡方程定义了机电能量变换器电气部分的动态特性，即电气子系统的动态特性。

$$\underline{R}=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & R_N \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

$$\underline{u}=\underline{R}\cdot\underline{i}+\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{6.7}$$

磁链列向量$\underline{\Psi}$由绕组电流、自感和互感决定。第 k 套绕组的磁链由绕组 k 的自感系数和绕组 k 与其他绕组的互感系数L_{ij}决定，如下式所示：

$$\Psi_k=L_{k1}i_1+L_{k2}i_2+\cdots+L_{kk}i_k+\cdots+L_{kN}i_N$$

因为上式用于每个绕组，磁链矢量可由电感矩阵$\underline{L}$（6.8）乘以电流列向量$\underline{i}$得到，如式（6.9）所示：

$$\underline{L}=\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12}\cdots & L_{1k}\cdots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22}\cdots & L_{2k}\cdots & L_{2N} \\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ L_{k1} & L_{k2}\cdots & L_{kk}\cdots & L_{kN} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ L_{N1} & L_{N2}\cdots & L_{Nk}\cdots & L_{NN} \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$\underline{\Psi}=\underline{L}\cdot\underline{i} \tag{6.9}$$

在电感矩阵的主对角线上是各个绕组的自感，除了主对角线的系数都是互感。因为$L_{ij}=L_{ji}$，所以电感矩阵是对称的，即$\underline{L}=\underline{L}^{T}$。

电感矩阵的元素可能是变量。自感和互感的变化是因为机电能量变换器的运动部分（转子）关于固定部分（定子）的相对运动引起的。绕组可能存在定子和转子两部分中，所以，转动导致各个绕组相对位置的变化。对每个绕组，定义绕组轴线（章节 5.5）是可能的。考虑一对绕组时，一套绕组相对另一套绕组旋转会改变绕组轴线间的夹角。因此，它们的互感也就变化了。转子旋转也会改变自感。一套绕组的自感与磁阻R_μ相关。对定子绕组，它产生的磁通穿过定子磁路，经过气隙再穿过定子磁路。有可能存在转子在不同方向磁阻不相等的情况。在这样的情况下，转子旋转改变了定子绕组的等效磁阻R_μ和绕组的自感。转动改变绕组自感的例子如图 2.6 所示，在图 2.6 中，通过线圈磁路嵌入一块铁片，磁阻减小，自感增大。

6.6　漏磁通

当电流i_k是磁场的唯一来源时，绕组 k 的磁链为$\Psi_k=L_{kk}i_k$。磁通的一部分穿过其他套组，称为互感磁通。剩下的磁通仅环绕绕组 k 而不穿过任意其他绕组。这部分磁通在

某种程度上错过完成磁场耦合的“机会”，这部分磁通也被称为漏磁通。图 6.4 描画了一个拥有两套绕组的系统的互感磁通和漏磁通。一匝线圈的磁通用符号 Φ 表示。每个线匝的磁通 Φ 乘以匝数就得到单个绕组的磁链。

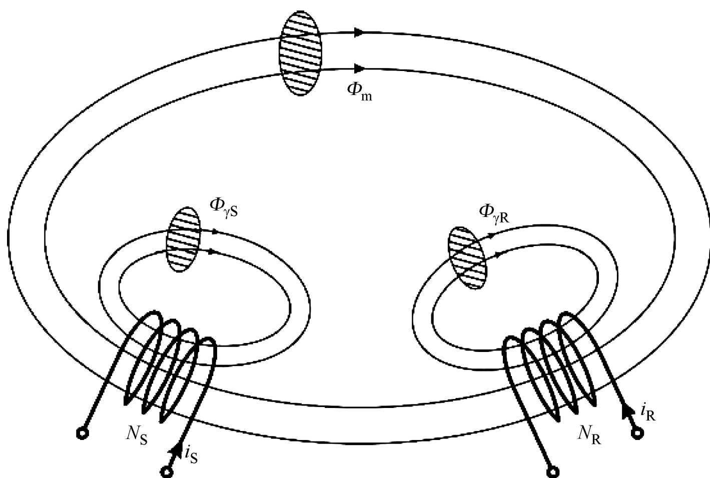


图 6.4 漏磁通和互感磁通的定义

定子绕组和转子绕组的自感等于绕组电流建立的磁链与电流密度的比值。换句话说，在磁通不受外部磁场和其他绕组电流影响，磁通仅有绕组自身电流产生的情况下，自感等于绕组磁通和电流的比值。在由许多耦合绕组组成的系统中，当所有剩下绕组电流为零时，考虑绕组的自感由磁链除以电流决定。实际绕组的自感是正的，互感可以是负值。定子绕组和转子绕组的互感决定了定子电流对转子绕组磁通的贡献程度。因为 $L_{SR}=L_{RS}=L_m$，定子电流对转子磁链的影响与转子电流对定子磁链的影响一样。通过旋转，两套绕组的相对位置可能使一套绕组中的正电流在另一套绕组中感应磁通，导致互感是负值。对图 6.4 所示的绕组系统，电感矩阵是一个 2×2 的矩阵，主对角线上是正的自感L_S和L_R，矩阵余下的元素可能是正的，可能是负的，当绕组轴线夹角为 $\pi/2$ 时也可能等于零。互感取决于耦合系数：

$$k=\frac{L_m}{\sqrt{L_S L_R}}$$

系数 k 是定子绕组和转子绕组磁场耦合的量度。当漏磁通忽略不计时，所有的磁通都是相互的，并且环绕所有绕组。在这种情况下，$k=1$。当漏磁通增加时，互感磁通和系数 k 减小。当两套绕组没有互感磁通时，$k=0$。需要注意的是 k 的值不能超过 1。

互感L_m和系数 k 的关系可以由下面的例子举例说明。定子和转子绕组有相同的轴线和相同的匝数。如果磁阻R_μ相同，那么自感相等，为$L_S=L_R=N^2/R_\mu$，同时互感为$L_m=kL_S=kL_R$。因为 $k<1$，所以互感要小于自感。在引入的假设下，自感与互感的差值

$$L_{\gamma S}=L_S-L_m=(1-k)L_s$$

被称为定子漏感，环绕定子绕组但是不穿过转子的漏磁通的量度。绕组间磁场耦合越强意味着耦合系数越大，漏磁通和漏感越小。上面概述的例子假设$N_S=N_R$。当绕组具有不同的磁路和匝数时，研究漏磁通和漏感是很有意义的。

如图 6.4 所示的定子和转子绕组，穿过一匝线圈的磁通由下式给出：

$$\boldsymbol{\Phi}_S=\boldsymbol{\Phi}_{\gamma S}+\boldsymbol{\Phi}_m$$
$$\boldsymbol{\Phi}_R=\boldsymbol{\Phi}_{\gamma R}+\boldsymbol{\Phi}_m$$

互感系统由两部分组成，一部分是因为定子电流产生的（$\boldsymbol{\Phi}^S$）；一部分是因为转子电流产生的（$\boldsymbol{\Phi}^R$），

$$\boldsymbol{\Phi}_m=\boldsymbol{\Phi}_m^S+\boldsymbol{\Phi}_m^R$$

绕组的磁链等于一匝线圈中穿过的磁通乘以绕组的匝数：

$$\boldsymbol{\Psi}_S=N_S\boldsymbol{\Phi}_S=N_S\boldsymbol{\Phi}_m+N_S\boldsymbol{\Phi}_{\gamma S}=N_S\boldsymbol{\Phi}_m+\boldsymbol{\Psi}_{\gamma S}$$
$$\boldsymbol{\Psi}_R=N_R\boldsymbol{\Phi}_R=N_R\boldsymbol{\Phi}_m+N_R\boldsymbol{\Phi}_{\gamma R}=N_R\boldsymbol{\Phi}_m+\boldsymbol{\Psi}_{\gamma R}$$

磁链$\boldsymbol{\Psi}_{\gamma S}$为定子绕组的漏磁链，$\boldsymbol{\Psi}_{\gamma R}$为转子绕组的漏磁链。每个绕组的漏磁链与电流成比例。比例系数就是绕组的漏电感。如图 6.4 所示的绕组，漏感由下式给出：

$$L_{\gamma S}=\frac{\boldsymbol{\Psi}_{\gamma S}}{i_S},L_{\gamma R}=\frac{\boldsymbol{\Psi}_{\gamma R}}{i_R}$$

互感由下式决定：

$$L_m=L_{SR}=L_{RS}=\frac{N_S\boldsymbol{\Phi}_m^R}{i_R}=\frac{N_R\boldsymbol{\Phi}_m^S}{i_S}$$

为了定义绕组自感，有必要将由绕组自身电流引起的磁通成分区分出来。自感是这个磁通成分（L_Si_S）与电流密度（i_S）的商。这个磁通成分（L_Si_S）的一部分为互感磁通（即环绕所有绕组），一部分为漏磁通（仅环绕定子绕组）。定子和转子的自感为：

$$L_S=\frac{N_S\boldsymbol{\Phi}_m^S+N_S\boldsymbol{\Phi}_{\gamma S}}{i_S}=\frac{N_S\boldsymbol{\Phi}_m^S+\boldsymbol{\Psi}_{\gamma S}}{i_s}=\frac{N_S}{N_R}L_{RS}+L_{\gamma S}=\frac{N_S}{N_R}L_m+L_{\gamma S}$$
$$L_R=\frac{N_R\boldsymbol{\Phi}_m^R+N_R\boldsymbol{\Phi}_{\gamma R}}{i_R}=\frac{N_R\boldsymbol{\Phi}_m^R+\boldsymbol{\Psi}_{\gamma R}}{i_R}=\frac{N_R}{N_S}L_{SR}+L_{\gamma R}=\frac{N_R}{N_S}L_m+L_{\gamma R}$$

因此，漏感是绕组自感的一部分。当耦合绕组间的耦合磁场变弱时，漏感变高。当定子和转子绕组的匝数相等并且将转子物理量折算到定子侧时，之前的等式可以采用如下的形式：

$$L_S=L_m+L_{\gamma S}$$
$$L_R=L_m+L_{\gamma R}$$

6.7　耦合磁场中的能量

耦合磁场在机电能量变换的过程中占有重要的角色。从电源得到的能量储存在耦合磁场中，再由磁场储能转换为机械功。决定磁场能量、绕组电流和诸如自感、互感这些

参数之间的关系是非常重要的。耦合磁场储能的空间密度为：

$$w_m = \int \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B}$$

在线性介质中，磁导率 $\mu = B/H$ 是恒定的。因此，耦合磁场的能量密度等于$w_m = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2$。在磁场存在的区域对密度$w_m$积分就得到全部的能量。磁场能量可以表述成用电流和绕组电感（比如L_S、L_R、L_m和相似的量）构成的方程。线圈L_1和L_2间的互感用L_m或$L_{12} = L_m$表示。对于一个由两套绕组构成的系统，它的磁场能量等于$f(i_1, i_2, L_1, L_2, L_{12}) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2$。在这里省略上面声明的严谨证明。取而代之，可以想象出能量密度w_m的空间积分与$f(i_1, i_2, L_1, L_2, L_{12})$相关。能量密度空间积分包含每分钟无穷小体积 $\mathrm{d}V$ 内能量$\frac{1}{2}BH/\mathrm{d}V$ 的总和。考虑到 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S/\mathrm{d}x$，这个问题可以归结于计算积分$\left(\frac{1}{2}BH\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(B\mathrm{d}S)(H\mathrm{d}x)$。一般来讲，$(B\mathrm{d}S)$的积分结果是磁通，而$(H\mathrm{d}x)$的积分结果是磁动势 Ni，也就是电流（安培匝数）。因此，磁场能量方程包含 Φi 和Li^2形式的成分。

对于一个包含 N 套绕组的系统，耦合磁场的能量为：

$$W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \left(\int \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B}\right)\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} L_{ij}\, i_i\, i_j$$

在上式中，元素L_{ii}相当于绕组的自感，它们是正的。元素L_{ij}是互感，它们可能是正的，也可能是负的。通过引入磁链和电流矢量可以获得更具说明性的表达式：

$$\underline{i}^{\mathrm{T}} = [i_1, i_2, \cdots i_k, \cdots i_{N-1}, i_N]$$

$$\underline{\Psi}^{\mathrm{T}} = [\Psi_1, \Psi_2, \cdots \Psi_k, \cdots \Psi_{N-1}, \Psi_N]$$

结果为式（6.10），式中$\underline{L}$为考虑绕组系统的电感矩阵：

$$W_m = \frac{1}{2}\underline{i}^{\mathrm{T}}\underline{L}\underline{i} \tag{6.10}$$

问题（6.1）：考虑自感分别为 L_1 和 L_2 的两套绕组。互感系数会不会超过$(L_1 \cdot L_2)^{0.5}$?

解答（6.1）：两套绕组的互感为$L_{12} = k \cdot (L_1 \cdot L_2)^{0.5}$，式中 k 为耦合系数。k 的最大值为 1，取最大值时，不存在漏磁通，绕组的全部磁通穿过其他的绕组。因为耦合系数不可能超过 1，所以互感不可能超过$(L_1 \cdot L_2)^{0.5}$。

问题（6.2）：磁场能量的计算式$2W_m = \sum_j \sum_k L_{jk} i_j i_k$会不会得到负值？以两套绕组的系统为例证明。

解答（6.2）：上式给出了磁场能量，因此，它不可能是负值。在两套绕组的情况下，表达式可表示为：

$$W_m=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+L_{12}i_1i_2=\frac{1}{2}[L_1i_1{}^2+L_2i_2{}^2+2k\cdot(L_1\cdot L_2)^{0.5}i_1i_2]$$

通过引入符号$a=(L_1)^{0.5}i_1$和$b=(L_2)^{0.5}i_2$，表达式可变化为$2W_m=a^2+b^2+2k\cdot a\cdot b$。按要求证明无论电流密度$i_1$和$i_2$为何值，上式都不可能为负值。因为只有和式的第三项可能为负值，取负值时电流密度取相反的符号，有必要证明当 $k=1$ 时$2W_m\geqslant 0$。如果是这样，对任意 $k<1$，上面的表述都正确。当 $k=1$ 时，$2W_m=(a+b)^2$，这就完成了证明。

6.8　机电能量转换中的功率

对于耦合在磁场中的 N 套绕组系统，需要决定电气和机械端口的功率、功率损耗和机电能量变换的功率。电源通过电机电气端口供电，它由供给每个绕组的功率$p_k=u_k i_k$之和决定。

$$p_e=\sum\nolimits_k u_k i_k=\underline{i}^T\underline{u}=\underline{u}^T\underline{i} \tag{6.11}$$

因为电压平衡方程（6.7）给出了电压矢量，通过给出矩阵形式，电源功率可由电流矢量、电阻矩阵和电感矩阵组成的方程表示：

$$p_e=\underline{i}^T\left(\underline{R}\cdot\underline{i}+\frac{\mathrm{d}\underline{\Psi}}{\mathrm{d}t}\right)=\underline{i}^T\left(\underline{R}\cdot\underline{i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{L}\cdot\underline{i})\right)=\underline{i}^T\cdot\underline{R}\cdot\underline{i}+\underline{i}^T\frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t}\underline{i}+\underline{i}^T\underline{L}\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} \tag{6.12}$$

在这里忽略了耦合磁场中的损耗。绕组中的损耗也可以用矩阵形式表示。如果绕组电阻为R_k，电流为i_k，功率可由表达式$R_k i_k^2$决定。N 套绕组系统的全部绕组损耗由下式给出：

$$p_{Cu}=\sum\nolimits_k R_k i_k^2=\underline{i}^T\cdot\underline{R}\cdot\underline{i} \tag{6.13}$$

式中$\underline{R}$为一个 $N\times N$ 的方阵，主对角线为绕组电阻，其余的元素为零。

一部分电源提供的功储存在耦合磁场中。因为耦合磁场的能量由式（6.10）给出，所以描述磁场储能变化率的功率p_{wm}可由式（6.14）给出：

$$p_{wm}=\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\underline{i}^T\underline{L}\underline{i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\,\underline{i}^T}{\mathrm{d}t}\right)\underline{L}\underline{i}+\frac{1}{2}\underline{i}^T\left(\frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t}\right)\underline{i}+\frac{1}{2}\underline{i}^T\underline{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{6.14}$$

功率p_{wm}的表达式可以改写成更方便的形式。需要注意的是式（6.14）代表了三个标量的和，每个标量都是由电流矢量和系统电感矩阵相乘得到的。可以看出第一项和第三项的值是相等的。对任意标量$\underline{s}=s$（也就是 1×1 的矩阵），可以写成$\underline{s}=\underline{s}^T$。同时，电感矩阵是对称的，$L_{jk}=L_{kj}$，$\underline{L}=\underline{L}^T$。因此由上可得：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\underline{i}^T}{\mathrm{d}t}\right)\underline{L}\underline{i}=\left[\left(\frac{\mathrm{d}\,\underline{i}^T}{\mathrm{d}t}\right)\underline{L}\underline{i}\right]^T=\underline{i}^T\underline{L}^T\left(\frac{\mathrm{d}\,\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right)=\underline{i}^T\underline{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right)$$

通过引入这个替换到式（6.14），就得到了式（6.15）：

$$p_{wm}=\frac{1}{2}\underline{i}^T\left(\frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}t}\right)\underline{i}+\underline{i}^T\underline{L}\left(\frac{\mathrm{d}\,\underline{i}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{6.15}$$

等式（6.15）包含电流$\underline{i}$和电感$\underline{L}$的一阶导数。当转子关于定子有相对运动时矩阵会出现

变化。转动会导致转子和定子绕组间互感的变化。在某些情况下，转子运动会导致单个绕组自感的变化。式（6.15）中的电流矢量$\underline{i}$的导数是一个矢量，其中的元素是单个绕组电流的导数。当绕组与提供恒定电流的理想电流源接通时，绕组电流的导数为零。当绕组短接、连接到理想电压源或是连接到实际电流源或电压源，绕组电流的导数可能为非零值。

功率p_e中的p_{wm}决定了耦合磁场中储能W_m的增量。p_{Cu}部分是因为焦耳效应损耗在绕组导体中的功率。电源功率余下的为$p_e - p_{Cu} - p_{wm} = p_c$。余下的功率$p_c$就是通过涉及导体、磁路和耦合磁场的电磁过程转换为机械功率。对p_c积分就得到了机械功。功率p_c也被称为机电能量变换功率或是变换功率。在电动机模式下（见图5.8），功率在那样的参考方向下是正的。机电能量变换的正功率意味着电能被转换为机械能。在发电机模式下（见图5.9），功率转换反向，功率p_c像上面定义的一样，呈现负值。

因为

$$p_C = p_e - p_{Cu} - p_{wm}$$

然后考虑式（6.12）、式（6.13）和式（6.15），p_C可表示为：

$$p_C = \left(\underline{i}^T\underline{\underline{R}}\underline{i} + \underline{i}^T\frac{d\underline{\underline{L}}}{dt}\underline{i} + \underline{i}^T\underline{\underline{L}}\frac{d\underline{i}}{dt}\right) - (\underline{i}^T\underline{\underline{R}}\underline{i}) - \left(\frac{1}{2}\underline{i}^T\left(\frac{d\underline{\underline{L}}}{dt}\right)\underline{i} + \underline{i}^T\underline{\underline{L}}\left(\frac{d\underline{i}}{dt}\right)\right)$$

通过简单整理这个表达式可以获得：

$$p_C = \frac{1}{2}\underline{i}^T\frac{d\underline{\underline{L}}}{dt}\underline{i} \tag{6.16}$$

根据后面的表达式，只要电感矩阵$\underline{\underline{L}}$中的至少一个元素变化，机电能量变换就可能发生。通常转子相对于定子位置的变化就会导致自感或互感的变化。在旋转电机中，转子位置角θ_m与机械角速度相关，$\Omega_m = d\theta_m/dt$，功率变换的表达式可以采用（6.17）的形式：

$$p_C = \frac{1}{2}\underline{i}^T\frac{d\underline{\underline{L}}}{dt}\underline{i} = \frac{1}{2}\underline{i}^T\frac{d\underline{\underline{L}}}{d\theta_m}\underline{i}\cdot\frac{d\theta_m}{dt} = \frac{\Omega_m}{2}\underline{i}^T\frac{d\underline{\underline{L}}}{d\theta_m}\underline{i} \tag{6.17}$$

式（6.17）给出了依赖转子运动θ_m导致电感矩阵一个或更多元素变化的旋转电机的机电能量变换。

当变换器运行在电动机模式下时，机电能量变换的功率传递给机械子系统。在机械子系统内，一小部分机械功率p_c消散在机械损耗（比如摩擦）里，然后余下的功率通过轴传递给工作机器（机械负载）。在电动机模式下，驱动涡轮的机械功率通过轴传递到机电能量变换器，其中的一部分因机械损耗消耗掉。余下的功率变换为电功率，扣除掉电气子系统的损耗，再通过绕组端线传递给电气负载。

6.9 转矩表达式

由静止定子和运动转子构成的旋转电机，两个圆柱体有一样的轴线。转子相对于定子以转速Ω_m旋转，转子每一瞬间关于定子的位置由位置角θ_m决定。电机有 N 套绕组，一部分绕组布置在定子上，余下的绕组布置在转子上。因为自感和互感取决于定子和转子的相对位置，所以电感矩阵$\underline{\underline{L}}$中的元素也是位置角的函数。

转速为：

$$\Omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$$

电感矩阵可由下列表达式表示：

$$\underline{L} = f_1(t) = f_2(\theta_m)$$

耦合磁场作用在定子和转子上，并产生电磁力。耦合力产生电磁转矩。转矩T_{em}作用在转子上，同时幅值相同、方向相反的转矩$-T_{em}$作用在定子上。因为定子不能运动，仅有转子可以运动。转矩T_{em}通过转子和轴传递到工作机器或是驱动涡轮。

在电动机模式下，转矩作用方向与转动方向一致，它会增加旋转的速度Ω_m。因此，功率$p_C = T_{em}\Omega_m$是正的。转矩T_{em}作用在运动方向上，它通过轴传递到工作机器，它趋向起动或是加速它的运动。

在发电机模式下，转矩T_{em}作用方向与运动方向相反，因此功率$p_C = T_{em}\Omega_m$是负的。机电能量变换的功率是负值意味着变换的方向改变，即驱动涡轮的机械功变换为电能。作用方向与运动方向相反，转矩T_{em}通过轴传递到驱动涡轮并且抵制轴旋转，试图降低转速。

决定电磁转矩的表达式是很有意义的。因为功率等于转矩乘以转速，式（2.84）的变换功率可由下式代替：

$$p_C = \Omega_m\left(\frac{1}{2}\underline{i}^T\frac{d\underline{L}}{d\theta_m}\underline{i}\right) = T_{em}\Omega_m$$

式中T_{em}为式（6.18）决定的电磁转矩：

$$T_{em} = \frac{1}{2}\underline{i}^T\frac{d\underline{L}}{d\theta_m}\underline{i} \tag{6.18}$$

这个结论可以用连接到理想电流源具有 N 套绕组的旋转变换器的例子验证。绕组电流由电源电流决定，因此是恒定的。在式（5.6）的基础上，当磁场存在于线性介质中时，电源的功均匀分布到机械功和磁场能量的增加，因此：

$$dW_m = dW_{meh} = T_{em}d\theta_m$$

这导致转矩表达式为

$$T_{em} = \frac{dW_m}{d\theta_m}$$

磁场的能量由式（6.10）决定。因此，转矩表达式可采用如下的形式：

$$T_{em} = \frac{d}{d\theta_m}\left(\frac{1}{2}\underline{i}^T\underline{L}\underline{i}\right)$$

按照上面的假设，绕组由理想电流源供电，所以电流密度是恒定的。正因为如此，上面表达式中只有电感矩阵是变为位置角θ_m函数的元素。所以，转矩表达式可采用如下形式：

$$T_{em} = \frac{1}{2}\underline{i}^T\frac{d\underline{L}}{d\theta_m}\underline{i}$$

只要电感矩阵中至少一个元素随位置角θ_m函数变化就会存在电磁转矩。这可能是绕

组自感或是两套绕组间互感的变化。转子改变相对静止定子的位置，电感随之改变。因此对于有 N 套绕组的系统，电磁转矩由式（6.19）给出：

$$T_{\mathrm{em}}=\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}}\left(i_{\mathrm{k}}\,i_{\mathrm{j}}\,\frac{\mathrm{d}\,L_{\mathrm{jk}}}{\mathrm{d}\,\theta_{\mathrm{m}}}\right)\tag{6.19}$$

问题（6.3）：确定绕组间互感变化的过程，一套绕组在定子上，另一套绕组在转子上。

解答（6.3）：因为转子旋转，定子和转子参考轴线间的夹角θ_{m}变化。为了不失普遍性，可以认定$\theta_{\mathrm{m}}=0$ 对应两套绕组磁场轴线共线时转子位置。这样，定子绕组产生磁场的磁感线与转子绕组线匝的轮廓面垂直。定子磁通穿过转子绕组的部分为最大值。在 $\theta_{\mathrm{m}}=0$ 时两套绕组间的互感是最大的。当转子旋转时，磁感线与转子表面之间的夹角不在是 $\pi/2$，而是 $\pi/2-\theta_{\mathrm{m}}$。因为磁通由这个角的正弦值决定，所以互感的变化由函数 $\cos\theta_{\mathrm{m}}$决定。因此，$L_{\mathrm{SR}}=L_{\mathrm{m}}\cos\theta_{\mathrm{m}}$。

问题（6.4）：举例说明圆柱形电机定子绕组的自感随转子位置变化。

解答（6.4）：定子绕组自感取决于线圈匝数和磁阻。磁路的磁阻由定子铁心的磁阻、转子磁路的磁阻和气隙磁阻组成，磁通从定子磁路穿到转子磁路，反之亦然。转子磁路主要是圆柱形的，有一个圆形的横截面。通过去掉转子侧一部分铁，横截面被拉长，类似于椭圆形。椭圆形的转子和圆柱形的定子产生变化的气隙。因此，磁通在椭圆形转子长直径处遇到的磁阻要远小于短直径处遇到的磁阻。因为这个原因，在转子旋转时定子磁通会遇到变化的磁阻。反过来，自感$L_{\mathrm{S}}=N_{\mathrm{S}}^{2}/R_{\mu}$也会变化。

6.10　机械子系统

旋转电机运动的部分是转子、轴和轴承的磁路和电路。轴承通常安装在轴的两端。它们保持转子轴固定和与定子圆柱体轴线的共线性。有的电机转子上会安装特殊的风扇，以增强气流，促进冷却（自冷式电机）。除此之外，转子经常潜入传感器来测量转子的转速、位置和温度。在某些情况下，转子会包含永磁体或是半导体二极管。在构建电机机械子系统的模型时，这些细节不需要考虑，转子被认为是已知质量和尺寸和均匀圆柱体。因为电磁力的作用，转矩T_{em}作用在转子上。转子通过轴与工作机器和驱动涡轮连接。轴传递机械转矩T_{em}。

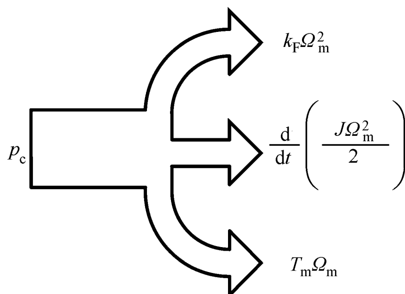


图 6.5　旋转电机机械子系统的功率平衡。获得的机械功率p_{c}克服机械子系统的损耗和动能增量，再输出机械功率$T_{\mathrm{em}}\Omega_{\mathrm{m}}$

在机械子系统中存在由于摩擦和空气流通产生的损耗。在电机的旋转部分中，一部分能量以动能形式储存起来。正因如此，轴输出的机械转矩T_{m}不等于作用在转子上的机械转矩T_{em}。如图 6.5 所示，机电能量变换的功率p_{c}分为机械子系统损耗的功率、储存的功率和输出功率$p_{\mathrm{m}}=T_{\mathrm{m}}\Omega_{\mathrm{m}}$。

6.11　机械子系统中的损耗

机械子系统损耗的能量包括：需要克服的转子面对的空气摩擦引起的阻力；需要克服的轴承摩擦和其他性质的、次重要的运动阻力。机械子系统中的功率损耗随转速函数变化（见图 6.5）。这个变化可能是关于转速非常复杂的函数。因为机械子系统中的损耗通常是很小的，所以引入一个复杂的模型是没有必要的，其实更普遍的是假设摩擦转矩与转速成正比，可以由表达式$k_F\Omega_m$，导致机械子系统中功率损耗的表达式变为：

$$p_{\gamma m}=k_F\Omega_m^2 \tag{6.20}$$

这个模型出现在大量涉及电机的书和文献中。但是，还存在电机和应用不适用这个机械子系统损耗模型。

图 6.5 所示的机械子系统损耗模型在大部分电机是直流电机时得到了充分的发展，更详细的讨论将在随后的章节中给出。这类电机的定子建立静止的磁场，并且容纳了旋转的转子。转子磁路磁感应强度由旋转速度Ω_m决定。转子磁力中因涡流引起的损耗为：

$$p_{Fe}=k_V\Omega_m^2$$

损耗p_{Fe}除以转速Ω_m就得到转矩$T_{Fe}=p_{Fe}/\Omega_m$，此转矩阻碍转子运动并且试图使转速减小。这个转矩等于：

$$T_{Fe}=\frac{p_{Fe}}{\Omega_m}=k_V\Omega_m$$

获得的运动阻转矩T_{Fe}与模型$p_{Fe}=k_V\Omega_m^2$相对应，经常用于文献中㊀。

当电机运行速度在 1000rad/s 以上时，会存在大量的空气阻力。空气阻力与转速的平方成正比，因此，因为空气摩擦引起的功率损耗应该由下列表达式表示：

$$p_{\gamma m}=k_F\Omega_m^3$$

6.12　动能

旋转物体聚集的能量取决于转动惯量 J。转子可以体内密度相同的均匀圆柱体代表。如果半径为 R，质量为 m，则合转动惯量为 $J=\frac{1}{2}mR^2$。转动惯量为 J、转速为Ω_m

㊀ 直流电机转子磁场的损耗p_{Fe}属于磁路损耗，即铁耗。虽然如此，因为p_{Fe}出现运动阻力矩T_{Fe}。需要强调的是，在带有永磁体的交流电机中，即使绕组中没有电流，运动阻力矩T_{Fe}也会出现。运动阻力矩T_{Fe}不属于机械损耗，因为既不是由轴承摩擦也不是由空气摩擦引起的，它是一种特殊的电摩擦。因此，决定功率p_{Fe}是否应该归类为运动阻力损耗或是磁场损耗时会陷入困境。如果所有阻碍运动、使转速减小的损耗都被归类为运动阻力损耗，不管它们的起因是否是摩擦，那么直流电机转子磁路的损耗也应该被归类为运动阻力损耗。相同的困境也出现在转子为永磁体的同步电机的定子铁耗的归类问题上。

的转子的功能W_k为$W_k=\frac{1}{2}J\Omega_m^2$。为了增加动能，需要提供功率 $d(W_k)/dt=J\Omega_m d\Omega_m/dt$。因此，增加旋转速度会涉及增加旋转物体的能量。然而为了降低旋转速度，这个能量需要被消除（通过提供负功率）。由于这一点，在加速阶段，通过电机轴获得的转矩T_m比电磁转矩T_{em}小，因为功率p_C的一部分和转矩$T_{em}=p_C/\Omega_m$的一部分用于增加旋转体的功能。因为同样的原因，在减速阶段，转矩T_m会超过电磁转矩T_{em}。

图 6.5 所示的功率平衡可以由解析式表示。考虑最普遍的仅有一个机械端口（即只有一根轴）的机电能量变换器，机械功率由下式给出：

$$p_m=T_m\Omega_m$$

动能为：

$$W_k=\frac{1}{2}J\Omega_m^2$$

电能的变化率为：

$$\frac{dW_k}{dt}=J\Omega_m\frac{d\Omega_m}{dt} \tag{6.21}$$

从机电能量变换的功率p_C开始，一部分功率以机械子系统损耗的形式消耗式（6.20），其他部分改变动能并且改变旋转速度式（6.21），因此，轴上可得到的机械功率（输出功率）由式（6.22）给出：

$$p_c=\Omega_m T_{em}=\frac{dW_k}{dt}+p_{\gamma m}+p_m=J\Omega_m\frac{d\Omega_m}{dt}+k_F\Omega_m^2+T_m\Omega_m$$

$$p_m=p_c-J\Omega_m\frac{d\Omega_m}{dt}-k_F\Omega_m^2 \tag{6.22}$$

6.13 机电子系统的建模

式（6.22）可以除以转子角速度Ω_m以得到决定转矩T_m的式（6.23）。比转矩通过轴传递给工作机器。

$$T_m=T_{em}-J\frac{d\Omega_m}{dt}-k_F\Omega_m \tag{6.23}$$

在电动机模式下，电机以转矩T_m作用于工作机器以支持其旋转。同时，工作机器以转矩$-T_m$反作用于转子运动。作用与反作用转矩振幅相同，方向相反。转矩和转速的参考方向如图 6.6 所示。之前的等式可以以下形式表示：

$$J\frac{d\Omega_m}{dt}=T_{em}-T_m-k_F\Omega_m \tag{6.24}$$

此式代表旋转运动的牛顿方程。这个等式是电机机械子系统的模型。在这个等式中，转矩T_m和摩擦转矩一起反抗电磁转矩T_{em}。当电磁转矩占优（$T_{em}>T_m+k_F\Omega_m$）时，转速Ω_m上升。如果$T_{em}<T_m+k_F\Omega_m$，转速下降。在稳态时，电磁转矩T_{em}等于所有阻碍旋转的转

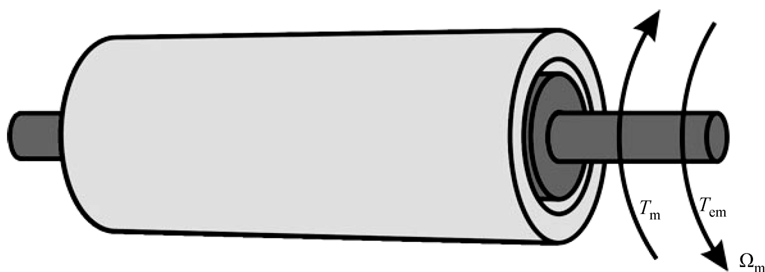


图 6. 6　电磁转矩和旋转速度的参考方向

矩的和。稳态运行时可由下列方程描述：

$$\frac{d\,\Omega_m}{dt}=0,T_{em}=T_m+k_F\Omega_m$$

图 6. 6 给出了电磁转矩T_{em}和工作机器的转矩T_m的参考方向，T_m反抗旋转。相对于指定的参考方向，带正号的转矩对应电动机模式。在发电机模式下，当机械功变换为电能时，上述两个转矩的意义和符号颠倒。也就是说，在发电机模式下，转矩T_{em}为负号并且反抗旋转，同时T_m趋于支持旋转。在这样的情况下，从涡轮获得转矩T_m并且通过轴提供给发电机，使转子旋转。在实际中，转矩T_{em}和T_m的参考方向相比于图 6. 6 所示的参考方向可以不同。在这本书里，理论考虑和问题解决所用的参考方向都与图 6. 6 所标示的方向一致。因此，在电动机模式下，$T_{em}>0$，$T_m>0$，然后在发电机模式下，$T_{em}<0$，$T_m<0$。作为例外，可能会定义发电机转矩$T_G=-T_{em}$，在发电机模式下假定是正值。

机械子系统的分析和建模应用于仅有一个机械端口的机电能量变换器。大部分电机的运动部分为只有一个自由度的转子。它们围绕圆柱形定子的轴线旋转。仅有一根轴附加在转子上，被布置在旋转的轴线上。转子运动以独一无二的转速为特点，它取决于驱动转矩和运动阻力矩。想象、设计和生产运动部分不止有一个自由度的机电能量变换器是可能的，这涉及不同的转速和相应的作用在不同方向的力和转矩。这种变换器在本书中不讨论。

6. 14　机电能量转化装置中的功率平衡

图 6. 7 显示了 N 套绕组的旋转功率能量变换器的功率流动，这 N 套绕组布置在固定的圆柱形定子和旋转的圆柱形转子上。假定变换器是以耦合磁场运行的。图中所提出的相关功率可由下列公式解释。

电机电端口的功率（也被称为出入功率㊀或是电源传递到变换器的功率）为：

㊀ 对电动机，电功率被提供给电机，因此它被认为是输入。机械功率在轴上获得，它被认为是输出。当电机运行在发电机模式下时，机械功率被认为是输入，然而电功率被认为是输出。

$$p_e = \underline{i}^T \underline{u}$$

因为焦耳效应损耗在绕组中的功率代表电气子系统的损耗。这部分功率被称为铜耗，它等于：

$$p_{Cu} = \underline{i}^T \underline{Ri} = \sum_k R_k i_k^2$$

决定耦合磁场能量增量的功率为：

$$p_{wm} = \frac{dW_m}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\underline{i}^T \underline{Li})$$

损耗在磁路中的功率，也被称为铁耗，数量为：

$$p_{Fe} = \sigma_H B^2 f + \sigma_V B^2 f^2$$

它在开始的考虑中被忽略了。

机电能量变换的功率为：

$$P_c = \frac{1}{2}\underline{i}^T \frac{d\underline{L}}{dt}\underline{i}$$

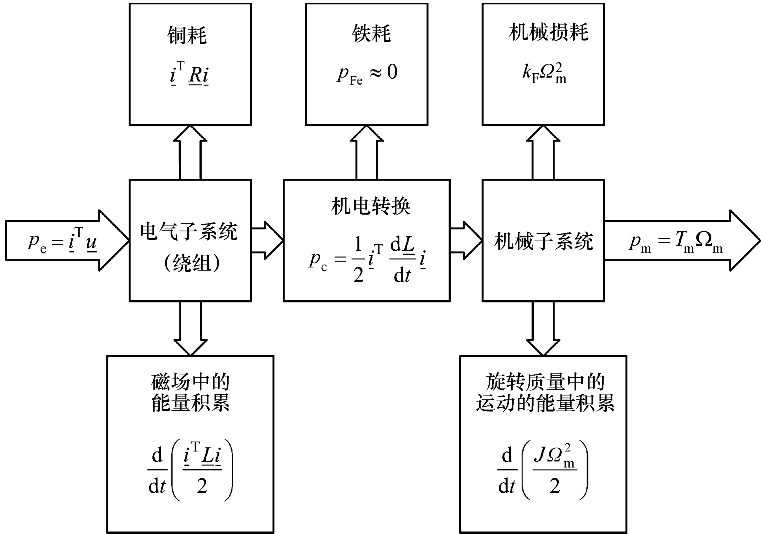


图 6.7　机电能量变换过程的框图

决定旋转部分动能增量的功率代表机械子系统的储能，它等于：

$$p_{wk} = \frac{dW_k}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(J\Omega_m^2)$$

机械子系统的功率损耗（旋转导致的损耗或是运动阻力损耗）等于：

$$p_{\gamma m} = k_F \Omega_m^2$$

电机机械端口的功率也被称为输出功率或轴功率，它等于：

$$p_{m} = T_{m}\Omega_{m}$$

6.15 数学模型方程

在先前的考虑和介绍的近似的基础上，有 N 套绕组的电机的数学模型包括：

1）N 个微分方程表示电压平衡式（6.7）；

2）建立电流和磁链关系的电感矩阵（6.9）；

3）电磁转矩表达式（6.19）；

4）牛顿运动方程（6.24）。

电压平衡的微分方程由下表达式给出：

$$\underline{u} = \underline{R} \cdot \underline{i} + \frac{\mathrm{d}\,\underline{\Psi}}{\mathrm{d}t} \tag{6.25}$$

磁链和电流的关系由非稳态电感矩阵给出：

$$\underline{\Psi} = \underline{L}(\theta_{m}) \cdot \underline{i} \tag{6.26}$$

电磁转矩由以下等式决定：

$$T_{em} = \frac{1}{2}\underline{i}^{T}\frac{\mathrm{d}\,\underline{L}}{\mathrm{d}\,\theta_{m}}\underline{i} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(i_{k}i_{j}\frac{\mathrm{d}L_{jk}}{\mathrm{d}\theta_{m}}\right) \tag{6.27}$$

根据式（6.24），机械子系统的瞬态过程由牛顿运动微分方程决定。旋转速度的变化由下面表达式决定：

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_{m}}{\mathrm{d}t} = T_{em} - T_{m} - k_{F}\Omega_{m} \tag{6.28}$$

以上 4 个表达式定义了基于耦合磁场的旋转机电能量变换器的一般模型。这个模型是在 4 个先前提到的近似基础上导出的。在 4 个近似中包括假设铁磁材料是线性的，并且忽略掉铁耗。

电感矩阵是非稳态的矩阵。一般来说，矩阵中的元素可能是位置角、时间或是磁链、电流的函数，它们会因为铁磁材料的非线性和磁场饱和改变自感和互感。在下面的考虑中，认为铁磁材料是线性的，并且电感矩阵和其中的元素仅仅取决于位置角 θ_{m}。这个近似在绝大部分情况下是合理的，而且不会对理解电机运行和推导电机特性造成障碍。

在式（6.27）中需要注意的是，仅在电感矩阵中至少一个元素随位置角 θ_{m} 变化时。机电能量变换才可能实现，这个变化既可能是绕组的自感也可能是两套绕组间的互感。

当电机有 N 套绕组时，表达式（6.25）包含 N 个电压平衡微分方程，表达式（6.26）给出绕组电流和与之对应的磁链间的关系，式（6.27）给出电磁转矩，式（6.28）是定义转速变化的牛顿微分方程。因此，模型包含 $N+1$ 个微分方程和相同数量的稳态变量。

第 7 章　单馈和双馈变换器

在这章，将分析和解释单馈和双馈机电能量变换器的例子。在绕组中通入可调频率的直流电和交流电时，分析转矩的变化。此外，介绍解释绕组中通入交流电产生的旋转磁场。利用先前的考虑，提出关于直流电机、感应电机和同步电机的一些基本运行原理。

如果电机有一个或是更多的自感L_{kk}以位置角θ_m的函数变化，那么这类电机通常也被称为单边供电变换器或是单馈电机。稍后将说明这类电机仅在定子绕组由电源供电时能运转和完成机电能量变换。当然也可以设想单馈电机仅有转子绕组与电源连接，但是这种情况是极少的。存在的单馈电机仅有定子有绕组，转子不包含绕组且磁路的磁阻取决于磁通方向。

如果电机有一个或是更多的互感L_{ij}以位置角θ_m的函数改变，那么这类电机被称为双边供电电机或是双馈电机。双馈电机在定子和转子上都有绕组。这个规则的例外是转子上有永磁体的同步电机和定子上有永磁体的直流电机，这将在稍后考虑。永磁体对建立磁通的影响等价于代替磁体安置的通直流电的绕组的影响。因此，定子绕组由电源供电、转子安装永磁体的电机被归类为双馈电机。这同样适用于永磁直流电机。

在大部分情况下，双馈电机的绕组由两个不同的电源供电，因此，存在适用于定子和转子的电源。这种双边电源供电就是将这类电机称为双馈电机的原因。

有的电机被定义为单馈或是双馈的都不是最接近的。一个例子就是感应电机，将在这本书的稍后章节讨论。感应电机在定子和转子上都有绕组。忽略掉副效应和寄生效应，可以说感应电机定子绕组和转子绕组的自感是恒定的，然而互感是位置角的函数，这可能是将感应电机归纳为双馈电机的基础。虽然如此，感应电机仅有定子由电源供电，转子绕组短路（鼠笼）并不与任意电源相连。因为感应电机仅从定子侧供电，所以不能将其定义为双馈电机。另一方面，存在某些感应电机的转子绕组单独的供电，这类感应电机确实属于双馈电机。相似的困境也出现在将同步电机归类为单馈电机还是双馈电机的问题中。同步电机转子上是永磁体而不含任意转子绕组。因此，很难决定定子和转子绕组间的变化互感，因为转子不含任意绕组。另一方面，永磁体可以用一片电流表示或是用带直流励磁的绕组表示。因此，有将永磁同步电机定义为双馈电机的基础(见图 7.1)。

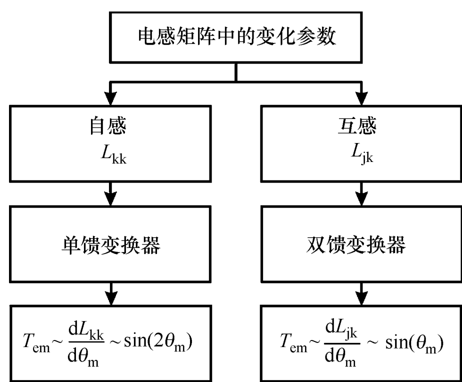


图 7.1　单馈电机和双馈电机的性质

7.1　单馈变换器的分析

图 7.2 展示了一台基本的单馈电机。定子绕组有N_1匝线圈，其等效磁阻为R_1，有电流源 $i(t)$ 供电。取决于磁通和电流的变化，绕组端线间存在电压$u_1(t)$。磁路由固定的定子部分组成，其磁阻是不变的。可以认为定子中的磁感应强度B_1在磁路横截面上式均匀的。因此，一匝线圈的磁通Φ_1可以用B_1S_1决定，其中S_1为定子的横截面积。

转子不断旋转，它离水平位置的角位移用θ_m表示。磁阻取决于磁通方向，由这样的方式构成转子磁路。转子不是圆柱形的，相反，它有凸极。当转子处于水平位置时，定子磁通穿过相当大的低磁导率的气隙（图 7.2 中 A 表示）。穿过气隙后，磁通到达高磁导率铁磁材料构成的转子磁路。然后，磁通离开转子磁路（图 7.2 中 B 所示），再次穿过气隙并进入定子磁路。磁路的合成磁阻就相当高。处于垂直位置的转子，合成磁阻要

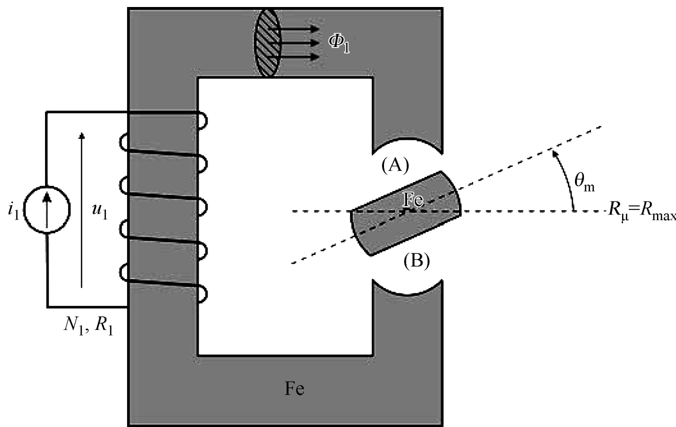


图 7.2　拥有变化磁阻的单馈变换器

低很多。磁感线穿过非常小的气隙，磁阻也相当的低。定子绕组的自感为$L_1 = N_1^2/R_\mu$，其中R_μ表示定子磁通路径上的磁阻。因为磁阻为位置角的函数，所以自感也是变化的，以满足机电能量变换的要求。

对于考虑的电机，磁阻是变化的。正因为如此，这类电机被称为磁阻电机，电机中产生的转矩被称为磁阻转矩。

7.2 自感的变化

图 7.2 给出了带有变化磁阻的单馈变换器。这种变换器仅有一套绕组，因此，电感矩阵仅含有一个元素，即定子绕组自感$L_1(\theta_m)$。变换过程的建模需要了解下面方程式：

$$L_1(\theta_m) = \frac{N_1^2}{R_\mu(\theta_m)}$$

磁阻R_μ为磁动势$F_1 = N_1 i_1$与单匝线圈磁通$\Phi_1 = B_1 S_1$的比值。定子绕组的磁链为$\Psi_1 = N_1 \Phi_1$。按照采用的符号，磁心的磁通也就是代表线匝的轮廓穿过的磁通，用 Φ 表示。另一方面，绕组磁链用 Ψ 表示。一个磁路横截面面积为S_{Fe}，气隙厚度为δ，铁心磁感应强度 H 非常小，其磁阻为$R_\mu = \delta/\mu_0 S_{Fe}$。

图 7.2 所给的变换器的磁阻R_μ在转子位置垂直时有最小值。这发生在$\theta_m = \pi/2$ 或是$\theta_m = 3\pi/2$ 时。当转子处于水平位置时，磁阻处于最大值，这时$\theta_m = 0$ 或$\theta_m = \pi$，如图 7.3 所示。在转子旋转的过程中，图 7.3 中磁路的变化可以以假设是气隙的变化来建模。可以推出$R_\mu(\theta_m)$是以 π 为周期的周期函数。正因为如此，$L_1(\theta_m)$也是以 π 为周期的周期函数。自感的实际变化取决于定子和转子磁路的形状。

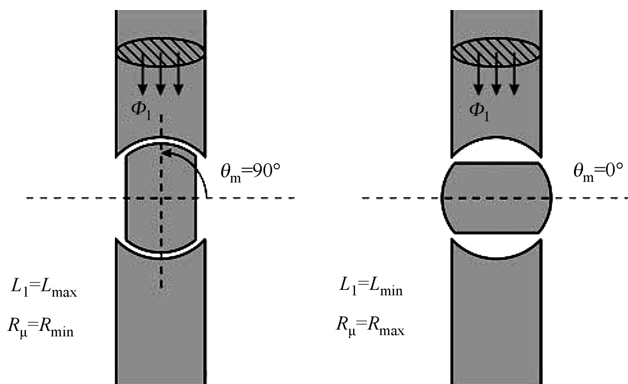


图 7.3 磁阻变化和绕组自感的建模

为了促进分析并得到结论，函数$L_1(\theta_m)$可以用下面的三角函数近似：

$$L_1(\theta_m) \approx L_{min} + \frac{L_{max} - L_{min}}{2}(1 - \cos 2\theta_m)$$

上式满足条件$L_1(\pi/2)=L_{max}$，$L_1(3\pi/2)=L_{max}$，$L_1(0)=L_{min}$，$L_1(\pi)=L_{min}$。因此，在转子转动的一圈中，电感有两个极小值和两个极大值。函数$L_1(\theta_m)$可以由式（7.1）给出的形式表示：

$$L_1(\theta_m)=\frac{1}{2}(L_{min}+L_{max})-\frac{1}{2}(L_{max}-L_{min})\cos 2\theta_m \tag{7.1}$$

7.3　功率和转矩的表达式

确定图 7.2 所示的单馈变换器的电磁转矩和机电能量变换功率是很有意义的。当定子绕组与电流源$i_1(t)$连接时，耦合磁场储存的能量为

$$W_m=\frac{1}{2}L_1(\theta_m)\cdot i_1^2$$

因为绕组与电流源相连，所以转矩可以用磁场能量W_m的一阶导数确定。通过使用式（7.1）的自感$L_1(\theta_m)$表达式，电磁转矩由式（7.2）确定：

$$T_{em}=\frac{dW_m}{d\theta_m}=\frac{1}{2}i_1^2\frac{dL_1}{d\theta_m}=\frac{1}{2}i_1^2(L_{max}-L_{min})\sin 2\theta_m \tag{7.2}$$

获得的转矩与电感最大值最小值的差值、电流的平方和位置角两倍的正弦成正比。因为磁通与电流成正比，所以电磁转矩也可以用磁通平方的函数表示：

$$T_{em}\sim i^2\sim \Phi^2 \tag{7.3}$$

在位置角$\theta_m=\pi/4$和$\theta_m=5\pi/4$时得到电磁转矩的最大值，当$\theta_m=\pi/2$、$\theta_m=3\pi/2$、$\theta_m=0$和$\theta_m=\pi$时，转矩等于零。当定子电流不变时，$i_1(t)=I_1$，转子以恒定转速Ω_m运动，转矩与函数$\sin(2\Omega_m t+\theta_0)$成正比，其平均值等于零。正因如此，机电能量变换的功率的平均值也等于零。换句话说，当绕组中通入恒定（直流）电流时，图 7.2 所示的变换器不能实现机电能量变换，因为平均转矩和一个循环中的功率都等于零。

当绕组中通入交变电流时，可以获得平均值不等于零的转矩和功率。对角频率为ω_s、幅值为I_m、初始相位为$-\varphi$的电流，瞬时电流平方值为：

$$i_1^2=[I_{max}\sin(\omega_s t-\varphi)]^2=\frac{I_{max}^2}{2}(1-\cos(2\omega_s t-2\varphi))$$

在式（7.2）的基础上，绕组中通入交变电流的单馈变换器的电磁转矩为

$$T_{em}=\frac{I_{max}^2}{4}(1-\cos(2\omega_s t-2\varphi))\cdot(L_{max}-L_{min})\sin 2\theta_m$$

引入常数：

$$K_m=\frac{I_{max}^2}{8}(L_{max}-L_{min})$$

电磁转矩的表达式可以变成如下的形式：

$$\begin{aligned}T_{em}&=2K_m\sin 2\theta_m-2K_m\cos(2\omega_s-2\varphi)\sin 2\theta_m\\&=2K_m\sin 2\theta_m-K_m\sin(2\theta_m+2\omega_s t-2\varphi)-K_m\sin(2\theta_m-2\omega_s+2\varphi)\end{aligned}$$

因为转子以恒速转动，所以转子的位置可由表达式$\theta_m(t)=\Omega_m t+\theta_0$表示。考虑到$\theta_m(0)=\theta_0=0$，转子位置可以取值$\theta_m(t)=\Omega_m t$，因此，转矩等于：

$$T_{em}=2K_m\sin 2\Omega_m t-K_m\sin(2\Omega_m+2\omega_s t-2\varphi)-K_m\sin(2\Omega_m-2\omega_s t+2\varphi) \qquad (7.4)$$

上式的第一项是一个调和函数，其平均值等于零。相同的结论也适用于第二项，除了$\Omega_m+\omega_s=0$的情况。如果$\Omega_m=\omega_s$，第三项有非零的平均值。因此，如果定子电流的角频率等于旋转的角频率，可以获得平均值不为零的转矩。转矩也取决于电流的初始相位。通过选择相应的相位，可以实现正的或是负的转矩，当$\Omega_m=\omega_s$且$\varphi=3\pi/4$时，电磁转矩的平均值为：

$$T_{av}=\frac{I_{max}^2}{8}(L_{max}-L_{min})$$

在初始相位为$\varphi=\pi/4$时，电磁转矩的平均值为：

$$T_{av}=-\frac{I_{max}^2}{8}(L_{max}-L_{min})$$

需要注意的是所考虑电机的运行是建立在变流变化和转子位置同步的基础上的。也就是说，交变电流需要有与转子转速Ω_m相等的角频率ω_s。换句话说，机械现象和电气现象需要同步。

问题（7.1）：如果电流i_1不变，证明当转子停在$\theta_m=\pi/2$位置时，转子处于稳定平衡；在$\theta_m=0$时，转子处于不稳定平衡。

解答（7.1）：式（7.2）给出的电磁转矩与$\sin(2\theta_m)$成正比。如果转子停在$\theta_m=\pi/2$位置，电磁转矩等于零。在转子旋转正方向上假设有一个小位移$\Delta\theta$，使转子处于$2\theta_m=\pi+2\Delta\theta$的新位置，其中$\sin(2\theta_m)<0$。这是会产生一个负的转矩，试图使转子回到先前的位置。当转子向反方向运动一个小位移$\Delta\theta$时，会产生一正的转矩，趋于使转子回到先前的位置。当转子停在$\theta_m=0$的位置时，平衡是不稳定的。在正方向上假设有个小位移$\Delta\theta$会导致正转矩的产生，转矩与元素$\sin(\Delta\theta_m)$成正比。正转矩趋于增加初始位移并驱使转子远离初始位置。如果在反方向假设一个小位移$\Delta\theta$，偏移也会逐渐增加。

问题（7.2）：如果交变电流的角频率$\omega_s\neq\Omega_m$，可否实现转矩的平均值不为零？

解答（7.2）：在式（7.4）的基础上，在电流角频率$\omega_s=-\Omega_m$时也能获得平均值非零的转矩。

7.4 双馈变换器的分析

运动和静止部分都有绕组的双馈电机如图7.4所示。定子含有磁路和N_1匝线圈的绕组，电阻为R_1。定子绕组中的电流为$i_1(t)$，绕组端线间的电压$u_1(t)$取决于磁链和电流的变化。转矩拥有圆柱形磁路和嵌入的阻值为R_2的绕组，通入电流为$i_2(t)$。取决于磁链和转子电流的变化，转子绕组端线间的电压为$u_2(t)$。定子和转子间的电磁耦合由变化的互感实现。

磁感线的一部分代表定子绕组的磁通，它们穿过转子磁路和转子绕组，这部分磁通称为互感磁通。因为转子是圆柱形的，所以在每个方向上磁阻都一样，因此也被称为各向同性。因为气隙是不变的，所以转子的旋转不会引起定子磁通路径上磁阻的任何变化。所以，定子的自感是不变的。

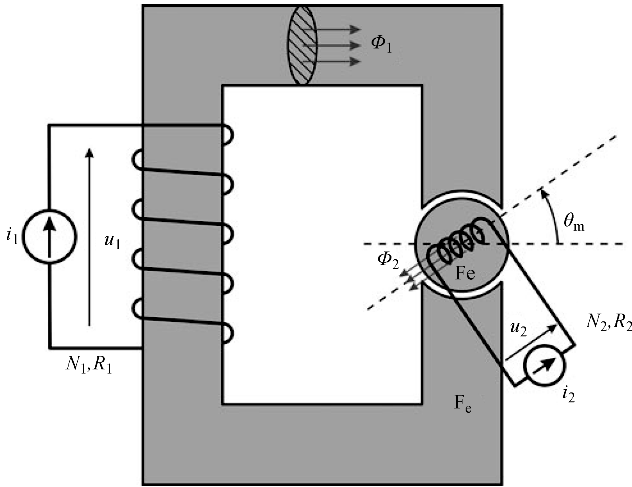


图 7.4　带耦合磁场的双馈机电能量变换器

对于图 7.4 所示的定子磁路的特别形式，转子自感L_2将会在转子旋转的过程中变化。自感的变化不是双馈变换器的主要性质。不过，L_2的变化可以简要说明一下。转子磁通的方向由转子绕组磁场轴线的位置决定，即位置角θ_m。这个角度决定转子磁轴线与水平轴线间的位移。随着转子旋转，转子磁通面对的磁阻取决于转子位置θ_m。也就是说，在$\theta_m=\pi/2$时，转子磁通穿过相当小的气隙并进入定子磁路。当$\theta_m=0$时，转子磁通从转子磁路进入周围低磁导率、高磁阻的空间。在$\theta_m=\pi/2$时转子磁通穿过气隙的路径相比于$\theta_m=0$时转子磁通穿过的气隙路径要短。因此，转子的磁阻和自感都取决于转子位置θ_m。L_2的变化取决于转子磁路的形状。假设定子磁路修改为牢牢包围转子圆柱体的形式，电感L_2的变化将小的多。当定子和转子磁路都是圆柱形（见图 5.10）时，转子自感保持恒定，不依赖于转子位置。

在双馈变换器随后的分析中，转子自感的变化作为位移θ_m的函数将被忽略，且假定$L_2=\text{const}$。

7.5　互感的变化

定子和转子绕组间的互感取决于转子位置θ_m。当转子处于转子次轴线水平的位置时，定子绕组和转子绕组的次轴线垂直。定子的磁通线不影响转子线匝中的磁通，转子

的磁通线也不影响定子线匝中的磁通。因此，在转子轴线位于水平位置时，互感L_{12}等于零。另一方面，在$\theta_m=\pi/2$和$\theta_m=3\pi/2$时，绕组间的耦合磁场最强，两套绕组的磁场轴线在同一条线上，互感L_{12}达到最大绝对值L_m。互感的符号取决于两套绕组磁场轴线的相对位置。这个问题在物理上解释为磁通是相加还是相减。当磁场轴线在相同的方向时，一套绕组中的正电流趋于增强另一套绕组中的磁通。当定子和转子磁场轴线相反时，一套绕组中的正电流趋于减小另一套绕组中的磁通，此时互感是负的。互感随转子位置角θ_m的变化取决于磁路的形状，也取决于组成绕组的导体的分布。在大部分情况下，电感可以作如下近似：

$$L_{12}(\theta_m)=L_m\sin\theta_m$$

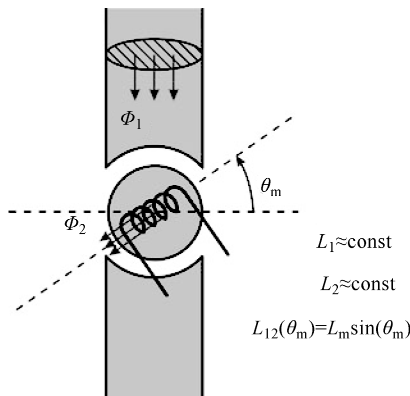


图 7.5　基于磁场耦合的双馈变换器自感和互感的计算

电感矩阵表达了绕组电流为i_1和i_2时的定子全磁链Ψ_1和转子全磁链Ψ_2。自感$L_{11}=L_1$和$L_{22}=L_2$位于矩阵的主对角线上，同时余下的元素等于绕组间的互感$L_{12}=L_{21}=L_m\sin\theta_m$，如图 7.5所示。

$$\underline{\Psi}=\begin{bmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_1 & L_{12}\\L_{12} & L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix}=\underline{L}\underline{i} \tag{7.5}$$

磁场的能量可以表示为电流和电感矩阵中元素的函数。磁场能量的表达式可以由矩阵形式的和式给出，或是以标量表达式的形式给出：

$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}L_{jk}i_ji_k=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+L_{12}i_1i_2=\frac{1}{2}\underline{i}^T\underline{L}\underline{i} \tag{7.6}$$

7.6　转矩表达式

因为互感是变量且随转子位置改变，所以磁场能量表达式（7.6）三个成员中的一个随位置角θ_m按如下形式变化：

$$L_{12}i_1i_2=i_1i_2L_m\sin\theta_m \tag{7.7}$$

电磁转矩可以由磁场能量W_m的一阶导数决定。式（7.8）给出的电磁转矩表达式表明转矩与定子和转子绕组电流的乘积成正比，并且转矩取决于互感L_m和位置角θ_m。也就是说，它随$\cos\theta_m$变化。

$$T_{em}=\frac{dW_m}{d\theta_m}=\frac{d}{d\theta_m}\left[\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+L_{12}i_1i_2\right]=i_1i_2L_m\cos\theta_m \tag{7.8}$$

双馈电机的电磁转矩既能表示成两个电流相乘的形式也能表示成两个磁链相乘的形式。为了证明这个表述，有必要将电流表示成磁链的函数，将电感矩阵反变换就能实现：

$$\underline{\Psi}=\underline{L}\cdot\underline{i}=>i_1=\underline{L}^{-1}\underline{\Psi}$$

导致电流的表达式为：

$$i_1=\frac{L_2}{L_1L_2-L_{12}^3}\Psi_1-\frac{L_{12}}{L_1L_2-L_{12}^3}\Psi_2$$

$$i_2=\frac{-L_{12}}{L_1L_2-L_{12}^3}\Psi_1+\frac{L_1}{L_1L_2-L_{12}^3}\Psi_2$$

通过将上面i_1和i_2的表达式相乘就获得了包含$\Psi_1\Psi_2$的转表达式。另一方面，因为$\Psi_1=N_1\Phi_1$和$\Psi_2=N_2\Phi_2$，所以转矩可以表示成单个线匝磁通乘积的函数：

$$T_{em}\sim i_1i_2\sim\Phi_1i_2\sim\Phi_2i_1\sim\Phi_1\Phi_2$$

在获得的表达式的基础上，可以作出如下结论：

1）在单馈电机中，电磁转矩与电流的平方成正比，i_1^2。它可以按照全磁链平方的形式给出，Ψ_1^2；也可以按一匝线圈的磁通的平方的形式给出，Φ_1^2。

2）在双馈电机中，电磁转矩与两套绕组电流的乘积成正比，i_1i_2；或是与两套绕组磁链的乘积成正比，$\Psi_1\Psi_2$；或是与定子和转子中一匝线圈中磁通的乘积成正比，$\Phi_1\Phi_2$。

7.6.1　平均转矩

式（7.8）给出了双馈电机的电磁转矩。当转子以恒定角速度Ω_m旋转时，转子位置为$\theta_m=\Omega_m t+\theta_0$。可以假设在$t=0$时，角度$\theta_m(0)=\theta_0$等于零，所以转子位置为$\theta_m=\Omega_m t$。如果绕组中的电流不变（$i_1=I_1$，$i_2=I_2$），可以得出转矩将根据$\cos\Omega_m t$变化，其平均值等于零。因此，定子和转子绕组通入恒定电流（直流）的双馈电机将产生平均值等于零的电磁转矩，所以变换功率的平均值也等于零。如果任一电流变化，可以使其变化与转子旋转同步并获得平均值不为零的转矩和功率。

问题（7.3）：假设另一套绕组中的电流恒定，$i_2=I_2$，且$\theta_m=\Omega_m t$，确定使转矩平均值不为零的电流变化i_1。

解答（7.3）：根据表达式（7.8），电磁转矩由函数$\cos\Omega_m t$和$i_1(t)$的乘积决定。如果i_1是角频率ω_1等于转子加速度Ω_m的交流电，那么$i_1(t)\cos\Omega_m t$的乘积会有不为零的平均值。

7.6.2　产生非零转矩的条件

随后的分析将证明当电流频率和转子速度满足某些条件时，定子和转子绕组通入交流电的双馈电机的电磁转矩会呈现不为零的平均值。电流可以按照它们的幅值I、角频率ω和初始相位表示，$i=I\cos(\omega t-\varphi)$。当定子和转子电流都有非零角频率时，它们周期性变化，转子和定子磁链也是如此。当然也可以区别出定子或是转子电流的角频率等于零，$\omega=0$。这实际意味着电流不变化，保持$i=I\cos(\varphi)$。实际上，$\omega=0$导致电流为直流电。定子和转子的电流可能会有不同的幅值、频率和初始相位。令定子电流角频率为ω_1，转子电流角频率为ω_2，相应的幅值为I_{1m}和I_{2m}，初始相位为$-\varphi_1$和$-\varphi_2$。绕组电流的瞬时值由式（7.9）给出：

$$i_1 = I_{1m}\cos(\omega_1 t - \varphi_1)$$
$$i_2 = I_{2m}\cos(\omega_2 t - \varphi_2) \tag{7.9}$$

将这些表达式带入式（7.8），就获得如下电磁转矩：

$$T_{em} = i_1 i_2 L_m \cos\theta_m = I_{1m}\cos(\omega_1 t - \varphi_1)\cdot I_{2m}\cos(\omega_2 t - \varphi_2)\cdot L_m\cos\theta_m$$

当$\theta_m = \Omega_m t$时，转矩T_{em}是三个周期函数的乘积。通过引入系数$K_n = L_m L_{1m} L_{2m}/4$，上面等式呈现如下形式：

$$\begin{aligned} T_{em} = & K_n\cos(\omega_1 t - \varphi_1 + \omega_2 t - \varphi_2 + \Omega_m t) \\ & + K_n\cos(\omega_1 t - \varphi_1 + \omega_2 t - \varphi_2 - \Omega_m t) \\ & + K_n\cos(\omega_1 t - \varphi_1 - \omega_2 t + \varphi_2 + \Omega_m t) \\ & + K_n\cos(\omega_1 t - \varphi_1 - \omega_2 t + \varphi_2 - \Omega_m t) \end{aligned} \tag{7.10}$$

电磁转矩的幅值与互感成正比，与绕组电流幅值的乘积成正比（$L_m L_{1m} L_{2m} = 4K_n$）。转矩的变化由4个不同频率的余弦函数决定。它们的频率可以表示为$\omega_1 \pm \omega_2 \pm \Omega_m$。函数$\cos(\omega t - \varphi)$要呈现非零的平均值，角频率$\omega$必须等于零。因此，表达式（7.10）要有非零的平均值，频率$\omega_1 \pm \omega_2 \pm \Omega_m$中必须要有一个等于零。所以，可以得出结论：只有当绕组电流角频率（ω_1和ω_2）和转子速度Ω_m满足式（7.11）中4个条件的一个时，就能使转矩T_{em}获得非零平均值：

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \omega_1 + \omega_2 \\ \Omega_m &= \omega_1 - \omega_2 \\ \Omega_m &= -\omega_1 + \omega_2 \\ \Omega_m &= -\omega_1 - \omega_2 \end{aligned} \tag{7.11}$$

7.7　磁极

双馈电机的磁路使观察到定子的两个磁极和转子的两个磁极成为可能。转子N极的位置定义为转子电流产生的磁场的磁感线穿出转子磁路并进入到气隙的区域。相似的，可以定义转子的S极和定子的磁极。考虑范围内的双馈电机有两个定子磁极和两个转子磁极。因为$L_{12} = L_m\sin\theta_m$，所以可以得出互感变化的一个周期与转子机械旋转一圈相对应。

在适当的时候，将定义和解释多极电机。这个问题涉及制造的不止一对磁极的电机。在大部分情况下，定子磁极的数量等于转子磁极的数量。一台四极电机在定子上和转子上有两个N极和两个S极。这类电机就是所说的$p=2$对极电机。在四极双馈电机中，互感以$L_{12} = L_m\sin(p\theta_m) = L_m\sin(2\theta_m)$变化，因此在转子旋转一圈中形成两个周期。当$\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm p\,\Omega_m = 0$时可以获得平均值不为零的转矩，其中$\Omega_m$表示转子旋转的机械角速度。

在这本书中，字母ω表示电压和电流的角频率，同时字母Ω_m表示转子旋转的速度，又被称为机械角速度。前者经常作为电频率ω提及，后者被称为机械速度Ω。由此，机械速度Ω_m会有电对应速度$\omega_m = p\,\Omega_m$。

稍后，将定义代表磁感应强度 B、磁场强度 H 空间分布和多相绕组电压、电流的旋转矢量。这类空间矢量的旋转速度也用字母 Ω 表示。

在被表述为关系式 $\omega = p\Omega$ 的过程中，将更好的定义电频率 ω 和机械速度 Ω。暂时考虑的两极电机，可推出 $p = 1$ 和 $\omega = \Omega$，除非作其他陈述。

7.8　直流电机和交流电机

双馈电机的分析可用于解释直流电机、感应电机和同步电机的基本运行原理。后两者也被称为交流电机。这些电机将在本书剩下的部分中研究。所有三种电机在定子和转子上都有绕组。转子旋转改变定子和转子绕组间的互感。

已经证明要获得平均值不为零的电磁转矩需要使电机定子频率ω_1、转子频率ω_2和转子转速Ω_m㊀满足条件$\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_m = 0$。

直流电机定子绕组中通入直流电（$\omega_1 = 0$），然而转子中为交流电。转子电流的角频率由旋转速度决定，$\omega_2 = p\Omega_m$㊁。

感应电机定子绕组和转子绕组中存在交流电。根据式（7.11），$p\Omega_m$㊂和转子频率ω_2的和等于定子频率ω_1。因此，$p\Omega_m = \omega_1 - \omega_2$。转子机械转速$\Omega_m$相比$\omega_1/p$ 落后ω_2/p。感应电机的转子频率$\omega_2 = \omega_1 - p\Omega_m$也被称为转差频率，因为它定义了转子速度落后$\omega_1/p$的差频，$\omega_1/p$ 由定子频率决定并被称为同步转速。

同步电机定子绕组通入交流电，同时转子导体带有直流电。因为$\omega_2 = 0$，所以条件（7.11）变为$\omega_1 = p\Omega_m$。因此，转子速度Ω_m仅由定子电频率决定，$\Omega_m = \omega_1/p$。因此，对所有与线路频率为 50Hz 的三相电网连接的两极（$p = 1$）同步电机转速为 50r/s，或为$50 \times 60 = 3000$r/min（rpm）。供电频率为 60Hz 的四极（$p = 2$）同步电机运行速度为 $60 \times 60/p = 1800$r/min。所以，这类电机与供电频率同步运行，这就是它们名字的由来。

㊀ 当电机有 p 对极时，产生转矩的条件为$\omega_1 \pm \omega_2 \pm p\Omega_m = 0$。符号$\Omega_m$是转子旋转的角速度，即机械速度。角频率$\omega_m = p\Omega_m$是转子速度的电气表示。它定义了转子 N 极经过定子 N 极的周期$T_{\omega m} = 2\pi/\omega_m$。在 $p > 1$ 时，这个过程在每圈机械旋转中发生不止一次。在极对数大于 1 的电机中，两个相邻 N 极间的角距离为$\Omega_m T_{\omega m} = 2\pi/p$。四极电机（$p = 2$）有两个 N 极和两个 S 极。两个 N 极间的角距离为$\Omega_m T_{\omega m} = 2\pi/2 = \pi$。所以，转子 N 极在转子旋转一圈中经过定子 N 极两次。在两极电机（$p = 1$）中，转子 N 极从 N 极开始，需要经过$\Omega_m T_{\omega m} = 2\pi/1 = 2\pi$ 的角距离才能到达下一个 N 极，正是它开始的磁极。也就是说，一台两极电机仅有一个 N 极和一个 S 极。

㊁ 在一台两极电机直流电机中，极对数为 $p = 1$。所以，$\omega_2 = p\Omega_m = \Omega_m$。在 $p > 1$ 时，这个条件变为$\omega_2 = \omega_2 = p\Omega_m$。

㊂ 在两极感应电机中，$p = 1$。

7.9 矢量乘积形式的转矩表达式

当定子和转子磁链用相应的矢量表示时，直流电机、感应电机和同步电机的运行原理和主要区别会更明显。电磁转矩可以用定子和转子磁链矢量的乘积表示。换句话说，通过定子磁链矢量幅值、转子磁链矢量幅值和两个矢量夹角的正弦值相乘可以获得转矩的值。对于这本书中研究的所有电机，这个陈述的证明将在随后给出。此外，电机产生的电磁转矩可以通过计算下列矢量乘积确定：

1）定子磁链和转子磁链矢量

2）定子和转子磁动势矢量（电流矢量）

3）定子磁链矢量和转子磁动势矢量（电流矢量）

4）转子磁链矢量和定子磁动势矢量（电流矢量）

磁链和电流矢量相乘获得电磁转矩可以通过放置在外部存在均匀磁场的线圈来说明，如图7.6所示。线圈由载流为 I 的导体组成。导体形成一个长为 L、宽为 D 的平面长方形，其包围的面积为 $S=DL$。在图中考虑的位置，平面的法线 n_1 与磁感应强度矢量的夹角为 α。角度 α 决定作用在线圈上的电磁转矩。

线圈的磁通量矢量与线圈围绕的平面 S 的法线 n_1 共线。法线的方向由线圈中电流的方向和右手定则决定。磁通量 m 的幅值由线圈电流 I 和表面面积 S 的乘积决定：

$$\vec{m}=I\cdot S\cdot\vec{n}_1 \tag{7.12}$$

作用在线圈上的电磁转矩等于磁通量 m 和磁感应强度 B 的矢量相乘。转矩可以由式（7.13）确定。在图7.6中，转矩矢量在线圈旋转的轴线上延伸，它的方向由右手定则确定的一对力决定。在 $\alpha=\pi/2$ 位置时获得转矩最大值 $T_m=D\cdot L\cdot I\cdot B$。

$$\vec{T}_{em}=\vec{m}\times\vec{B},\ |\vec{T}_{em}|=S\cdot I\cdot B\cdot\sin\alpha=D\cdot L\cdot I\cdot B\cdot\sin\alpha \tag{7.13}$$

通过分析作用在线圈矩形部分的力可以核对式（7.13）的结论。因为线圈长度为 L 的部分与磁场线正交，所以电磁转矩由表达式 $F=L\cdot I\cdot B$ 确定。对于线圈长度为 D 的部分，力作用在旋转方向上，但是它们共线且方向相反。所以，它们相反的作用抵消了。力臂 K 等于：

$$K=\frac{D}{2}\sin\alpha$$

所以，作用在图7.6中线圈的电磁转矩为：

$$T_{em}=2\cdot F\cdot K=2(L\cdot I\cdot B)\frac{D}{2}\sin\alpha=D\cdot L\cdot I\cdot B\cdot\sin\alpha$$

先前得到的转矩表达式可以表示为磁链和磁动势的函数。穿过线圈的磁通的最大值为 $\Phi_m=SB=DLB$，在 $\alpha=0$ 时获得最大值。因为线圈只有一匝（$N=1$），线圈中的电流等于磁动势，$F_m=NI=I$。从式（7.13）出发，电磁转矩可以表示为：

$$T_{em}=F_m\cdot\Phi_m\cdot\sin\alpha \tag{7.14}$$

穿过线圈的磁通是个标量。通过将磁感应强度的方向与磁通 Φ 联系起来，可以认

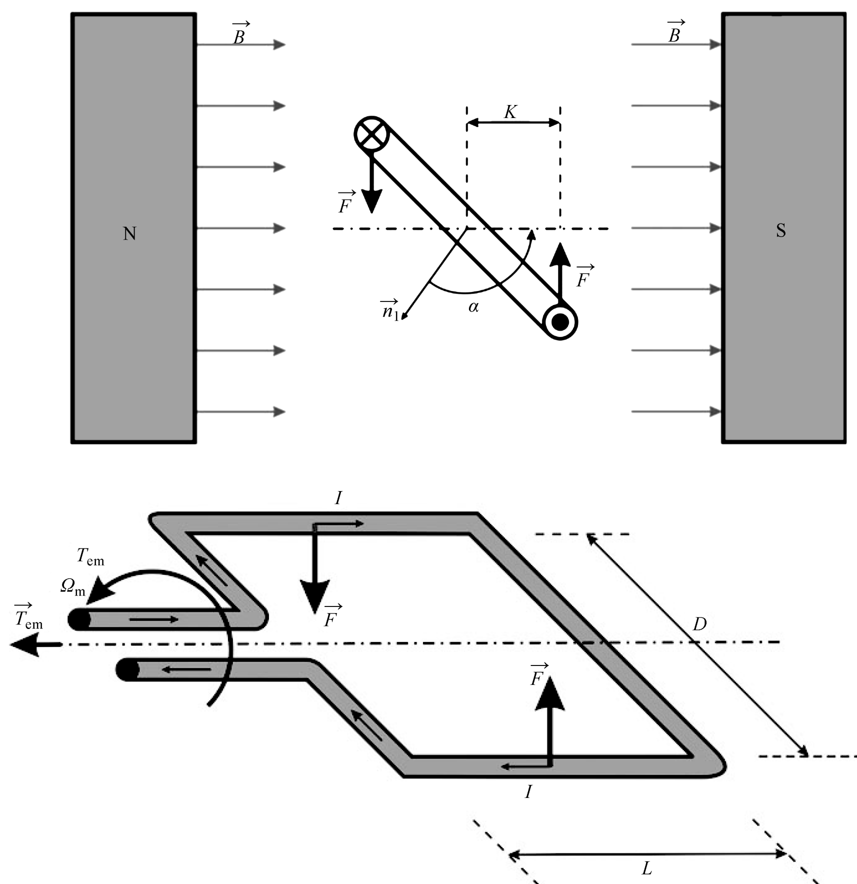


图 7.6　作用在外部存在均匀磁场的线圈上的转矩等于磁感应强度 B 和线圈磁通量的矢量相乘。转矩的代数强度等于线圈电流 I、表面积 $S=L\cdot D$、磁感应强度流 B 和 $\sin\alpha$ 相乘。它的方向由按照电流参考方向和右手定则定向的法线 n_1 决定

为是磁链矢量。线圈的磁动势是一个方向由法线 n_1 决定的矢量，它的方向与线圈磁通量矢量的方向共线。所以，表达式（7.14）的值可以通过磁动势矢量和磁链矢量相乘得到。同样，可以得出圆柱形旋转电机的电磁转矩由定子磁动势和转子磁链矢量相乘决定。通过重新整理表达式，可以将转矩表示为定子和转子磁链矢量相乘。也可以将转矩按照定子和转子磁动势表示或是按照定子磁链和转子磁动势表示。

7.10　旋转电机磁链矢量的位置

电机定子磁链矢量和转子磁链矢量的空间方向取决于产生它们的电流。定子绕组中

通入直流电会产生相对定子不运动的定子磁链。转子绕组中通入直流电会产生关于转子不运动的转子磁链。当转子旋转时，这样的转子磁链会相对定子以转子速度旋转。稍后将说明通入交流电的一套定子绕组可能产生相对定子旋转的磁链矢量，其旋转速度由交流电的角频率决定。第 4 章给出了关于一匝线圈的磁链、一套绕组的磁链和将磁链用矢量代表的方法更详细的定义。

电机电磁转矩可以由磁链和磁动势矢量相乘决定的分析是涉及直流电机和交流电机章节的一部分。感应电机、同步电机和直流电机的不同是因为它们定子和转子绕组中通入直流电或是交流电。

直流电机和交流电机的电磁转矩可以在定子和转子磁链矢量相乘的基础上得到。假设定子每匝的磁通为$\boldsymbol{\Phi}_S$、转子每匝的磁通为$\boldsymbol{\Phi}_R$、定子和转子磁链矢量间的夹角为 $\Delta\theta$，电磁转矩可以通过表达式$|\boldsymbol{\Phi}_S \times \boldsymbol{\Phi}_R| = \boldsymbol{\Phi}_S \boldsymbol{\Phi}_R \sin(\Delta\theta)$。

当两个磁链矢量的相对位置以规则 $\Delta\theta = \omega t$ 变化时，根据式（7.13），电磁转矩将如 $\sin(\omega t)$ 一样振动和变化。这样转矩的平均值等于零。为了产生平均值不为零的转矩，必须要使定子和转子磁链矢量间的相对位置不变。当两个磁链矢量关于定子静止时可以获得恒定位移 $\Delta\theta$，或是当两个矢量以相同的速度和方向旋转时可以保持它们的相对位移 $\Delta\theta$ 恒定。

当电机定子和转子绕组都通入直流电时不可能得到恒定位移 $\Delta\theta$。换句话说，带直流电的绕组产生延绕组轴线的磁动势和磁链。因此，由直流电引起的磁链相对绕组不动。所以，定子绕组中的直流电产生一个静止的定子磁链；转子绕组中的直流电产生相对转子不动的转子磁链。当转子旋转时，转子磁链以转子速度旋转，相对定子磁链也是以这样的方式运动。在这样的条件下，角度 $\Delta\theta$ 变化，同时电磁转矩振荡使其平均值等于零。

图 7.7 给出了所考虑情况下的磁链矢量。定子磁通$\boldsymbol{\Phi}_S$静止，而转子磁通$\boldsymbol{\Phi}_R$以转子速度Ω_m旋转。随着$\theta_{\Psi S}=0$，两个矢量间的夹角 $\Delta\theta$ 是转子旋转速度的函数，$\Delta\theta = -\Omega_m \cdot t$，同时转矩变化由函数$\sin(-\Omega_m \cdot t)$决定，所以它的平均值等于零。为了实现定子和转子磁链间的夹角为恒定值，两个矢量必须静止或是以相同的速度运动。无论如何，任一绕组，定子或是转子，必须产生相对引发绕组旋转的磁场。尽管直流电机、感应电机和同步电机的运行原来还没有详细的解释和分析，但指出这些电机中定子和转子磁链矢量的位置是很有意义的。

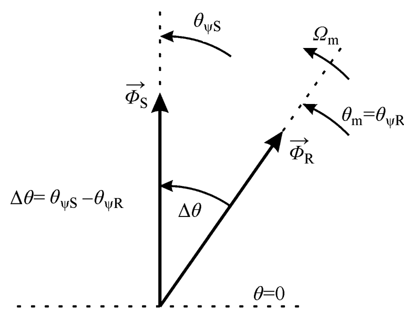


图 7.7　当定子和转子绕组载流为直流电时，定子额转子磁通矢量角位移的变化

直流电机如图 7.8a 所示。定子磁链用矢量$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_S$表示。由定子绕组中直流电产生的磁链$\boldsymbol{\Phi}_S$是不动的。转子磁链由矢量$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_R$表示。磁链$\boldsymbol{\Phi}_R$是由转子导体中的交流电产生的。通

常转子绕组还有很多线匝，但是在图 7.8a 中，转子绕组用导体 P1 和 P2 表示。在这些导体中存在角频率为$\omega_2 = \Omega_m$的交流电。在转子旋转一圈的过程中，导体 P1 和 P2 中的电流以它们的周期完成一整个周期循环，在半个周期中为正，在另一半周期中为负。假设转子以速度Ω_m旋转。因为转子导体中电流符号的变化与转子旋转同步，所以在转子导体经过定子 S 极时，转子导体中的电流总是指向观察者（⊙）。在图 7.8a 中，转子所在的位置导体 P1 经过定子 S 极下方。

先前的陈述可以由接下来的讨论支撑。在图 7.8a 所示的转子位置，导体 P2 在定子 N 极的下方，其载流方向背离观察者（⊗）。在转子旋转半圈后，导体 P2 来到导体 P1 的位置，在定子 S 极的下方。同时，转子电流方向改变。因此，在导体 P2 中方向 由（⊗）变为（⊙）。所以，在定子 S 极下的转子导体的电流方向仍然保持指向观察者。同样的可以说明经过定子 N 极的转子导体的电流方向保持背离读者（⊗）。

上面描述的转子电流的分布相对于定子不变。转子电流产生的磁动势和磁链相对定子不变。关于这点仍然不清楚的是供给转子绕组的交流电的角频率等于转子转速。这将在论述直流电机的章节中作更详细的解释。

在考虑之中的转子导体中的交流电产生的转子磁通矢量Φ_R相对转子自身旋转。相对引发绕组旋转的磁场被称为旋转磁场。交流电产生旋转磁场需要满足的条件将在讨论感应电机的章节中作更详细的解释。

在图 7.8a 中转子旋转的过程中，转子磁链矢量相对定子静止并与定子磁链矢量正交，不管旋转的速度和方向如何。因为如此，直流电机中的转子磁场可以称为停顿旋转磁场。

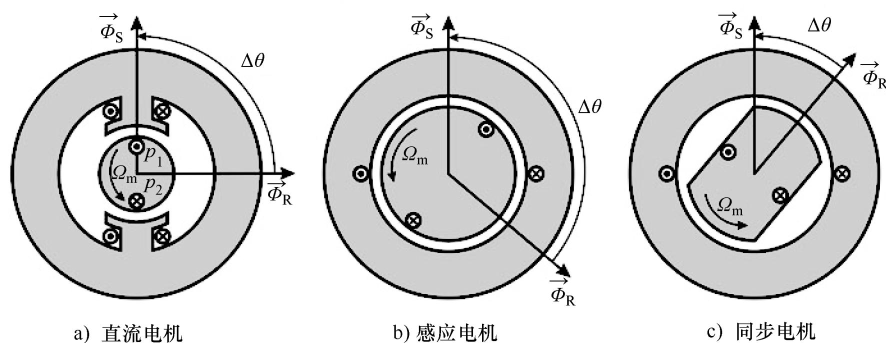


图 7.8　直流电机、感应电机和同步电机中定子和转子磁通矢量的位置

感应电机的定子导体中通入角频率为ω_1的交流电。在转子导体中存在角频率不同（ω_2）的交流电。图 7.8（b）显示了有一对磁极（$p=1$）的感应电机的简化表示。通过直流电机的先例，可以说明转子导体中的交流电产生相对转子旋转的转子磁场和转子磁通矢量。磁通矢量关于引发绕组的旋转速度由绕组电流的角频率决定。

同样的，感应电机中的定子磁通Φ_S以速度$\Omega_1 = \omega_1$关于定子旋转，同时转子磁通Φ_R

以速度$\Omega_2=\omega_2$关于转子旋转。因为转子以速度$\Omega_m=\omega_m$旋转㊀，转子磁通的旋转速度为$\Omega_m+\omega_m$。定子磁通矢量以速度ω_1旋转，因此定子磁通矢量和转子磁通矢量间的转速差为$\omega_1-\Omega_m-\omega_2$。根据式（7.11）给出的传递平均值不为零的功率和转矩的条件，$\omega_1-\Omega_m-\omega_2$的值必须等于零。

在之前关于感应电机的考虑的基础上，可以得到如下的结论：

1）定子和转子磁通矢量以相同的速度旋转。感应电机中磁场的旋转速度为Ω_1，它由定子电流的角频率ω_1决定。在两极电机中，这个转速$\Omega_1=\omega_1$。

2）稳态时，定子和转子磁通矢量间的夹角$\Delta\theta$是恒定的。电机提供的电磁转矩正比于$\sin(\Delta\theta)$，它在稳态时是恒定的。

3）两极电机转子旋转的速度与磁场的旋转速度$\Omega_1=\omega_1$不同。转速差$\omega_2=\omega_1-\Omega_m$被称为转差。两极感应电机（$p=1$）的转差等于转子电流的角频率（$\omega_2$）。

同步电机定子绕组中为频率为ω_1的交流电，转子绕组中为直流电㊁。两极电机（$p=1$）的定子磁通矢量$\vec{\Phi}_S$相对定子以速度$\Omega_1=\omega_1$旋转，而转子磁通矢量$\vec{\Phi}_R$与转子旋转速度相同，$\Omega_m=\omega_m$。图7.8c显示了一台两极同步电机的简化表示。产生平均值不为零的电磁转矩需要两个磁通矢量的相对位置不变。换句话说，角度$\Delta\theta$必须保持恒定。因此，转子的转速必须和旋转定子磁通矢量的速度相同。所以，同步电机的定子和转子磁通矢量与转子同步旋转。在两极同步电机中，定子电流的角频率必须等于转子转速。在有数对极的电机中，这个条件的形式为$\omega_1=p\Omega_m$。

7.11 旋转磁场

前面章节完成的分析表明产生平均值不为零的转矩的条件为定子和转子磁链矢量间的相对位置$\Delta\theta$保持恒定。在直流电机中，两个磁链相对定子都是静止的，但是在交流电机中，感应的和同步的，两个磁链以相同的速度旋转。

在转子以速度Ω_m旋转时，假如两个磁链中至少一个磁链（Φ_S或Φ_R）相对绕组旋转，那么角度$\Delta\theta$可以保持恒定，绕组的磁链来源于绕组的磁动势。相对于引发绕组旋转的磁场被称为旋转磁场。稍后将说明感应电机和同步电机中旋转磁场的产生需要定子上至少有两套独立的绕组，也称相或相绕组。当定子上有两相绕组时，绕组轴线间的空间位移必须等于$\pi/2$。两相绕组中的交流电必须有相同的幅值和相同的角频率。它们初始相位间的差必须为$\pi/2$，跟相绕组间的空间位移一样。假若这样，定子电流导致旋转的磁场。定子磁链的幅值和它的旋转速度可以通过变化定子电流的幅值和频率改变。在这章，将给出一个介绍性的例子来说明带两相绕组定子旋转磁

㊀ 图7.8b的例子考虑的两极电机有$p=1$对磁极。因为$\omega=p\Omega$且$p=1$，所以机械转速（角频率）Ω与电转速（角频率）ω一致。

㊁ 存在用永磁体代替直流励磁转子绕组的同步电机。

场的产生。

图 7.9 表示了磁场轴线空间位置相差 π/2 的两套定子绕组。绕组的轴线用 α 和 β 表示。轴线 α 上的绕组与轴线 β 上的绕组有相同的匝数。两套绕组都载有相同幅值 I_m 和频率 ω_S 的交流电：

$$i_\alpha(t)=I_m\cos(\omega_S t)$$

$$i_\beta(t)=I_m\cos\left(\omega_S t-\frac{\pi}{2}\right)=I_m\sin(\omega_S t)$$

但是它们的初始相位差 π/2。每套绕组沿它们自己的轴线产生磁动势。磁动势的幅值取决于电流和匝数。绕组磁通与磁动势成正比，与磁阻成反比。如果定子和转子的磁路为圆柱形，磁通路径上遇到的磁阻 R_μ 跟磁通的空间方向没有关系。因此，对磁通 $\vec{\Phi}_\alpha$ 的磁阻等于对磁通 $\vec{\Phi}_\beta$ 的磁阻。因为两套绕组有相同的匝数和相同的磁阻，通过匝数 N 和电流 i_α、i_β 分别相乘，再除以磁阻就得到磁通 Φ_α 和 Φ_β。磁通 Φ_α 和 Φ_β 的最大值为：

$$\Phi_{\alpha\max}=\frac{N_\alpha I_m}{R_\mu}=\Phi_{\beta\max}=\frac{N_\beta I_m}{R_\mu}=\Phi_m$$

磁通的瞬时值为：

$$\Phi_\alpha(t)=\Phi_m\cos(\omega_S t)$$

$$\Phi_\beta(t)=\Phi_m\sin(\omega_S t)$$

两个磁通促成电机的合成磁通 Φ，它可以用 $\alpha-\beta$ 坐标系中的一个矢量表示。函数 $\Phi_\alpha(t)$ 和 $\Phi_\beta(t)$ 表示这个磁通在 α 轴和 β 轴上的投影。合成磁通的幅值为 Φ_m。根据

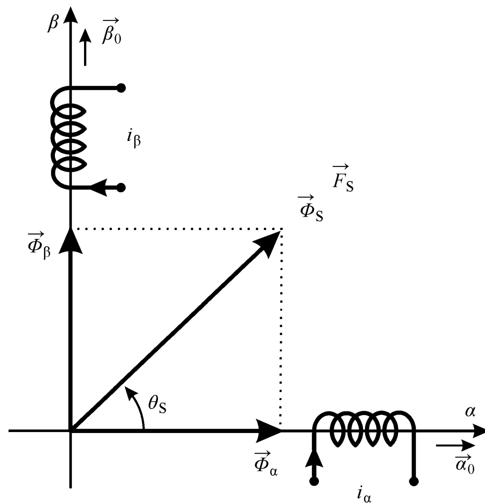


图 7.9　两套轴线互相正交的定子绕组，具有相同幅值和频率的交流电产生的磁场由恒定幅值的旋转磁通矢量描述。电流的初始相位需要相差 π/2

假设的电流，由图7.9中一对绕组产生的合成磁场以速度$\Omega_S=\omega_S$旋转。在旋转的过程中，磁通矢量的代数强度不变，并保持为Φ_m。这个例子说明了一个两套绕组的系统产生相对绕组旋转的磁场的可能性。需要注意的是，绕组必须通入交流电，并且电流的角频率ω_S决定磁场旋转的速度Ω_S。

在这本书分析的直流、感应和同步电机中，旋转磁场是首要必备的。三类电机的任一种，通入交流电的绕组产生的相对绕组自身旋转的磁场也被称为旋转磁场。

7.12　电机的类型

7.12.1　直流电机

如果电机的定子绕组载流为直流电，转子绕组载流为交流电，并且定子磁通矢量和转子磁通矢量相对于定子不动，那么这种电机称为直流电机。直流电机的定子绕组由直流电供电。这类电机转子导体中交流电的频率由旋转速度决定。给直流电机供电的电源不提供交流电流和电压，相反，它提供直流电流和电压。电源直流电进入转子导体的方法包含换向器，这种机械装置将在稍后介绍。换向器的作用是接受电源的直流电并供给转子绕组交流电，交流电的频率由转子转速决定。

感应电机和同步电机的定子绕组中有交流电。交流电的角频率ω_1提供旋转的磁场。因此，这类电机属于交流电机。磁场的旋转速度由角频率ω_1决定。通过分析图7.9中的结构可知：包含两套正交绕组的系统会产生旋转的磁场，其旋转的速度由交流电的角频率决定。实际交流电机的定子绕组通常由三部分组成，三相，即三相绕组。三相绕组的磁场轴线空间相差$2\pi/3$。绕组中交流电的初始相位需要用$2\pi/3$替换，以提供旋转磁场。交流电的幅值I_m决定磁通矢量的代数强度，而角频率$\omega_1=\omega_S$决定磁场的旋转速度Ω_S。

7.12.2　感应电机

除了定子绕组中有交流电流，感应电机转子导体中也会有交流电流。定子电流产生的磁场以速度$\Omega_1=\omega_1$，而转子磁场相对转子以速度$\Omega_2=\omega_2$旋转。定子和转子磁通矢量的旋转速度在前面的章节中已经讨论了，得出转子电流的角频率，也被称为转差频率，相当于定子电流角频率和转子转速间的差值。

7.12.3　同步电机

像感应电机一样，同步电机的定子绕组系统通入交流电，产生旋转的磁场，其旋转速度由定子电流的角频率决定。同步电机转子绕组的电流是恒定的。它们由独立的直流电源供电。转子电流产生的转子磁通相对于转子不动。所以，转子磁通与转子一起以相同的速度Ω_m旋转。有的同步电机不含有转子绕组。相反，通过在转子磁路中布置永磁体获得转子磁通。前面已经说明电机内产生转矩需要定子和转子磁通矢量间的夹角不

变。因此，同步电机的定子磁通矢量必须以与转子相同的速度旋转。换句话说，定子磁通必须与转子同步运动。

在这些电机中，每一种都有自己的优点、缺陷和应用的特殊领域。

对电机更进一步的分析需要一些电机绕组的基础知识、分析气隙磁场的技巧和理解旋转磁场的原理。

第 8 章　气隙中的磁场

本章主要分析了一圆筒形电机中气隙电磁场，假定由于绕组中电流的作用产生了电磁场。气隙中的磁场是由定子和转子中的电流产生的，并且定子、转子中电流产生相应的定子磁动势和转子磁动势。

定子绕组的导体放置在定子凹槽中，凹槽在定子磁路的内表面上的。转子绕组的导体放置在转子磁路外表面上的凹槽中（见图 8.1）。因此，定子绕组导体和转子绕组导体都放置在靠气隙较近的范围内。

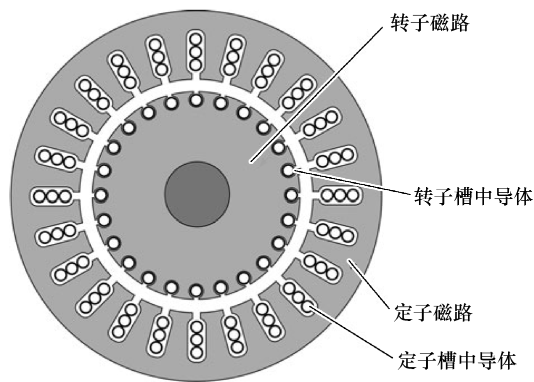


图 8.1　电机磁路的横截面

另外，假定组成绕组的导体是很多的并且是串联连接。绕组导体分布在不同的凹槽内，沿气隙圆周分布。导体密度可以通过计算沿圆周一个单位长度分布的导体数目得到。首先假定，绕组是有正弦分布的导体密度组成的。也就是说，气隙圆周（见图 8-2）的一段圆弧范围 $R \cdot \Delta\theta$ 之内的导体数目是由函数 $\omega s\theta$ 决定的，其中 θ 决定了此段圆弧的位置。当电流进入绕组中，产生了一个正弦分布电流层。通过这些假设，后面的分析将确定气隙磁场径向和切向分量的表达式，定子绕组磁动势和转子绕组磁动势，每匝磁通和绕组磁通。后面的文中还将介绍用于简化绕组、磁动势、磁通表达式的符号。同时，气隙磁场的能量和电磁转矩也进行了计算，转矩是作为定子和转子之间相互机械作用的量度。另外，对转矩和电极尺寸之间的关系进行了分析。最终，对气隙磁场中产生旋转磁场的条件进行了研究和说明。

在分析磁动势的基础上，讲述了导体正弦分布的优点。集中绕组中的电动势以及绕组具有周期性非正弦空间分布情况在第 10 章中进行研究。

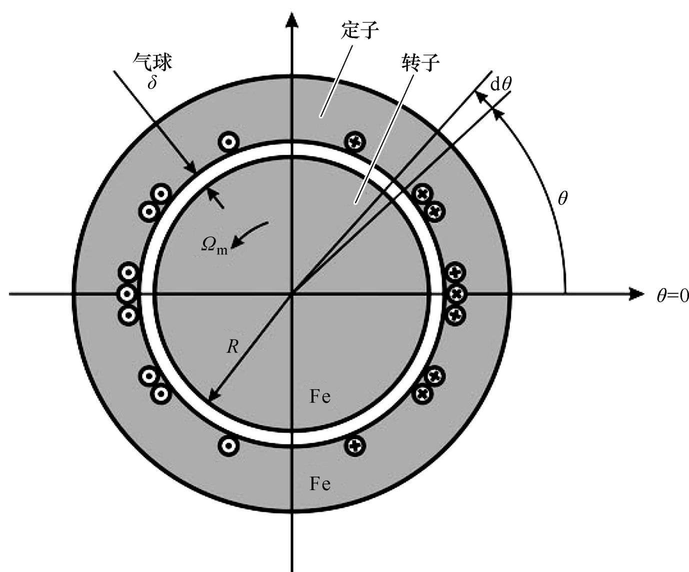


图 8.2　旋转磁路电机的简化表达式，磁路由具有很大磁导率的铁磁材料产生，假定导体放置在分割铁磁材料和气隙的界面上

8.1　具有分布式导体的定子绕组

电机通常具有圆柱形的结构，圆柱形电机的横截面图如图 8.1 所示。为了减少电机损耗，电机磁路由硅钢片构成。构成定子和转子的磁路的硅钢片是同轴放置的，它们的形状如图 8.1 所示。定子形状像一个中空的圆柱体，转子是一个直径比定子内直径稍小的圆柱体。定子和转子之间的距离是毫米量级的，称为气隙。气隙长度远远小于转子半径 R，$\delta << R$。硅钢片作为一种铁磁性材料其磁导率远远大于真空磁导率 μ_0，因此硅钢片中的磁场强度 H_{Fe} 比气隙中的磁场强度 H_0 低达千倍，因此，在大多数情况下 H_{Fe} 是可以忽略的。由于 $\delta << R$，H_0 沿气隙 δ 的变化可以忽略不计。由于这个原因，电机中磁场 H 的路径积分值减少到 $H_0\delta$ 乘积的总和值，通常成为穿过气隙的磁压降。

定转子中的导体沿电机的中心轴线分布，放置在靠近分割磁路和气隙界面的表面，它们可以同时在定转子的两侧。图 8.2 中，展示了定子中导体的分布，⊗表示导体中电流背离读者，⊙表示导体中电流朝向读者。一对导体串联连接组成一圈或一匝。组成一匝的导体放置在电机圆柱体的两侧，角度为 π 的角位移（直径上相对的导体）。

绕组导体沿电机圆周放置，因此导体线密度（单位长度 $R \cdot \Delta\theta$ 的导体数）作为角位移 θ 的函数成正弦规律变化。当函数 $\cos\theta$ 为负数的情况下，应理解为实际导体数是正数，但是导体中电流的方向是变化的（直径相对位置上导体用⊗和⊙表示）。

定子绕组中的导体线密度如图 8.3 所示，呈正弦规律变化，可以通过以下函数公式建模：

$$N'_{\mathrm{S}}(\theta) = N'_{\mathrm{Smax}} \cdot \cos\theta \tag{8.1}$$

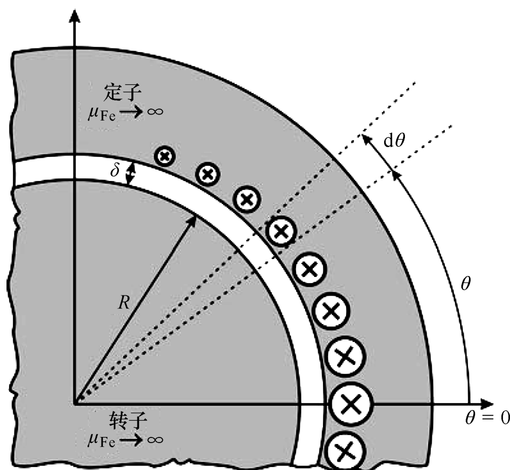


图 8.3　定子绕组导体的空间正弦分布

函数 $N'_{\mathrm{S}}(\theta)$ 给出了沿定子磁路内圆周的单位长度的导体数，如果考虑的一个小的分段 $\mathrm{d}\theta$，那么对于圆周的长度为 $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$，这段圆周长度对应的导体数目为：

$$\mathrm{d}N_{\mathrm{S}} = N'_{\mathrm{S}}(\theta)\,\mathrm{d}l = N'_{\mathrm{S}}(\theta)\,R\mathrm{d}\theta = N'_{\mathrm{Smax}} \cdot \cos\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$$

以图片中例子为例，⊗方向的导体中电流密度最大值在 $\theta = 0$ 的时候，并且 $N'_{\mathrm{S}}(0) = N'_{\mathrm{Smax}}$，⊙方向导体中电流密度最大值在 $\theta = \pi$ 的时候。对应图 8.2 中，在 $\theta = -\pi/2$ 到 $\theta = \pi/2$ 的范围之内，导体对应参考方向⊗，而在 $\theta = \pi/2$ 到 $\theta = 3\pi/2$ 的范围内，导体对应角度⊙。

直径位置上想对应的导体（⊗和⊙）组成了一匝或一圈线圈，绕组是由多匝线圈串联连接组成的，总匝数 N_{T} 由具体参考方向⊗的导体数目决定，通过对函数 $N'_{\mathrm{S}}(\theta)$ 在角度 $\theta = -\pi/2$ 到 $\theta = \pi/2$ 的范围之内得到：

$$N_{\mathrm{T}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} N'_{\mathrm{S}}(\theta) R\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} N'_{\mathrm{Smax}} \cos\theta R\mathrm{d}\theta = N'_{\mathrm{Smax}} R \cdot \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2R \cdot N'_{\mathrm{Smax}} \tag{8.2}$$

绕组中导体数目 N_{C} 是匝数的两倍，因此，$N_{\mathrm{C}} = 2N_{\mathrm{T}} = 4RN'_{\mathrm{Smax}}$。

总导体数目可以通过计算函数 $|N'_{\mathrm{S}}(\theta)|$ 在电机整个圆周上的积分得到，也就是区间从 $\theta = 0$ 开始到 $\theta = 2\pi$ 结束。这个计算考虑了所有的导体，不管其参考方向如何。导体密度的绝对值积分不仅考虑了⊗方向的导体而且考虑⊙方向的导体。

$$N_{\mathrm{C}} = \int_0^{2\pi} |N'_{\mathrm{S}}(\theta)| R\mathrm{d}\theta = RN'_{\mathrm{Smax}} \int_0^{2\pi} |\cos\theta| \mathrm{d}\theta = 4RN'_{\mathrm{Smax}} \tag{8.3}$$

8.2　正弦电流片

串联连接空间上正弦分布的导体中的电流在圆筒状定子的内表面上形成了电流片，电流方向为⊗的在区间 $-\pi/2<\theta<\pi/2$ 分布，电流方向为⊙的在区间 $\pi/2<\theta<3\pi/2$ 分布，定子内表面上的电流分布，如图 8.2 所示。

电流片表面电流的线密度取决于导体的线密度，定子圆筒内表面上电流片的线密度用 $J_S(\theta)$ 表示，它是角位移 θ 的函数。$J_S(\theta)$ 取决于导体密度 $N'_S(\theta)$ 和单个导体中的电流强度。定子绕组是通过串联所有线圈导体得到的，因此导体中的电流是同一个电流 $i_1(t)$，又称为定子电流。通过导体的电流由参考方向决定，如图8.2 中所示，两个绕组末端（又称为端部）的绕组中的电流的代数强度为 $i_1(t)$。表面电流的线密度由式（8.4）决定：

$$J_S(\theta)=N'_S(\theta)\cdot i_1=(N'_{Smax}\cdot i_1)\cos\theta \tag{8.4}$$

如果最大线电流密度表示为：

$$J_{S0}=N'_{Smax}\cdot i_1$$

可以得到：

$$J_S(\theta)=J_{S0}\cos\theta \tag{8.5}$$

考虑一个小分段 $d\theta$，对应这部分的圆弧为 $dl=Rd\theta$，这个分段中总的电流为

$$di=J_S(\theta)Rd\theta$$

轴向放置的导体中的电流产生电机中的磁场。考虑气隙和磁路（由铁磁材料构成）的界面，可以看到磁通通过气隙进入到铁磁材料中其值没有改变；因此，气隙中的磁通密度（B_0）的正交分量 $\boldsymbol{B}$ 与铁磁材料中的磁通密度（B_{Fe}）是相等的。由于铁磁材料的磁导率 μ_{Fe} 远远大于空气的磁导率 μ_0，因此忽略掉铁磁材料中的磁场 H_{Fe} 时合理的，并近似的认为磁场 H 只存在于气隙之中。

问题（8.1）：在电流片中密度为零的情况下，磁场 H 的切向分量在靠近定子磁路内表面的气隙中存在？

解答（8.1）：有必要考虑气隙和电机定子磁路之间的分割面附近磁场，在没有电流的情况下，气隙磁场的切向分量必须等于铁磁材料中磁场的切向分量。由于铁磁材料的磁导率很高，其中的磁场强度 H 可以忽略，铁磁材料中磁场 H 的切向分量可以作近似为 0 考虑。因此，气隙中磁场的切向分量也是为 0。

8.3　定子磁场分量

通过定子电流片来确定气隙中的磁场 $\boldsymbol{H}$ 的分量是必要的。气隙是圆柱形状的，因此可以方便地采用圆柱坐标系。坐标系中的径向方向（$\boldsymbol{r}$），轴向方向（z），切向方向（$\boldsymbol{\theta}$），如图 8.4 所示。轴向方向（z）是正对读者的方向（⊙）。为了有效的表示磁场的各分量诸如：磁感应强度，气隙磁场，采取了以下原则：

1）定子电流产生的磁场用 $\boldsymbol{H}^{S}$ 表示，转子电流产生的磁场用 $\boldsymbol{H}^{R}$ 表示。

2）磁场的径向分量用 $\boldsymbol{H}_{r}$ 表示，切向分量用 $\boldsymbol{H}_{\theta}$ 表示，轴向分量用 $\boldsymbol{H}_{Z}$ 表示。

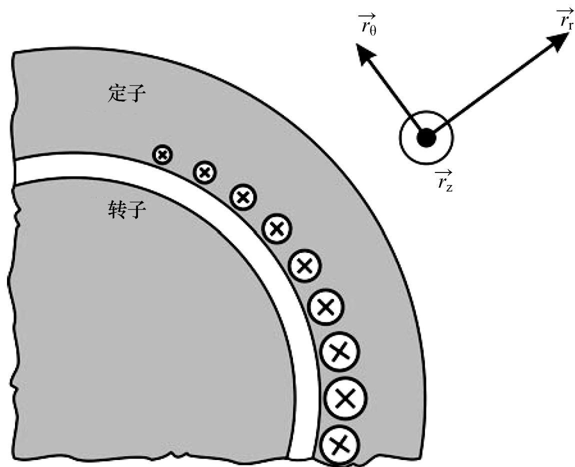


图 8.4　圆柱形坐标中的各个矢量。矢量 $\boldsymbol{r}_{r}$、$\boldsymbol{r}_{z}$、$\boldsymbol{r}_{\theta}$ 表示了磁场中各个径向、轴向、切向方向分量的路径和方向

因此，定子绕组产生的磁场的径向分量用 $\boldsymbol{H}_{r}^{s}$ 表示，由转子绕组产生的磁场的轴向分量用 $\boldsymbol{H}_{Z}^{R}$ 表示。

8.3.1　磁场的轴向分量

电机中磁路是圆柱形形状的，绕组导体与圆柱坐标轴的 z 轴呈平行分布，磁场轴向方向的分量为 0，参见图 8.5 所示。

图 8.5 中展示了封闭巨型轮廓 C 的前视图和侧视图，长度为 L 宽度为 a。矩形轮廓较长的两边沿坐标轴 z 分布，在电机的截面中其较长的两边分别用⊗和⊙表示，如图 8.5中左图所示。两侧中的其中一个（⊗）经过由铁磁材料组成的定子磁路。铁磁材料中磁场的轴向分量用 $H_{Z(Fe)}$ 表示，矩形轮廓的另一边（⊙）经过气隙。气隙中磁场的轴向分量用 $H_{Z(A)}$ 表示。

在一般情况下，电机在坐标系的三个方向包括径向、切向、轴向方向都有电流。切向方向电流通过图片左侧的圆形路径来表示，而在图片的右侧，它们的方向是从观察者到图片的方向。假定电机导体中电流在切向方向上，并且导体分布在定子的内侧，那么可以通过具有线密度 J_{θ} 的电流片进行建模，如图 8.5 所示。由轮廓 C 围成的曲面 S 上对 J_{θ} 进行面积分，其值等于沿轮廓 C 的对磁场的线积分的值。轮廓 C 的四条边都对积分有影响。在积分过程中如果轮廓的路径方向与磁场的径向和轴向的参考方向不一致，那么对应的结果前加负号：

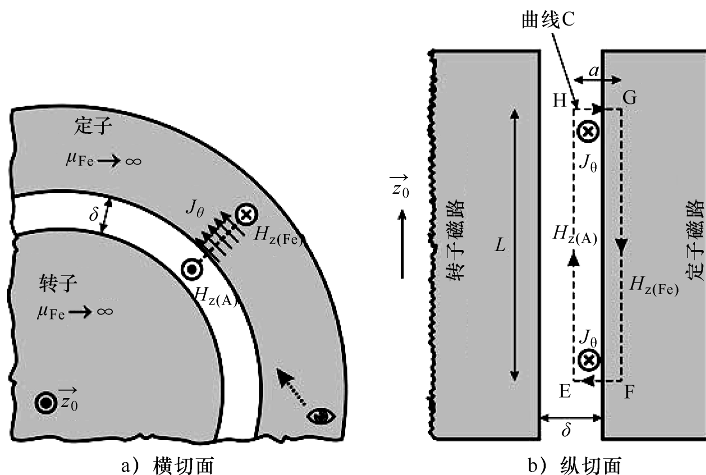


图 8.5　窄矩形轮廓 C 沿坐标轴 z 的横切面、纵切面。轮廓 EFGH 的宽度 a 要小于其长度 L。图片左半部分⊙和⊗表示了轮廓的参考方向，不表示磁场的方向，磁场的参考方向如图 8.2 所示

$$\int_s \vec{J}\mathrm{d}\vec{S} = \int_s J_\theta \mathrm{d}S = \int_C \vec{H}\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\int_C \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = \int_E^H H_{z(A)}\mathrm{d}l + \int_H^G H_r \mathrm{d}l - \int_G^F H_{z(Fe)}\mathrm{d}l - \int_F^E H_r \mathrm{d}l$$

轮廓 C 形状为狭长状，因此 $a \ll L$。较长的边靠近分割气隙和定子磁路的界面。矩形的另外两条边比较短。因此，磁场径向分量沿边 FE 和 HG 方向的积分可以忽略掉；因此，对应轮廓 C 的线积分可以省略为沿边 GF 和 EH 的积分：

$$\int_S J_\theta \mathrm{d}S = -\int_G^F H_{z(Fe)}\mathrm{d}l + \int_E^H H_{z(A)}\mathrm{d}l$$

铁磁材料的磁导率是很高的并且其中的磁感应强度 B_{Fe} 为有限值，那么磁场强度 $H_{Fe}=B_{Fe}/\mu_{Fe}$ 在铁磁材料中是比较小的，可以近似为 0 考虑。那么，沿轮廓 C 的线积分（见图 8.5 中）可以简化为沿 EH 对磁场的积分：

$$\int_s J_\theta \mathrm{d}S = \int_E^H H_{z(A)}\mathrm{d}l \tag{8.6}$$

旋转电机的电流存在于外表绝缘的铜线中，导体放置在槽中，槽建立在定子磁路的内表面上并沿着转子圆柱体。转子槽是轴向延伸的，平行于圆柱体的轴线同时也平行于坐标轴 z 轴。因此，在圆柱形电机中只有电流的 z 轴分量存在。因此，切向电流密度 J_θ 等于 0。磁场轴向分量沿 EH 的积分值为 0，假定 $H_{Z(A)}$ 为常数，$J_\theta=0$ 说明了 $H_{Z(A)}=0$。但是，没有证据说明 $H_{Z(A)}$ 沿电机的长度保持常数。

轮廓 C 可以这样选择：即长度 L 比电机整个轴向长度小很多。在这种情况下，

$H_{Z(A)}$沿边 EH 没有明显的变化，表达式（8.6）确定的值如下：

$$\int_S J_\theta \mathrm{d}S = 0 = \int_E^H H_{z(A)}\,\mathrm{d}l \approx H_{z(A)}L \tag{8.7}$$

这样可以推导出 $H_{Z(A)}=0$ 的结论。另外，还有一种方法可以证明磁场的轴向分量等于0。$H_{Z(A)}=0$ 是可以证明的即使轮廓 C 的边长 L 很长，甚至接近于电机的轴向长度。式（8.6）中的积分等于0对于选择任意点 H 和 E，在只有当气隙磁场的轴向分量 $H_{Z(A)}$沿 z 轴所有点都为0的时候才成立。这个结论可以通过以下得到证明。

轮廓 C（EHGH）可以通过移动边 FE 到位置 F_1E_1 来使其范围增大，其中点 E 与 E_1 的距离很近。这样可以得到通过点 E_1HGF_1 定义的轮廓 C。在切向方向没有电流（J_θ）的情况下，磁场 H 沿轮廓 C 的线积分等于0。这同样适用于轮廓 C_1。考虑到上述情况，沿轮廓 C 的线积分化简为沿边 EH 的积分，同样沿轮廓 C_1 的积分化简为沿边 E_1H，这两个积分值都为0。因此，磁场 H 沿边 E_1H 的积分也等于0。点 E_1 距离点 E 的范围很近，因此磁场强度 H 从点 E 到 E_1 的变化可以忽略不计。在这一点上，沿边 EE_1 的线积分可以简化为路径长度 EE_1 和点 E 的磁场 $H_{Z(A)}$ 的乘积，进而得到 $H_{Z(A)}=0$。以上应用于任一点 E 和 E_1都是成立的。这证明了气隙磁场的轴向分量等于0。可以注意到，以上述论都是基于假设电机的圆柱体很长并且圆柱体端部的磁场变化是可以忽略的。

电机的磁路包括圆筒形定子和圆柱形转子，都是用铁磁材料制作成的。在圆柱体的端部，气隙朝向外部空间。对于绕组，每匝线圈有两个导体组成。导体的端部由端部线圈连接，如图5.6所示。端部线圈建立在圆柱体的前侧和空间小的一侧。端部线圈中的电流沿着切向方向延伸。由于气隙朝向外部空间和端部绕组线圈的存在，在电机的端部和靠近气隙开口的附近处都有局部磁通的发散现象存在。因此，在电机的端部可能有较小的磁场 z 轴分量的存在。以上阐述的端部效应和寄生轴向磁场在本书中不作考虑，忽略其存在。需要注意的是，在分析具有较短轴向长度 L 并且直径 $2R$ 远大于轴向长度 L 的情况的电机时要考虑以上的各种情况的影响。

8.3.2 磁场的切向分量

本节中将分析由定子绕组中电流产生的气隙磁场的切向分量 H_θ^S。计算的磁场的切向分量在靠经定子内边缘的气隙中。也就是，计算区域靠近分割定子磁路和气隙的边界面。

用电磁学的理论分析了分割两种不同介质的表面处的磁场边界条件。当分割面上没有电流时，矢量 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量在表面的两边是相等的。考虑分割定子磁路和气隙的分割面（见图8.6），可以看出铁磁材料中磁场的切向分量等于0（$H_{Fe}=B_{Fe}/\mu_{Fe}$）。这是由于铁磁材料中磁感应强度 B_{Fe}是有限值而其中的磁导率μ_{Fe}的值是很大的。因此，可以作出这样的结论：在定子绕组中没有电流的所有情况下，靠近定子内表面的气隙中的磁场的切向分量（H_θ^S）等于0。

在上述的例子中，气隙中的磁场分析是在考虑定子电流的作用下进行的分析。除了

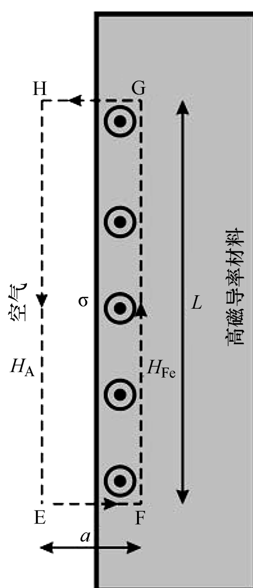


图 8.6　铁磁材料和气隙的分割面附近的磁场强度
等于分割面面电流的线密度

这些电流外，电机的转子导体中也有电流存在。当定子电流为 0（$J_S=0$）时，定子内表面的磁场 H_θ^S 等于 0，尽管有转子电流存在。因此，转子电流对于定子表面处气隙中的磁场的切向分量的是几乎没有什么影响的。另外，气隙中磁场的切向分量在定子内表面和转子的外表面是不一样的。

众所周知，对于具有线密度为 σ 且均匀的表面电流的平面，其附近的磁场强度为 $H=\sigma/2$，磁场的方向平行于平面、垂直于电流，当此平面在空气中或真空中时。当这个平面处于分割高磁导率的铁磁材料和空气的表面时，气隙中的磁场为 $H=\sigma$。这个论述可以通过图 8.6 得到证明。图中展示了分割空气（左边）和铁磁材料（右边）的平面。边界面上有线密度为 σ 的均匀电流片。闭合的轮廓 EFGH 长度为 L 宽为 a，其中 a 要远远小于 L。磁场沿闭合矩形边框的线积分等于 $L\sigma$，这包括了通过边框的所有电流。由于铁磁材料中的磁场很小，沿边 FG 的积分可以忽略掉。因为 $a<<L$，磁场沿闭合边框的积分可以化简为边 HE 的长度与磁场 H_A 的乘积。由于 $L\sigma=LH_A$，这表面气隙中的磁场强度等于线电流密度 σ。因此，可以作出结论：在圆柱形电机定子内表面的气隙中的磁场的切向分量 H_θ 等于定子电流的线密度，而当磁场 H_θ 靠近转子时其值等于转子电流的线密度。此结论可以通过图 8.6 得当证明。

有必要考虑边框 EFGH 具有很短的边 EF 和 GH，圆弧 FG 和 HE 具有差不多相等的长度 $R\Delta\theta$，其中 R 为定子的内半径。圆弧 HE 穿过定子铁磁材料，而圆弧 FG 经过定子内表面附近的气隙。

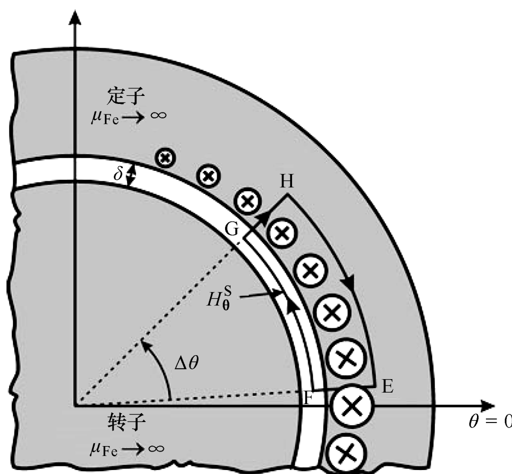


图 8.7　靠近分割面的气隙区域磁场切向分量的计算，
分割面在气隙和定子磁路之间

磁场沿轮廓 EFGH 的线积分等于经过轮廓表面的所有电流的和，在考虑的例子中，定子表面电流的线密度为 $J_S(\theta)$。如果考虑相对较小的区域，使得 $\Delta\theta \ll \pi$，那么可以合理的近似认为线电流密度 $J_S(\theta)$ 沿弧 FG 是不变的，那么磁场沿轮廓的线积分变为：

$$\int_{EFGHE} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta_{FE}}^{\theta_{GH}} J_S(\theta) R d\theta \approx J_S(\theta) \cdot R \cdot \Delta\theta \tag{8.8}$$

由于铁磁材料中磁场的强度是很小的，并且边 EF 和 GH 都很短，那么沿闭合边框的线积分可以简化为气隙中磁场的切向分量 H_θ^S 沿弧 FG 的积分。假定 $\Delta\theta \ll \pi$，可以认为磁场强度 H_θ^S 沿圆弧是不变的，那么积分为：

$$\int_{EFGHE} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta_{FE}}^{\theta_{GH}} H_\theta^S(\theta) R d\theta \approx H_\theta^S(\theta) \cdot R \cdot \Delta\theta \tag{8.9}$$

以表达式（8.8）和表达式（8.9）为例，在定子内表面的区域，气隙磁场的切向分量等于定子电流片的线电流密度：

$$H_\theta^S(\theta) = J_S(\theta) = J_{S0}\cos\theta \tag{8.10}$$

8.3.3　磁场的径向分量

气隙磁场径向分量的计算依靠磁场沿闭合边框 EFGH 的线积分如图 8.8 中所示，边 EF 位于沿径向方向 $\theta = 0$ 的位置，沿定子磁路开始经过气隙，方向与磁场径向方向的参考方向相反，最后到达转子磁路部分。边 GH 位于径向位置 $\theta = \theta_1$ 的位置，沿转子磁路开始经过气隙，在气隙中的方向与磁场径向分量的方向相同，最后回到转子磁路。闭合轮廓 EFGH 有两个圆弧，分别为 FG 和 HE，其长度近似等于 $R\theta_1$，方向沿转子中磁路

FG 和定子中磁路 HE 方向。

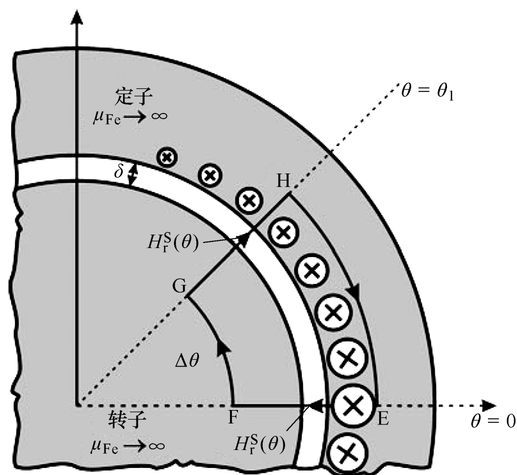


图 8.8　气隙磁场径向分量的计算

铁磁材料由于具有较高的磁导率，其中的磁场强度 $H_{Fe} = B_{Fe}/\mu_{Fe}$ 是可以忽略不计的。因此，可以认为磁场只在边 EH 和边 GH 气隙中的部分存在，这些部分的长度为 δ，与电机的半径相比要小很多（$\delta \ll R$）。因此，可以合理的假定，沿边 EH 和 GH 在气隙中的路径 δ，气隙磁场的径向分量强度是不变的。在位置 $\theta = 0$ 处，磁场强度为 $H_r^s(0)$，在位置 $\theta = \theta_1$ 处，磁场强度为 $H_r^s(\theta_1)$。通过上述假设，磁场沿闭合轮廓 EFGH 的积分等于：

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = +\delta \cdot H_r^S(\theta_1) - \delta \cdot H_r^S(0) \tag{8.11}$$

上式中 $H_r^s(0)$ 前面的负号表示在定义的圆柱坐标中，沿边 EF 的方向与磁场径向方向的参考方向是相反的。

矢量 $\boldsymbol{H}$ 沿闭合轮廓 EFGH 的积分的计算等于经过闭合轮廓面的所有电流的和，等于表面电流的线密度 $J_S(\theta)$ 在区间 $\theta = 0$ 和 $\theta = \theta_1$ 的积分值（式（8.12））。通过将图 8.8与图 8.2、图 8.3 对比，可以得出这样的结论定子表面电流最大的线密度发生在 $\theta = 0$的位置，定子电流线密度由式（8.1）决定：

$$\int_0^{\theta_1} J_S(\theta) R d\theta = \int_0^{\theta_1} J_{S0} \cos\theta \cdot R \,|\, \cdot d\theta = R \cdot J_{S0} \cdot \sin\theta_1 \tag{8.12}$$

在位置 θ_1 处，由定子电流引起的气隙磁场中径向分量等于：

$$H_r^S(\theta_1) = H_r^S(0) + \frac{J_{S0} R}{\delta} \sin\theta_1 \tag{8.13}$$

为了计算磁场的径向分量，有必要确定常数 $H_r^s(0)$。

在定子电流为零（$J_{S0} = 0$）的情况下，表达式（8.13）简化为 $H_r^s(\theta) = H_r^s(0)$。由

于 $J_{S0}=0$，由定子电流引起的磁场等于 0。这可以通过以下证明。如果当 $J_{S0}=0$ 时 $H_r^s(0)$ 是正值，那么气隙磁场的径向分量沿电机的表面是不变的，方向为从转子到定子。基于这些理由，可以证明 $H_r^s(0)$ 等于 0。

根据电气工程和电磁学的基本理论，磁通密度矢量 $\boldsymbol{B}$ 在闭合面 $\boldsymbol{S}$ 上的值等于 0。闭合面 S 的例子可以是一个包围电机转子的面。闭合面有三部分构成，包括经过气隙的圆柱面和电极端部的两个圆平面。经过面 S 的磁通密度矢量 $\boldsymbol{B}$ 称为输出磁通，如下式所示：

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

上式的微分形式可以表示为：

$$\mathrm{div}\vec{B}=0$$

表示了四分之一的麦克斯韦方程组。散度是空间矢量的导数，可以用来建立 闭合面 S 的曲面积分（2D）与相同的向量在曲面 S 围成的区域的空间积分（3D）的关系。因此，在空间 V 中矢量 $\boldsymbol{B}$ 的散度，由曲面 S 围成，可以用来计算矢量 $\boldsymbol{B}$ 的输出磁通：

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{B}dV$$

由于 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$，矢量 $\boldsymbol{B}$ 在闭合面 S 的面积分等于 0：

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (8.14)$$

表达式（8.14）可以用来证明 $H_r^s(0)$ 等于 0，有必要说明圆柱形结构的闭合面 S，环绕在转子周围，其中圆柱形部分 S_1 经过气隙，另外两个圆形面分别在转子的前面和后面。

方程（8.7）表面电机中磁场的轴向分量 H_Z 等于 0。由于气隙中 $B_Z=\mu_0 H_Z$，同样适用于磁感应强度；因此，$B_Z=0$。所以，矢量 $\boldsymbol{B}$ 在圆柱面 S 前面和后面底部的部分等于 0。根据式（8.14），磁通通过圆柱面 S_1 进入到气隙中的部分也等于 0。

关系式 $B=\mu_0 H$ 将磁场强度 H 和磁感应强度 B 联系在了一起。由于磁导率 μ_0 是不变的，经过气隙中表面 S_1 的矢量 $\boldsymbol{H}$ 可以通过矢量 $\boldsymbol{B}$ 除以 μ_0 得到。因此，经过相同表面的矢量 $\boldsymbol{H}$ 的磁通等于 0，同样矢量 $\boldsymbol{B}$ 的磁通也等于 0。在 $J_{S0}=0$ 和 $H_r^s(\theta)=H_r^s(0)$ 的情况下，磁场 H 经过圆柱面 S_1 的磁通等于 $2\pi RLH_r^s(0)$，其中 R 为半径 L 为电机的长度。这证明了式（8.13）中 $H_r^s(0)$ 等于 0。通过证明 $H_r^s(0)=0$，可以得到气隙磁场的径向分量的表达式。

在图 8.8 中，边框 EFGH 的边 GH 的位置 θ_1 是任意选择的，因此上述所有注意事项在任意位置 θ_1 都有可以应用的。因此，可以作出这样的结论由定子电流产生的气隙磁场的径向分量等于：

$$H_r^S(\theta)=\frac{J_{S0}R}{\delta}\sin\theta \qquad (8.15)$$

以上表达式定义了在位置为 θ 处定子磁场强度 H_r，这个表达式只有在下述情况可以应用：定子绕组中有电流并且电流可以用在电机圆周上具有正弦分布的面电流表示。

问题（8.2）：对于一个闭合面，其中一部分经过气隙、一部分经过铁磁材料。能不能够证明经过这个闭合面磁场 H 的输出磁通等于 0？能不能够证明经过闭合面的磁感

应强度 B 的输出磁通等于 0？

解答（8.2）：根据式（8.14），经过闭合面 S 的磁感应强度的输出磁通等于 0。这个结论对于磁导率不变的同质介质是成立的，同时对于可变磁导率的介质，以及由不同磁导率部分组成的介质也是成立的。因此，经过闭合面的磁感应强度的输出磁通等于 0，此闭合面一部分在气隙中一部分在铁磁材料中。方程（8.14）对磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 做了说明，对于磁导率 $\mu = B/H$ 在积分域上不变的情况下，式（8.14）也适用于磁场强度 $\boldsymbol{H}$。

8.4　定子磁场回顾

上述分析的对象是圆柱形电机，其中电机长度为 L，转子外半径为 $2R$。转子放置在中空的圆柱形定子中，气隙 $\delta << R$ 在定子和转子中间。

气隙中磁场由定子绕组中电流产生，定子绕组由沿电机圆周面具有正弦分布的导体组成，因此电机电流可以用沿轴向延伸的面电流片表示，电流密度沿电机圆周呈正弦变化。电流片在定子磁路的内表面，面对着气隙。面电流（8.4）的线密度由导体密度（8.1）和定子绕组中电流 i_1 决定。由于定子磁动势的存在，气隙中建立了磁场，上文中讨论了气隙磁场的轴向、切向、径向分量。由于铁磁材料具有较高的磁导率，可以忽略其中的磁场强度。

在圆柱形坐标系中，气隙中磁场 H 的轴向分量为 0，而气隙磁场的切向分量、径向分量可以分别用式（8.17）和式（8.18）表示：

$$H_z^S(\theta) = 0 \tag{8.16}$$

$$H_\theta^S(\theta) = J_{S0}R \cdot \cos\theta \tag{8.17}$$

$$H_r^S(\theta) = \frac{J_{S0}R}{\delta}\sin\theta \tag{8.18}$$

由于 $\delta << R$，径向分量要远大于切向分量，径向分量和切向分量的强度差异达到了两个数量级。

问题（8.3）：假定已知尺寸的圆柱形电机定子绕组只有一匝构成，包括导体 A1 和导体 A2。导体 A1 中的电流方向远离读者（⊗），放置在 $\theta = 0$ 的位置，导体 A2 放置在 $\theta = \pi$ 的位置，其中的电流方向为朝向读者方向（⊙）。导体 A1 和导体 A2 串联连接，其中电流来自值为 I_0 的电流源。确定任意位置 θ 的磁场的径向分量 $H_r^s(\theta)$。如果转子旋转，在转子圆柱体表面轴向放置的单个转子导体中，产生的电动势的表达式是怎样的？当定子磁场的径向分量变化如式（8.18）时，电动势的表示形式又是怎样的？

回答（8.3）：设想一个经过定子磁路和转子磁路的路径，该路径必须经过转弯 A1-A2，环绕其中一个导体。该路径穿过气隙两次，都是沿径向方向延伸。矢量 $\boldsymbol{H}$ 的流转（比如，$\boldsymbol{H}$ 沿闭合路径的线积分）等于电流强度 I_0。因此，气隙磁场的径向分量为 $H_m = I_0/(2\delta)$。径向磁场的方向取决于沿电机圆周方向的位置，在圆周的前半部分，从导体 A1 开始沿顺时针方向到达导体 A2，磁场的方向为由定子到转子方向，在圆周的剩余部分，磁场的方向为由转子到定子。因此，气隙中磁场的变化可以用函数 $H_r^s(\theta) = H_m\mathrm{sgn}(\sin\theta)$ 表示。当转子以转速 Ω 旋转时，转子导体的位置按 $\theta = \theta_0 + \Omega t$ 变化，其中

θ_0 表示转子导体在 $t=0$ 时的位置。导体中产生的电动势为 $e=LvB$，其中 L 为导体的长度，$v=R\Omega$ 为圆周线速度，而 $B=\mu_0 H_r^s$ 为沿导体的矢量 $\boldsymbol{B}$ 的数值。因此，电动势的变化由函数 $H_r^s(\theta)=H_r^s(\theta_0+\Omega t)$。在上述的例子中，电动势将按照 $\mathrm{sgn}(\sin(\theta_0+\Omega t))$ 变化。当磁场 $H_r^s(\theta)$ 按正弦方式变化时，转子导体中产生的感应电动势也将按正弦变化。

8.5 用矢量表示的磁场

上文中分析的对象是在定子绕组作用下产生的磁场，图 8.10 中展示了径向磁场的路径。在上图中定子导体没有展示，对于定子电流正弦分布电流也没有进行详细的描述。另外，电流方向以及最大电流密度的位置也通过符号⊗和⊙表示。图中磁力线对应了沿电机圆周上磁场强度 H 和磁感应强度 B 的正弦变化，与式（8.18）一致。在定子磁路内表面上具有最大磁场强度的区域用（N）和（S）磁极表示，在定子磁路 N 极区域，磁力线从定子铁心进入到气隙中，而在 S 极区域磁力线从气隙进入到铁磁材料中（见图 8.9）。

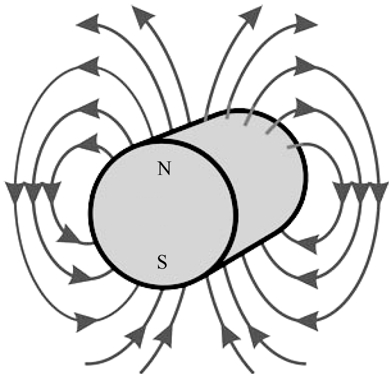


图 8.9　包围转子的闭合圆柱面。磁力线出来的转子上的区域称为转子的 N 极，磁力线进入的区域称为 S 极

上文分析和图 8.10 中表示了只有定子绕组产生的磁场。电机具有一定数量的定子和转子绕组，磁场来源于一些磁动势的作用，每个绕组中的磁动势产生的磁场可以用图 8.10中磁力线表示。在一个图中对这些磁场进行表示是比较困难的，更不用说做出一些有效的结论和进行设计决策。

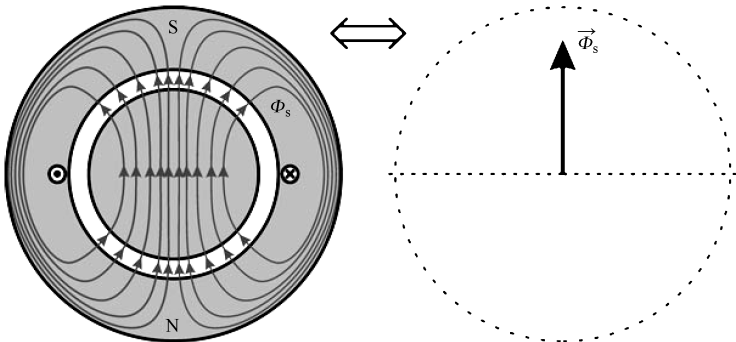


图 8.10　磁场和磁通的通用矢量表示

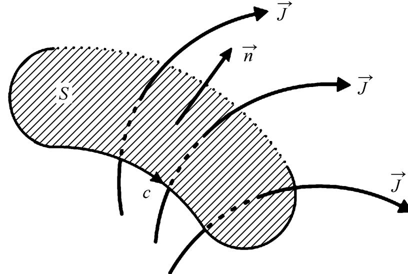
在更深入的分析中，单个绕组产生的磁场可以通过引入绕组的磁通矢量进行更简单

的表示。磁通是矢量 $\boldsymbol{B}$ 在特定面 S 上的积分，结果为标量。但是电机的磁通与面 S 的法向量 n 密切相关，并且依赖于 $\boldsymbol{B}$ 的空间取向。因此，磁通又称为定向标量。对于由单匝线圈产生的磁场，可以将磁通作为标量来进行计算并且可以将标量的路线和方向联系起来来定义磁通矢量。在 4.4 节中，单匝线圈的磁通由磁通矢量表示，而空间方向和参考方向可以通过由单匝线圈构成的框架 C 构成的平面 S 的法线确定。

在大多数情况下，绕组是由串联连接的多匝线圈构成的，每匝线圈可能不在一个空间方向上。因此，在平面上每匝线圈的法线可能不共线，有必要区分绕组磁通的路径和方向。当绕组为集中绕组的情况下，所有导体分布在两个径向槽中，每匝线圈有相同的方向。因此，它们的法线是重合的，也就是绕组磁通矢量的空间方向。但是，这个方法对于分布绕组的电机不适用。

在图 8.10 中，所示磁通是由在定子内表面呈正弦分布的导体中的电流产生的，一对直径上的导体构成一个框架，也就是一匝线圈。每个线圈的法线显然是不共线的。绕组磁通可以用与绕组轴共线的矢量㊀表示。绕组轴的判定在 5.5 节中进行了说明。具有

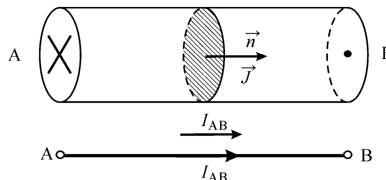
㊀ 磁通作为矢量进行解释可以理解为是一种准则，并且对于发生在电机中的复杂的电磁过程分析是一种有效的工程工具。尽管磁通是用标量定义的，也可以称为定向的标量，由于磁通比较靠近相应的线圈或绕组的空间取向，并且依赖于磁感应强度矢量的路径和方向。磁通 $\boldsymbol{\Psi}$ 可以与空间分布电流的强度 I 进行比较，描述了电荷的运动现象。以下的解释中描述了穿过由轮廓 C 确定的面 S 的空间电流：



电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 给出了穿过轮廓 C 的方向，它在面 S 的积分（空间电流的通量）得到电流强度 I。当空间电流矢量 $\boldsymbol{J}$ 在面 S 上的所有点都具有相同的方向时，电流强度可以通过下式确定：

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S J\cos(\vec{J},\vec{n})\,dS = J\cos(\vec{J},\vec{n})S$$

对于下图中的线性导体，面 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$，表示了电流的参考方向，或者一个电路分支的参考方向。



在导体的区间 AB 段，电流 I 的符号对应了矢量 $\boldsymbol{J}$ 的方向，由于这个原因电流密度 I 可以称为有方向的标量。通过将空间电流密度 $\boldsymbol{J}$ 和电流密度（强度）分别用磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和磁通 $\boldsymbol{\Phi}$ 代替，以上的方法可以用来将磁通定义为有方向的标量。经历轮廓 C 的磁通矢量的具有面 S 的法线的方向，并且其数值由磁感应强度在面 S 的积分所确定。

空间分布导体的绕组轴的详细定义需要进一步探讨。

磁通矢量由它的路径、方向和幅值确定，图 8.10 右侧的图中的矢量表示了磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，其在气隙上的正弦分布如左图所示。磁通的方向由磁力线的路径确定，从定子的 N 极开始，穿过气隙进入到转子磁路，然后再次穿过气隙，进入到定子磁路区域的 S 极，磁通的方向由磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 确定。

在线性铁磁材料和气隙中，矢量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 具有相同的路径和方向，因为 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$。代表磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的磁力线的空间分布可以用磁通矢量 Φ 表示，磁通幅值 Φ 与磁动势 F 可以通过关系式 $F=R_{\mu}\Phi$ 联系在一起，其中 R_{μ} 为沿磁通路径的磁阻即磁路中的磁阻。磁动势 F 可以通过矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示，表示了磁场 $\boldsymbol{H}$ 的空间分布。由于 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，这个矢量与 $\boldsymbol{\Phi}$ 是共线的，幅值为 $F=R_{\mu}\boldsymbol{\Phi}$，等于矢量 $\boldsymbol{H}$ 沿磁路路径的积分。

磁通矢量 $\boldsymbol{\Phi}_S$ 的幅值是矢量 $\boldsymbol{B}$ 在由定子绕组单匝线圈确定的面上的面积分，可以将总绕组磁通 ψ 的矢量定义为代表单匝线圈的磁通的矢量和[㊀]。

问题（8.4）：图 8.10 中，符号⊗和⊙表示了定子绕组导体中的电流方向，导体数为 $2N_T$，呈正弦分布在电机圆周上，导体中电流为 I。推导在磁极的 N 极和 S 极产生的气隙磁场的径向分量 H_r^s 的最大值的表达式（使用上文中得到的表达式以及导体线密度的最大值 N_{Smax} 与总导体数的关系，$N_T=2RN_{Smax}$，$H=N_TI/(2\delta)$）。确定定子磁动势 F 的幅值。

解答（8.4）：首先确定磁场 H 沿闭合轮廓的线积分，此闭合轮廓由定子的 N 极开始，沿垂直方向到达 S 极，经过定子磁路形成闭合。矢量 $\boldsymbol{H}$ 的循环为 $N_TI=2\delta H$。磁场强度 $H_{max}=N_TI/(2\delta)$，磁动势等于矢量 $\boldsymbol{H}$ 的循环，$F=N_TI$。

问题（8.5）：假定定子导体数目是不变的并且定子中电流都相等，但是导体集中在图 8.10 中符号⊗和⊙表示的位置。不同于分布式导体，所有导体集中在径向定子槽中，这种绕组称为集中绕组。在这种情况下，磁场强度 H 的线积分值为多少？磁场 H 的最大强度值在 N 极和 S 极下有没有变化？定子磁动势 F 的幅值为多少？

解答（8.5）：在上述情况中，磁场强度 H_{max} 和磁动势 F 是相等的，$H=N_TI/(2\delta)$，$F=N_T\boldsymbol{I}$。

问题（8.6）：比较集中绕组和分布绕组中磁场的分布 $H(\theta)$。

解答（8.6）：基于上文表达式，具有正弦分布导体的绕组的磁场在气隙中具有正弦分布的磁场。当绕组导体为集中分布时，磁场的径向分量 $H_r^s(\theta)=H_m\mathrm{sgn}(\sin\theta)$ 沿电机圆周具有恒定的幅值，其方向在圆周的一半为正而在圆周的另一半为负。在两种情况下，磁场的最大强度值为 $H=N_TI/(2\delta)$。

问题（8.7）：确定图 8.10 中由⊗和⊙表示的导体组成的轮廓中穿过的磁通，绕组为集中绕组并且导体数为 N_T。绕组中方向朝向读者的导体的位置用⊙表示，剩余的相

㊀ 具有 N 匝线圈的定子绕组（绕组导体沿定子圆周呈正弦分布）的总磁通为 Ψ，一匝线圈的磁通为 Φ_S，Ψ 并不等于 $N\Phi_S$，因为每匝线圈中的磁通并不相等，单匝线圈的磁通 Φ_s 是位置 θ 的函数。

反方向导体的位置用⊗表示。

回答（8.7）：在区间 $\theta \in [0 \cdots \pi]$ 气隙中磁场强度为 $H = +N_T I/(2\delta)$，而在区间 $\theta \in [\pi \cdots 2\pi]$，气隙磁场强度为 $H = -N_T I/(2\delta)$。穿过轮廓的磁通可以通过计算磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 在轮廓面上的积分得到，由于磁感应强度在闭合面上的面积分等于 0（$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$），$\boldsymbol{B}$ 在相同轮廓确定的面上的面积分都是相等的。因此，可以选择合适的面进行计算。对于气隙中的面，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的表达式是已知的，在区间 $[0 \cdots \pi]$，气隙中磁感应强度方向为径向，其强度值为 $B = +\mu_0 N_T I/(2\delta)$。靠在轮廓上的面可以由半圆形的带状矩形进行表示，此半圆形带转矩形由导体决定，在圆弧区间 $[0 \cdots \pi]$ 经过气隙，并且依靠在导体⊙上，如图 8.10 中在 $\theta = \pi$ 的位置上。要研究的面的长度为 L，宽为 πR，此面的面积为 $S = L\pi R$。在面的所有部分，磁感应强度矢量都垂直于表面，因此，穿过此面的磁通也就是穿过轮廓的磁通，等于 $\Phi = BS = \mu_0 \pi LRN_T I/(2\delta)$。

问题（8.8）：图 8.8 中由⊗和⊙表示的导体组成了一个轮廓，确定在绕组中导体为正弦分布时，经过此轮廓的磁通。

解答（8.8）：在磁极区域，$\theta = \pi/2$ 和 $\theta = 3\pi/2$ 的位置，气隙中磁感应强度等于上面例子的情况（$B_{max} = +\mu_0 N_T I/(2\delta)$），但是磁场沿电机圆周是变化的。在上面 8.7 的问题中，经过轮廓的磁通可以通过计算磁感应强度在半圆形带状矩形的面积分得到，此矩形长度为 L，宽为 πR，经过气隙并且靠在导体⊗和⊙上。此面的面积为 $S = L\pi R$。由于磁感应强度沿面呈正弦变化，磁通不能计算为 $B_{max}S$。经过轮廓的磁通等于 $B_{av}S$，其中 B_{av} 为区间为 $\theta \in [0 \cdots \pi]$ 时气隙中磁感应强度的平均值。已知在区间 $\theta \in [0 \cdots \pi]$，函数 $\sin(\theta)$ 平均值为 $2/\pi$。因此，$B_{av} = 2/\pi B_{max}$，穿过给定轮廓的磁通为 $\Phi = B_{av} S = \mu_0 LRN_T I/\delta$。

问题（8.9）：利用上面两个问题得到的结果，详细说明当把集中绕组变为正弦分布导体时，绕组磁动势和一个特定轮廓中的磁通是怎样变化的。使用分布绕组有没有更有利的原因。

解答（8.9）：如果两种绕组的导体中电流相等，并且有相同的导体数，那么气隙磁场的最大磁场强度 H_{max} 和磁动势 $F = 2\delta H_{max}$ 都是相等的。对于集中绕组，沿电机圆周磁场强度保持相同的值，而对于分布绕组，磁场呈 $\sin(\theta)$ 变化。出于这个原因，在一匝线圈中磁通要比分布绕组的小。这两种情况下一匝线圈中的磁通比率为 $2/\pi$。虽然分布绕组的磁通要小一些，但是有理由使用具有正弦分布导体的绕组。它与感应电动势的谐波有关系，沿电机圆周具有正弦分布导体，其绕组中产生的电动势是正弦变化的，未受到谐波的影响，并且当磁场沿电机圆周非正弦变化和 $B(\theta)$ 包含大量谐波时，电动势也没有畸变。在集中绕组的情况下，集中绕组的电动势波形类似于 $B(\theta)$。因此，具有正弦分布导体的绕组具有滤除谐波的特性。第 10 章中将对此进行证明。

8.6　转子磁场分量

除了定子绕组外，电机的转子上通常也有绕组。转子可以有多个绕组，以下的分析

中将研究由单个转子绕组产生的磁场。如图 8. 11 中，转子绕组导体分布在转子磁路内表面，并且靠近气隙。图中，导体远离读者的方向用⊗表示，朝向读者的方向用⊙表示。一对径向放置的导体组成了转子绕组的一匝线圈，这些线圈串联连接并组成一个绕组。

转子导体放置在转子圆周上，其线密度按角位移 θ 正弦函数变化。函数 $N'_R(\theta)$ 决定了单位长度 $R \cdot \Delta\theta$ 的导体数目。函数的参数为角度 θ，从定子的参考轴（如图 8. 11 中（A）所示）到转子表面导体密度为 $N'_R(\theta)$ 的位置测量得到。图中标注了角度 θ_m，它定义了从定子参考轴开始的转子位移。当转子以恒定速度 Ω_m 旋转时，转子位置按 $\theta_m = \theta_0 + \Omega_m t$ 变化，其中 θ_0 为转子初始位置。转子参考轴用（B）表示，在转子参考轴中，角度 θ 等于 θ_m。选定相对于转子参考轴位移为 $\theta - \theta_m$ 的任意位置（C），由于转子导体最大线密度值 N'_{Rmax} 在位置 $\theta = \theta_m$ 处，正弦分布导体可以用以下函数表示：

$$N'_R(\theta) = N'_{Rmax} \cdot \cos(\theta - \theta_m) \tag{8.19}$$

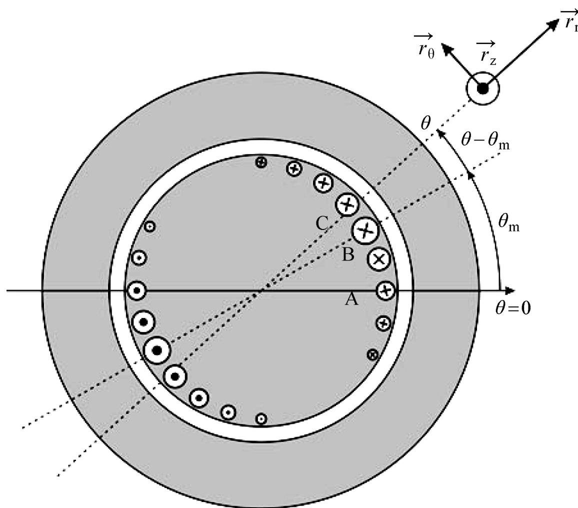


图 8. 11 转子电流片想对定子位移为 θ_m，
转子导体最大密度值在位置 $\theta = \theta_m$ 处

如果转子绕组中电流为 i_2，那么转子电流中正弦分布片的幅值为 $J_{R0} = N'_{Rmax} i_2$。

当转子导体中电流 $i_2 = I_2$ 时，转子电流片将会在气隙中产生磁场，磁场相对于转子是静止的。磁场的空间取向由转子位置决定。类比于图 8. 10 中的定子磁场，转子的 N 极在位置 $\theta = \theta_m + \pi/2$ 处，在 $\theta = \theta_m$ 处转子磁场径向分量等于 0，转子的 S 极在位置 $\theta = \theta_m - \pi/2$ 处。如果转子不动，转子磁极的位置是不变的。当转子旋转时，转子导体中的直流电产生的磁场相对于定子是转动的。磁场的旋转速度等于转子的旋转速度。在这个例子中，转子 N 极的位置在 $\theta = \theta_m + \pi/2 = \theta_0 + \Omega_m t + \pi/2$ 处，其中 θ_0 是 $t = 0$ 是转子的位置。

转子电流的线密度由以下函数给出：

$$J_{\mathrm{R}}(\theta)=N'_{\mathrm{R}}(\theta)\cdot i_2=(N'_{\mathrm{Rmax}}\cdot i_2)\cos(\theta-\theta_{\mathrm{m}})=J_{\mathrm{R0}}\cos(\theta-\theta_{\mathrm{m}}) \qquad (8.20)$$

其中，$J_{\mathrm{R0}}=N'_{\mathrm{Rmax}}i_2$ 表示转子电流的最大线密度。

在 8.3 节中对分布式定子绕组的气隙磁场的分量进行了分析，按照相同的方法，有必要对分布式转子绕组产生的气隙磁场的轴向、切向、径向分量进行分析。气隙是圆柱形结构的，因此可以采用圆柱坐标系中的单位矢量，在定子磁场分析中就使用了该坐标系。坐标轴 z 方向为朝向读者方向（⊙），在位置 θ 处的径向和切向方向如图 8.11 所示，按照前面分析中采用的标准，转子电流产生的磁场的轴向、切向、径向分量分别用符号 $H_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{R}}$，$H_{\theta}^{\mathrm{R}}$，$H_{\mathrm{r}}^{\mathrm{R}}$ 表示。

问题（8.10）：定子和转子导体放置在靠近气隙的位置上，当转子导体距离气隙较远，在转子磁路的较深位置时，有哪些负面的影响？

解答（8.10）：转子导体放置在较深的转子磁路时，磁场将经过铁磁材料形成闭合，磁阻较小时，磁力线不会经过气隙并且环绕定子导体。转子导体放置在较深的转子磁路中，距离气隙比较远，转子磁场和磁通将主要存在于转子磁路中，将不会延伸到气隙和定子绕组中。由于这个原因，转子和定子绕组的磁耦合将会大大较少，在这种情况下，大部分转子磁通变为漏磁通，部分转子磁通不会环绕定子绕组。机械能和电能的转换过程是基于磁耦合的，增加的转子漏磁通将大大减少电磁转矩和转换功率。另一方面，可以通过将转子导体放置在靠近气隙位置的转子槽中的方法来减少转子漏磁通，导体产生的磁场经过气隙并环绕在定子绕组导体周围，这样增加了定子和转子绕组的磁耦合。

8.6.1　转子磁场的轴向分量

在 8.3 节中已经证明，在导体轴向放置的圆柱形电机中磁场的轴向分量等于 0。由于电流存在于沿圆柱坐标系 z 轴放置的导体中，在切向方向没有电流存在。因此，气隙中磁场的轴向分量等于 0。图 8.5 中分析了磁场沿轮廓的流通情况，表示了气隙磁场的轴向分量等于 0，不管是定子电流还是转子电流。

8.6.2　转子磁场的切向分量

对靠近转子磁路的气隙中转子磁场的切向分量 H_{θ}^{R} 进行了计算，所关心的点是在气隙中并且在分割转子磁路和气隙的分界面上。

图 8.6 中磁场沿轮廓的线积分能够帮助计算铁磁材料和气隙分界面附近的磁场，磁场的切向分量由分界面中面电流的线密度决定。通过图 8.6 得到的结论可以用于分析由转子电流产生的磁场的切向分量。

磁场强度 H_{θ}^{R} 由代表转子电流的电流片的线电流密度 $J_{\mathrm{R}}(\theta)$ 决定，这个结论将通过图 8.12 中的例子进行证明。

闭合轮廓 EFGH 径向方向的边 EF 和 GH 都是比较短的，并且圆弧边 FG 和 HE 具有相近的长度 $R\Delta\theta$，其中 R 为转子的直径。圆弧 FG 经过磁路的铁心部分，弧 HE 则穿过

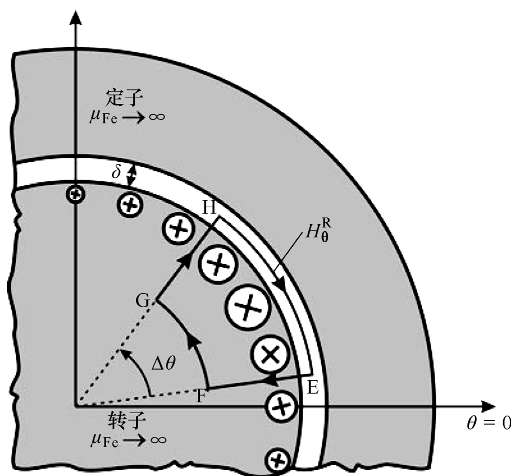


图 8.12　在转子表面，由转子电流产生的气隙磁场的切向分量的计算

气隙在靠近转子表面的位置。磁场强度矢量沿闭合轮廓 EFGH 通量等于围绕轮廓的平面上所经过的电流的总和。在讨论的例子中，转子表面电流的线密度为 $J_R(\theta)$，由于 $\Delta\theta \ll \pi$，可以认为沿圆弧 HE 线电流密度是不变的；因此，磁场沿闭合轮廓的线积分等于 $J_R(\theta)$ 和圆弧 HE 长度的乘积：

$$\oint_{EFGHE} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta_{EF}}^{\theta_{GH}} J_R(\theta) R d\theta \approx J_R(\theta) \cdot R \cdot \Delta\theta \tag{8.21}$$

由于边 EF 和 GH 都很短，沿圆弧 FG 的铁磁材料中的磁场强度很小，沿闭合轮廓的线积分可以简化为气隙磁场分量 H_θ^R 沿弧 HE 的积分。由于 $\Delta\theta \ll \pi$，可以认为磁场强度 H_θ^R 沿圆弧是不变的，那么积分可以简化为：

$$\oint_{EFGH} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{H}^{E} H_\theta^R(\theta) dl = \int_{\theta_{GH}}^{\theta_{FE}} H_\theta^R(\theta) R(-d\theta) \approx -H_\theta^R(\theta) \cdot R \cdot \Delta\theta \tag{8.22}$$

在转子面附近，气隙磁场的切向分量 H_θ^R 的方向与圆柱坐标系中切向分量的参考方向相反，并且与定子磁场的切向分量也是相反的。由于这个原因，式（8.22）前面有负号。

以表达式（8.21）和式（8.22）为基础，转子面附近的磁场的切向分量 H_θ^R 等于转子电流的线密度：

$$H_\theta^R(\theta) = -J_R(\theta) = -J_{R0}\cos(\theta - \theta_m) \tag{8.23}$$

8.6.3　转子磁场的径向分量

由转子电流产生的磁场的径向分量可以通过计算沿闭合轮廓 EFGH（见图 8.13）的

线积分得到，轮廓的边 EF 沿径向方向延伸，在位置 $\theta=\theta_m$ 处，转子导体具有最大的密度并且方向朝向读者方向。θ_m 代表了转子的角位移，通过测量相对于定子参考轴的位置确定。边 EF 开始于定子磁路经过气隙，方向与参考方向相反，最后到达转子磁路中。边 GH 在位置 $\theta=\theta_1$ 处，方向沿径向方向，开始于转子磁路经过气隙，方向与径向参考方向一致，最后在定子磁路中结束。轮廓同时由两个圆弧 FG 和 HE 组成，其长度近似为 $R(\theta_1-\theta_m)$，都穿过定子和转子磁路。由于铁磁材料中磁场强度 H_{Fe} 都很小，可以认为磁场强度只有在边 EF 和 GH 时具有非零值。同时，气隙长度远远小于电机的半径（$\delta<<R$），因此，可以认为气隙磁场的径向分量沿边 EF 和 GH 没有明显的变化，通过这些假设，磁场沿轮廓的积分等于：

$$\oint_C \vec{H}\mathrm{d}\vec{l}=+\delta H_r^R(\theta_1)-\delta H_r^R(\theta_m) \tag{8.24}$$

磁场沿闭合轮廓的积分等于穿过轮廓组成的平面的所有电流的和，在图 8.13 所示的轮廓中，经过 EFGH 的电流之和由面电流的线密度 $J_R(\theta)$ 在区间 $\theta=\theta_m$ 到 $\theta=\theta_1$ 积分确定：

$$\int_{\theta_m}^{\theta_1} J_R(\theta)R\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_m}^{\theta_1} J_{R0}\cos(\theta-\theta_m)R\mathrm{d}\theta=RJ_{R0}\sin(\theta_1-\theta_m) \tag{8.25}$$

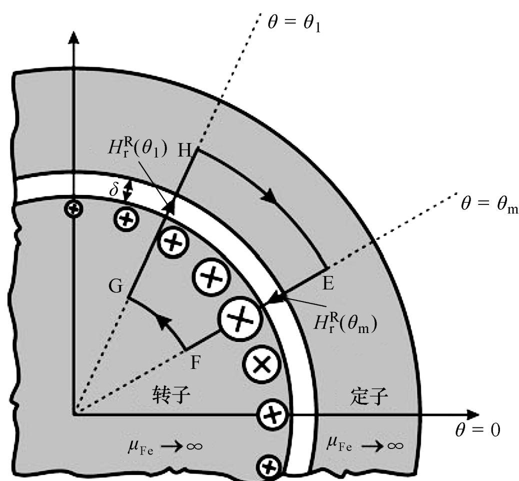


图 8.13　由转子电流引起的磁场的径向分量的计算。位置 θ_m 对应转子的参考轴，θ_1 代表了任意选定的需要计算磁场径向分量的位置

在位置 θ_1 处，由转子电流产生的气隙磁场的径向分量等于：

$$H_r^R(\theta_1)=H_r^R(\theta_m)+\frac{J_{R0}R}{\delta}\sin(\theta_1-\theta_m) \tag{8.26}$$

为了推导 $H_r^R(\theta_1)$，有必要确定常数 $H_r^R(\theta_m)$，在 8.3 节中，计算了定子磁场径向分

量，表面气隙磁场的径向分量 $H(\theta)$ 的平均值等于0。证明是基于磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 穿过一个闭合面不可能是非零值，例如覆盖转子的圆柱面。也就是，$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$。在这种情况下，同样适用于矢量 $\boldsymbol{H}$ 穿过一个经过气隙并且覆盖转子的圆柱面的磁通。因此，在式（8.26）中，常数 $H_r^R(\theta_m)$ 等于0。由于位置 θ_1 是任意选定的，转子磁场径向分量的表达式如下所示：

$$H_r^R(\theta)=\frac{J_{R0}R}{\delta}\sin(\theta-\theta_m) \tag{8.27}$$

8.6.4 转子磁场各组成分量的总结

在上面的一节中，对转子电流引起的气隙磁场进行了分析，假定转子绕组具有轴向放置的导体，并且导体密度沿电机圆周按正弦函数变化，在位置 θ_m（又称为转子参考轴）达到最大值。当转子导体中注入值为 i_2 的电流时，在转子表面形成电流片，面电流的线密度 $J_R(\theta)$ 沿电机圆周呈正弦规律变化，与转子导体密度的变化是相同的。在气隙中建立磁场，而在铁磁材料中由于具有很高的磁导率 μ_{Fe}，其中的磁场强度 H_{Fe} 是可以忽略的。在圆柱形坐标系中，磁场 H 的轴向分量等于0，切向分量和径向分量可以用表达式（8.29）和式（8.30）表示：

$$H_z^R(\theta)=0 \tag{8.28}$$

$$H_\theta^R(\theta)=-J_R(\theta)=-J_{R0}\cos(\theta-\theta_m) \tag{8.29}$$

$$H_r^R(\theta)=\frac{J_{R0}R}{\delta}\sin(\theta-\theta_m) \tag{8.30}$$

气隙长度 δ 远远小于电机的半径 R，因此，磁场的径向分量要远大于切向分量。

问题（8.11）：对于已知尺寸的圆柱形电机，定子和转子上具有相同的导体数目，定子的每个导体在方向⊗具有电流，而穿过气隙的转子电流具有相同的电流强度，但是方向为⊙，确定气隙中的磁场。

解答（8.11）：由于气隙 δ 值很小（$\delta \ll R$），定子和转子中相对的导体数是很接近的，每个定子导体具有方向⊗的电流都有其穿过气隙的对应部分，转子导体具有在相反方向⊙的电流。两者的距离很小，$\delta \ll R$。出于这个原因，图8.13中磁场沿轮廓EFGH的积分等于0，同时穿过整合轮廓的电流之和也为0。所以，气隙磁场的径向分量等于0。对于切向分量，需要注意的是定子和转子中相反方向的电流对于矢量 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量有影响，这个分量等于定子（或转子）面电流片的线密度。

8.7 用矢量形式表示磁场的准则

上文中对转子绕组产生的磁场进行了分析，其中转子绕组是由沿电机表面正弦分布的导体的串联连接组成，在图8.14中表示了由转子绕组产生的径向磁场的磁力线分布，符号⊗和⊙表示了转子导体密度达到最大值的位置，同时确定了转子的参考轴，方向垂直于⊗-⊙的连线，并且由角度 θ_m 确定。符号⊗和⊙表示了转子电流片的线密度达到

最大值的位置，图中磁力线的变化对应了沿气隙圆周的磁场 H 的正弦变化情况。在转子表面区域，磁力线由转子进入到气隙的地方定义为 N 极，同样的在磁力线由气隙进入到转子的地方定义为 N 极。在磁极的中心区域，磁场 H 和磁感应强度 B 达到它们的最大值。

转子绕组产生的磁场可以通过引入转子磁通向量的方法对其进行简化表示，即使磁通是定向的标量，也可以通过增加标量值的路径和方向的方式来将它表示为一个向量。

磁通向量由它的路径、方向、和幅值所确定，图 8.14 中右侧的矢量 $\boldsymbol{\Phi}_R$，表示了磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的正弦分布，磁力线分布如左侧的图所示。磁通矢量的方向与磁力线的方向一致并且 $B=\mu H$。磁通矢量 $\boldsymbol{\Phi}_R$ 的幅值等于矢量 $\boldsymbol{B}$ 在转子绕组的一匝线圈所确定的平面上的面积分，因此，磁通矢量 $\boldsymbol{\Phi}_R$ 代表了一匝线圈中的磁通。另外，也可以定义绕组磁通矢量 $\boldsymbol{\Psi}_R$ 作为每匝线圈磁通相加的和。

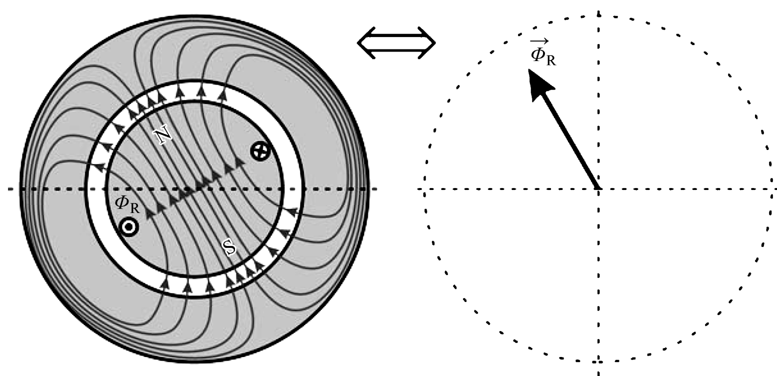


图 8.14　用向量表示转子磁场和磁通的准则

问题（8.12）：在图 8.14 的左侧，两个转子导体组成了一个转子线圈，假设这些导体向定子方向多移动几毫米并且横跨在气隙中，在定子磁路的内表面上，这些导体中电流都是相等的，在上述方法中，转子的一匝线圈变成了定子的一匝线圈，由于用⊗和⊙表示的导体现在处在定子磁路的内表面上，导体中电流产生的磁场现在变成了定子磁场，绘制磁力线并且将其与图中左侧磁力线进行比较，说明这些导体产生的定子磁通的 N 极和 S 极。

解答（8.12）：导体移动后气隙磁场的径向分量不会改变，而磁场的切向分量将会改变，由于径向分量与切向分量的值相差几个数量级，可以推断出移动导体后对磁力线几乎没有什么影响。同时需要明确的是 N 极对应的区域其磁场方向是由磁路开始并指向气隙的。在图 8.14 中，定子的 N 极方向与转子的 S 极方向是相反的。

第 9 章　磁能、磁通和转矩

气隙磁场是由定子和转子绕组中的电流产生的，另外也可由嵌入在定子或转子磁路的永磁体产生。定子和转子磁场的计算已在前面的章节作过介绍，两种磁场相互作用促使了机电转换过程。

在本章，主要讲解气隙磁场中磁能的计算、磁场能量的计算和由定子与转子磁场相互作用产生的电磁转矩的计算。为了简化分析，每匝线圈和绕组中的磁链用磁通矢量表示，磁通矢量的概念在分析线圈和绕组的磁轴时作过介绍和分析。在定子和转子磁通矢量的基础上，对电磁转矩的表达式重新整理和计算，并给出矢量表达式。指出转矩持续存在的条件是定子或转子绕组在气隙中产生旋转磁场。最后讨论了能够产生旋转磁场的两相绕组和三相绕组系统。

9.1　定子磁场和转子磁场的相互作用

一般情况下，电机的定子和转子都存在绕组，通过绕组的电流感应出定、转子磁通，也有些电机利用永磁体代替定子或转子上的绕组来感应磁通。气隙磁场包含径向和切向两部分，径向分量在时间上超前切向分量 R/δ，它确定了磁能的分布和磁力线的路径与方向。

定子磁场与转子磁场存在于同一气隙中，并且具有相同的磁路，相互叠加形成最终的气隙磁场和磁通。假设磁路是线性非饱和的（$\mu=$常数），气隙合成磁场是由定子磁场与转子磁场之间的相位差决定的。相似的，两个磁场的叠加确定了合成磁场的强度。图 9.1 是定子和转子磁力线示意图，并呈现出对应磁通矢量的位置、方向和磁场坐标轴。假设定子绕组和转子绕组导体均是正弦分布，为简单起见，图 9.1 只是用少量导体表征定、转子绕组的分布。在定子绕组中，导体 S1 和 S2 放置在定子导体分布密度最大的地方，且线圈 S1-S2 的法线是定子绕组磁场的轴线。同样，转子导条 R1-R2 的法线确定了转子绕组的轴线。

在图 9.1 中，定子磁场和磁通的方向是由定子线圈 S1-S2 的法线 n_S 决定的，且该法线以 $\pi/2$ 的角速度相对于 $\theta=0$（即定子导体密度最大值处）进行旋转。转子磁场和磁通的方向由转子导条 R1-R2 的法线 n_R 决定，并以 $\pi/2$ 的角速度相对于 $\theta=\theta_m$（即转子导条密度最大值处）旋转。因此，相对于 $\theta=0$，转子磁通的方向则以 $\theta+\pi/2$ 角速度旋转。当给定子和转子导体通入恒定电流（直流电流）时，定子磁通矢量方向保持不变（图 9.1 中的垂直方向），而转子磁通矢量随转子旋转。此时，由于转子相对位移角 θ_m 的存在定转子磁通矢量之间的夹角为转子相对定的位移角 θ_m，因此 $\Delta\theta=\theta_S-\theta_R=-\theta_m$。在定子和转子有两套或两套以上的绕组且通以交流电流情况下，两个磁通矢量之

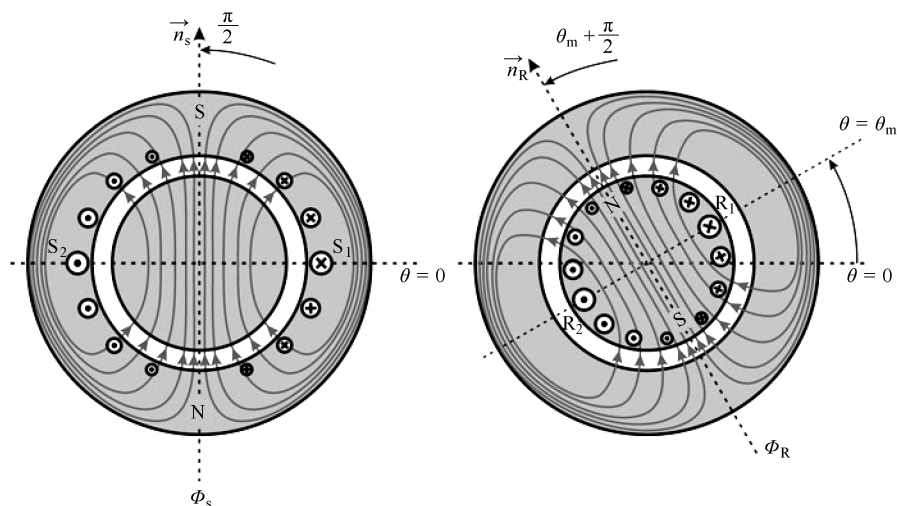


图 9.1　定子与转子的磁场

间的夹角与 θ_m 不相等。也就是说，当定子（转子）的多个交流绕组具有合适的磁轴方向时，就可以产生相对于初始位置旋转的磁场和磁通矢量。为实现上述情况，绕组电流必须具有适当的频率和初始相位。图 7.9 给出了两套通以交流正交绕组产生的磁场，且该磁场相对于定子旋转。在这种情况下，磁通矢量的位置和定转子磁通的夹角 $\Delta\theta$ 由转子位置和绕组电流的频率与初始相位共同决定。

在图 9.2 中，通过矢量的方式对定、转子磁场进行了更深一步的描述和分析。磁感应强度 B 可以由磁通矢量表示，根据章节 4.4、5.4 和 8.5 中的结论，给出磁场矢量常用的表达方式。每匝线圈的磁通矢量由相关的位置、方向和标量 Φ 组成，位置和方向是由相应线圈法线单位矢量决定的。图 9.2 中给出的是线圈 S1-S2 和 R1-R2 的磁通矢量，它们代表着图 9.1中定、转子的磁场。标量值 Φ_S 表示定子导体 S1-S2 产生的磁通，该线圈位于定子导体密度最大值处；矢量 Φ_S 的位置和方向是由线圈 S1-S2 包围的定子表面的法线确定的。同样，标量值 Φ_R 表示定子导体 R1-R2 产生的磁通，该线圈位于转子导体密度最大值处；矢量 Φ_R 的位置和方向是由线圈 R1-R2 包围的定子表面的法线确定的。

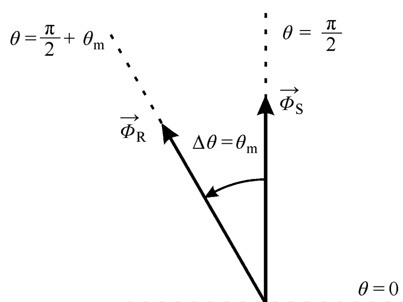


图 9.2　定子与转子磁通的位置

通过定、转子磁场之间的相互作用，电磁转矩被认为是定子和转子之间的机械作用。由于转子可以转动，该转矩可以驱动转子旋转并能改变转子转速；该转矩是由定子

和转子磁场之间相互作用产生的，因此其又称为电磁转矩 T_{em}；考虑到不同磁极之间吸引力，该电磁转矩趋向于通过缩近转子 N 极和定子 S 极的方式驱动转子，并使这两个相反的次级相对准；就磁通矢量而言，该电磁转矩趋向依附于定子和转子磁通矢量，更确切地讲，电磁转矩可以表述为定子和转子磁通矢量的向量积。

问题（9.1）：在定子磁极与定子之间、转子磁极与转子没有相对运动的情况下，如果转子以某一转速恒定旋转，作用于转子的电磁转矩会有什么变化？

解答（9.1）：在上述情况下，定子和转子磁通矢量之间的夹角 $\Delta\theta$ 为 θ_m，如果转子以恒定速度旋转，产生的电磁转矩将会做正弦变化。

9.2　气隙磁场中的能量

首先要确定作用在圆柱形电机定子和转子上的电磁转矩，该转矩是气隙磁场能量对转子位移角 θ_m 的一阶导数；在 6.9 节给出等式的基础上可以知道，机械功的增量与磁场能量的增量相等（$dW_{meh}=T_{em}d\theta_m$），因此，电磁转矩是磁场能量对转子位移角 θ_m 的一阶导数，所以，确定磁场能量与转子位置之间的关系是至关重要的，即 $W_m(\theta_m)$。

通过对磁能密度 w_m 在整个磁场区域积分可以得到总的磁场能量，磁能密度 w_m 的量纲为 J/m^3，它表示单位体积内所含有的磁能，即 $w_m=\Delta W_m/\Delta V=dW_m/d_V$；通过式 $w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$ 可以确定磁导率恒定线性铁磁材料的磁能密度，因此可以得到气隙中磁能密度为 $w_m=\frac{1}{2}\mu_0 H^2$。

由铁制成的定子与转子磁路中和气隙中都存在磁场，当同一磁通通过气隙进入定、转子磁路时，铁心中的磁感应强度 B_{Fe}与气隙中的磁感应强度 B_0 大致相等。由于铁的磁导率 μ_{Fe}比空气的磁导率 μ_0 大好几个数量级，因此，与气隙磁场强度 H_0 相比，铁心中的磁场强度 $H_{Fe}=B_{Fe}/\mu_{Fe}$可忽略不计；同样，与气隙磁能密度$\left(\frac{1}{2}B^2/\mu_{Fe}\right)$相比，铁心中磁能密度$\left(\frac{1}{2}B^2/\mu_0\right)$也可忽略，因此，通过对气隙磁能密度在整个气隙中积分即可得到电机整个磁场域的磁能。

在磁能密度的表达式中 $w_m=\frac{1}{2}\mu_0 H^2$，H 代表气隙中的合成磁场强度，也是定子和转子磁场强度之和；由于磁场的切向分量可以忽略，气隙合成磁场强度与定子和转子磁场径向分量之和相等，因此，合成磁场能量密度可以表示为

$$w_m=\frac{1}{2}\mu_0(H_r^S+H_r^R)$$

式（8.18）和式（8.30）给出了定子和转子磁场在气隙中 θ 处的径向分量，因此可以得到气隙磁能密度关于角 θ 的函数：

$$w_m(\theta)=\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{R}{\delta}\right)\left[J_{R0}\sin(\theta-\theta_m)+J_{S0}\sin\theta\right]^2 \tag{9.1}$$

总的磁场能量为：

$$w_m=\int_V w_m(\theta)\,\mathrm{d}V$$

式中，V 代表整个气隙的体积，即：

$$\mathrm{d}V=L\delta R\mathrm{d}\theta$$

圆柱形电机中总的磁场能量是关于长度 L、半径 R 和气隙长度的 δ 量：

$$w_m=L\delta R\int_0^{2\pi}w_m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{9.2}$$

将式（9.1）带入式（9.2）可得：

$$\begin{aligned}w_m&=\frac{\mu_0R^3L}{2\delta}\Big[\int_0^{2\pi}J_{R0}^2\sin^2(\theta-\theta_m)\,\mathrm{d}\theta\\&\quad+\int_0^{2\pi}J_{S0}^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}2J_{R0}J_{S0}\sin(\theta-\theta_m)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big]\\&=\frac{\mu_0R^3L}{2\delta}\left[J_{R0}^2I_1+J_{S0}^2I_2+2J_{R0}J_{S0}I_3\right]\end{aligned} \tag{9.3}$$

式中，J_{R0} 为转子线电流密度最大值；J_{S0} 为定子线电流密度最大值；式中还须求出三个积分 I_1、I_2 和 I_3。由于：

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}[1-\cos(2\theta)],\ \sin^2(\theta-\theta_m)=\frac{1}{2}[1-\cos(2\theta-2\theta_m)]$$

可以求得 I_1、I_2：

$$I_1=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[1-\cos(2\theta)]\mathrm{d}\theta=\pi$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta-\theta_m)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[1-\cos(2\theta-2\theta_m)]\mathrm{d}\theta=\pi$$

又有三角函数转换：

$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

第三个积分可以转化为：

$$\sin\theta\sin(\theta-\theta_m)=\frac{1}{2}[\cos(-\theta_m)-\cos(2\theta-2\theta_m)]$$

考虑到积分范围，可以求得 I_3：

$$\begin{aligned}I_3&=\int_0^{2\pi}\sin\theta\sin(\theta-\theta_m)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(-\theta_m)-\cos(2\theta-2\theta_m)]\\&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos(\theta_m)\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos(2\theta-2\theta_m)\end{aligned}$$

$= \pi\cos(\theta_m)$

最后可以求得总的磁场能量为：

$$W_m = \frac{\mu_0 R^3 L\pi}{2\delta}\left[J_{R0}^2 I_1 + J_{S0}^2 I_2 + 2J_{R0}J_{S0}\cos(\theta_m)\right] \tag{9.4}$$

上面的推导计算都在定子和转子绕组中通入直流电的假设条件下完成的，定、转子磁通矢量之间的 $\Delta\theta$ 夹角与 $-\theta_m$ 相等。由式（9.4）可知，当定子磁通矢量与转子磁通矢量在同一直线上（即 $\Delta\theta = -\theta_m = 0$）时，磁场能量达到最大值。

由 9.1 节可知，当定子或转子具有多套绕组时，磁轴在空间进行旋转，给绕组通以具有相应幅值、频率和初始相位的正弦电流，绕组电流频率决定的转速下可以得到幅值恒定的合成磁动势；该旋转磁动势在气隙中产生旋转磁场和磁通（可以用旋转磁通矢量表示），图 7.9 给出了产生旋转磁场的一种方法。在给定子或转子绕组中通以交流的电机中，定、转子磁通矢量之间的夹角不仅取决于转子位置，也与绕组电流的瞬时值有关。因此，关系式 $\Delta\theta = -\theta_m$ 在此处是不成立的。

一般情况下，总的磁场能量的表达式为：

$$W_m = \frac{\mu_0 R^3 L\pi}{2\delta}\left[J_{R0}^2 I_1 + J_{S0}^2 I_2 + 2J_{R0}J_{S0}\cos(\Delta\theta)\right] \tag{9.5}$$

式中，$\Delta\theta$ 为定、转子磁通矢量之间的夹角。

9.3 电磁转矩

图 9.1 所示电机的磁场能量可以由式（9.4）求得，该电机在定子和转子均有一套分布绕组，绕组中存在恒定直流，通过磁能的表达式可以求得电磁转矩。

定子和转子之间的机械作用是通过电磁转矩来表现出来的，作用在定子和转子的电磁转矩振幅相同，方向不同。在定子固定不动的条件下，该转矩不能驱动定子转动；而转子在可以自由转动的情况下，该转矩驱动转子旋转并可以控制其旋转速度。角 θ_m 表示转子相对定子的位移，同时，它还决定两套绕组之间的位移与定、转子磁通矢量之间的夹角 $\Delta\theta$。电磁转矩的表达式为 $T_{em} = +\mathrm{d}W_{meh}/\mathrm{d}\theta_m$，式中为正号是因为绕组与电源相接，因此，把电机作为机电转换器连接到电源上。如果假设定子和转子绕组与可控的电流源相接，则绕组中的电流与转子位置 θ_m 无关；因此绕组电流线密度 J_{R0} 和 J_{S0} 与转子位置 θ_m 无关，且它们的一阶导数 $\mathrm{d}J_{R0}/\mathrm{d}\theta_m$ 和 $\mathrm{d}J_{S0}/\mathrm{d}\theta_m$ 为零。为了计算 $+\mathrm{d}W_{meh}/\mathrm{d}\theta_m$，可以把电流看作是恒定值，得到 $\Delta\theta = -\theta_m$，$\cos(\Delta\theta) = \cos(\theta_m)$；因此可求得电磁转矩的表达式为：

$$T = +\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\theta_m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_m}\left\{\frac{\mu_0 R^3 L\pi}{2\delta}\left[J_{R0}^2 I_1 + J_{S0}^2 I_2 + 2J_{R0}J_{S0}\cos\theta_m\right]\right\}$$

或

$$T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_m}\left\{\frac{\mu_0 R^3 L J_{R0} J_{S0}}{\delta}\pi\cos\theta_m\right\} \tag{9.6}$$

上式可简化为：

$$T=-\frac{\mu_0\pi R^3 L}{\delta}J_{R0}J_{S0}\sin\theta_m \tag{9.7}$$

由上式可以看出，该转矩与电机尺寸的 4 次方成正比，而与气隙长度 δ 成反比；且求得的转矩符号为负，表示转矩的旋转方向为顺时针方向（在前面的章节中规定，电机示意图采用柱面坐标系统，且 z 轴正方向指向读者），该关系可以通过右手定则验证。把逆时针方向作为角速度和转矩的参考方向，正的转矩使运动沿逆时针（正）方向进行，当转子以正的角速度转动时，正的转矩将加速转子旋转；同理，负的转矩降低转子转速。如图 9.1 中所示，转子 N 极向定子 S 极靠近，产生负的转矩，沿负方向旋转。

式（9.7）中，转矩与定子电流、转子电流和位移角 θ_m 的正弦值正比，由于定子和转子绕组中的电流为恒定直流，定子磁通 $\boldsymbol{\Phi}_S$ 的位置由定子位置确定，因此，定子磁通固定不动；而转子磁通的位置则转子的位置决定；因此，定、转子磁通矢量以 θ_m 进行旋转，且电磁转矩与两磁通之间夹角的正弦成正比。以上足够证明电磁转矩为定子磁通矢量与转子磁通矢量的矢量积，这将在后面的章节进一步分析。

问题（9.2）：当定子和转子绕组通以直流电流，且转子恒速旋转，此时转矩的平均值为多少？

解答（9.2）：电磁转矩是定、转子磁通矢量之间夹角的正弦值，当两磁通位置不发生变化时，夹角不变，其正弦值恒定，因此，产生恒定、非零的转矩；当两磁通之间的夹角以某一恒定速率发生变化时，电磁转矩是时间的正弦函数，且其平均值为零。在问题给定条件下，绕组产生的磁通矢量与各自的磁轴重合，由于转子转动，转子磁通相对于定子磁通旋转，因此电磁转矩的平均值为零。

9.3.1　电磁转矩表达式

等式（9.7）是图 9.1 所示电机的电磁转矩表达式，该电机的所有绕组中电流均为直流；当定子（或转子）含有多套绕组，且绕组电流为交流，则磁通矢量的位置不仅取决于定子（转子）的位置，它还与绕组中的电流有关；在合适条件下，交流电流产生旋转磁场，旋转磁场的产生将在 9.9 节进行详细的分析，旋转磁场中电磁转矩的计算是很有必要的。

以图 9.1 和图 9.2 为基础，并假设绕组中电流为直流，定子磁通矢量 $\theta_{\Psi S}$ 的位置和转子磁通矢量 $\theta_{\Psi R}$ 的位置分别为：

$$\theta_{\Psi S}=\frac{\pi}{2}\qquad \theta_{\Psi R}=\theta_m+\frac{\pi}{2}$$

当定子含有至少两套分布绕组且绕组电流为交流时，定子磁通矢量相对于定子旋转，其位置为：

$$\theta_{\Psi S}=\frac{\pi}{2}+\theta_{iS}$$

式中，θ_{iS} 角由定子电流的瞬时值决定，如果转子也有能够产生旋转磁场的绕组系

统，则转子磁通矢量角为：

$$\theta_{\Psi R}=\theta_m+\frac{\pi}{2}+\theta_{iR}$$

θ_{iR}角由转子电流的瞬时值确定；定子磁通矢量与转子磁通矢量之间的夹角为：

$$\Delta\theta=\theta_{\Psi S}-\theta_{\Psi R}=-\theta_m+\theta_{iS}-\theta_{iR}$$

电磁转矩是磁场能量的一阶导数，式（9.5）给出了磁场能量的表达式；当求解磁场能量关于 θ_m 的一阶导数时，假设绕组中的电流与 θ_m 无关；而 $\Delta\theta$ 关于 θ_m 的一阶导数为 -1，因此求得电磁转矩的表达式为：

$$\begin{aligned}T&=+\frac{dW_m}{d\theta_m}=\frac{d}{d\theta_m}\left\{\frac{\mu_0R^3L\pi}{2\delta}[J_{R0}^2I_1+J_{S0}^2I_2+2J_{R0}J_{S0}\cos(\Delta\theta)]\right\}\\&=\frac{\mu_0R^3L\pi}{\delta}J_{R0}J_{S0}\frac{d}{d\theta_m}[\cos(-\theta_m+\theta_{iS}-\theta_{iR})]\\&=\frac{\mu_0R^3L\pi}{\delta}J_{R0}J_{S0}\sin(-\theta_m+\theta_{iS}-\theta_{iR})\\&=\frac{\mu_0R^3L\pi}{\delta}J_{R0}J_{S0}\sin(\Delta\theta)\end{aligned}\tag{9.8}$$

从上式可以看出，电磁转矩与定子和转子电流的幅值、定转子磁通矢量之间夹角的正弦成正比。为了验证电磁转矩取决于定子磁通矢量和转子磁通矢量的矢量积，需要进一步研究和分析单匝线圈磁通、绕组磁通、磁通矢量幅值之间的关系。

9.4　单匝线圈磁通和绕组磁通

在本节，给出了关于绕组磁通和合成磁通矢量详细的分析，通过单匝磁通矢量和绕组磁通矢量计算出磁通矢量的标量密度，证明电磁转矩可以由定子磁通矢量和转子磁通矢量的矢量积表示。

为了便于分析电机，标量参数（如，磁动势、磁通）可以相应的矢量表示。由 4.4 节可知，磁感应强度 B 可以由矢量表示，因此定义了单匝线圈的磁通矢量；5.5 节介绍和定义了绕组的磁轴，8.5 节给出了用矢量表示磁场的惯例，本节将利用上述结论分析绕组磁通与合成磁通。

电机中的磁场是用定子和转子电流产生的一系列磁动势表示的。图 9.1 给出了定子和转子都只有一套绕组时的磁场。该示例中，绕组中电流为恒定的，且电机磁路为线性的，但是，不是所有的电机绕组导体都如图 9.1 分布。图 9.1 中，定子和转子导体沿圆周分布，且导体线密度为正弦分布；图 9.1 中左图为定子电流产生的磁场分布，右图为转子电流产生的磁场分布；合成磁通是由定子磁通和转子磁通叠加生成。在气隙中任一点，可以确定定子电流产生的磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}^S$ 和转子电流产生的磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}^R$，这两个矢量的矢量和 $\boldsymbol{B}^S+\boldsymbol{B}^R$ 便是合成磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}^{Res}$。定子磁通通过对 $\boldsymbol{B}^S$ 进行面积分得到，转子磁通是对 $\boldsymbol{B}^R$ 进行面积分得到，合成磁通则是对 $\boldsymbol{B}^S+\boldsymbol{B}^R$ 面积分

得到。

由上面可知，弄清定子磁通和转子磁通之间的关系是非常重要的。假设转子绕组中不存在电流，且转子不是由永磁体构成，则电机中的磁通只有定子磁通；转子中没有电流，其励磁电感（转子电流在气隙中感应）为零，此时电机合成磁感应强度为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{S}}$，定子单匝线圈的磁通由磁感应强度 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{S}}$ 在该线圈所包围的面 S 上积分所得。同理，当定子电流为零时，电机合成磁感应强度为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}$，且转子磁通通过对 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}$ 进行面积分得到。当定子和转子都有电流存在时，合成磁感应强度为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{Res}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{S}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{R}}$，对 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{Res}}$ 面积分得到合成磁通。

如果把定子磁通作为定子绕组磁通，而不是由磁动势激励产生，定子磁通则可以由定子电流、转子电流或定转子电流同时存在产生；这同样适用于转子磁通。

每匝线圈的磁通由磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 在该线圈包围的面上积分确定，其积分参考方向由右手定则确定，如图 9.3 所示，将右手拇指与其余四个手指垂直，四个手指指向⊙并卷手指向⊗，此时大拇指的指向即为线圈磁通的参考方向；正的电流将产生正的磁通，磁力线将向参考方向延伸。

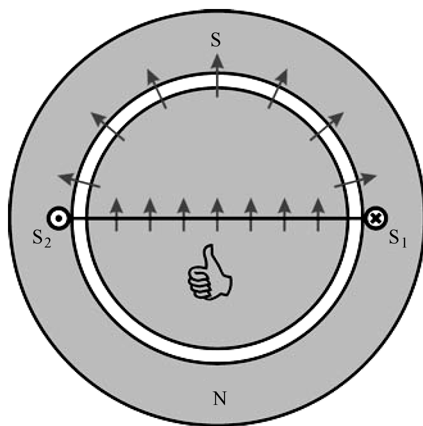


图 9.3　单匝线圈中磁通的计算

图 9.3 中，定子线圈 S1-S2 通以电流将在气隙中产生磁场，图中箭头表示气隙磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的位置和方向，且该线圈磁通为矢量 $\boldsymbol{B}$ 在线圈 S1-S2 所包围的面上的面积分。由于 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$，即矢量 $\boldsymbol{B}$ 各向同性，因此，可以选择容易计算面积分的面（以线圈直径 D 和电机轴向长度 L 为边的面）积分求得磁通；但是，由于线圈直径上和转子磁路中的磁感应强度 B 的解析式是未知的，而气隙中磁感应强度 $B(\theta)$ 已知，因此，选择线圈穿过气隙的面进行积分。

9.4.1　定子单匝线圈中的磁通

确定定子绕组线圈 S1-S2 的磁通是很重要的，其该磁通是由定子导体中的电流产

生。假设定子导体呈正弦分布，线圈 S1-S2 为定子绕组的一部分，并与其他线圈相连，镶嵌在定子内圆周上，且该线圈位于定子导体密度最大值处。

定子导体按正弦分布，且其直流电流方向如图 9.1 所示，定子磁场在气隙中的分布如图 9.3 所示；定子磁场的径向分量 H^{S} 由式（8.18）确定：

$$H_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}(\theta)=\frac{J_{\mathrm{S0}}R}{\delta}\sin\theta$$

气隙磁导率为常数（μ_0），气隙中相应的磁感应强度为：

$$B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}(\theta)=\mu_0\frac{J_{\mathrm{S0}}R}{\delta}\sin\theta$$

磁感应强度 $B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}(\theta)$ 是由定子电流产生的，当转子电流为零时，$B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}$ 决定了气隙中的合成磁感应强度。磁感应强度的最大值为 $B_{\mathrm{m}}=\mu_0(R/\delta)J_{\mathrm{S0}}$，并在磁极处达到最大值，即图中上方磁力线从气隙进入定子磁路的位置。为了计算出线圈 S1-S2 的磁通，应选方便计算面积分的面来计算，由于气隙磁感应强度 $B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}(\theta)$ 的表达式已知，因此选择穿过气隙的面比较合适，即选择电机定子内径 R 和轴向长度 L 确定的半柱面，其与尺寸为 $L\times(\pi R)$ 的长方面（由半柱面展开得到，即在图 9.3 中，从 S1 出发，沿圆周达到 S2）比较相似；磁通穿过的部分为定子内径处半柱面，此处，磁力线从气隙进入定子磁路。该半柱面 S 大小为：

$$S=\pi RL$$

线圈 S1-S2 磁通可以计算磁感应强度在面 S 上面积分得到，下标“S1”表示 Φ_{S1} 代表定子一匝线圈的磁通：

$$\Phi_{\mathrm{S1}}=\int_S B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}(\theta)\,\mathrm{d}S$$

式中 $\mathrm{d}S=L\cdot R\cdot\mathrm{d}\theta$

由上面几式可以求得：

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{S1}}&=\int_0^{\pi}B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}(\theta)L\cdot R\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0LR^2}{\delta}J_{\mathrm{S0}}\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2\mu_0LR^2}{\delta}J_{\mathrm{S0}}\end{aligned}\tag{9.9}$$

9.4.2 转子单匝线圈中的磁通

前面分析了定子单匝线圈磁通的计算，同样，通过计算也能得到转子单匝线圈的磁通，这里采用图 9.1 中转子绕组线圈 R1-R2。在计算磁感应强度的积分和转子磁通时，应该把由转子分布绕组中电流产生的磁感应强度 $B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{R}}$ 考虑进去。转子磁场的径向分量为：

$$B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{R}}(\theta)=\mu_0\frac{J_{\mathrm{R0}}R}{\delta}\sin(\theta-\theta_{\mathrm{m}})$$

J_{R0} 为转子电流线密度最大值；θ_{m} 角代表转子的位置（转子相对于定子的位移角），同时，它也代表定子绕组和转子绕组之间的位移角；则通过线圈 R1-R2 的磁通为：

$$\Phi_{R1} = \int_{\theta_m}^{\pi+\theta_m} B_r^R(\theta) L \cdot R d\theta = \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \int_{\theta_m}^{\pi+\theta_m} \sin(\theta - \theta_m) d\theta$$
$$= \frac{2\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \tag{9.10}$$

单匝线圈的磁通还可以通过简便的方法计算得到，从而省去积分。磁感应强度沿径向通过半柱面 $S = \pi RL$，当磁感应强度 $B_r^S(\theta)$ 在区间 $\theta \in [0 \cdots \pi]$上恒定不变时，单匝线圈的磁通可以通过将定值磁感应强度 $B_r^S(\theta)$ 与面积 πRL 相乘得到。当电机的导体按正弦分布时，磁感应强度幅值沿圆周变化；$B_r^S(\theta)$ 和 $B_r^R(\theta)$ 都是 θ 的正弦函数。当磁感应强度在半圆周上的平均值已知时，不管其沿圆周怎样变化，都可省去积分而计算得到线圈磁通。Φ_{S1} 可以看作是半柱面积 πRL 与 $B_r^S(\theta)$ 在区间 $\theta \in [0 \cdots \pi]$上平均值的乘积；由于 $B_r^S(\theta) = B\max\sin(\theta)$，其平均值比其最大值滞后 $\pi/2$ 的角度，因此 $B_{av} = (2/\pi) B_{max} = 2\mu_0 R J_{S0}/(\delta\pi)$，平均值 B_{av}与面 $S = \pi RL$ 的乘积便为磁通 Φ_{S1}，其结果与式（9.9）计算结果相符。

需要指出的是，在图 9.1 中，线圈 S1-S2 和 R1-R2 都位于其导体密度最大值处，定子磁通矢量与线圈法向重合；其他线圈对应着线圈 S1-S2 进行正弦分布排列，且它们的法线与线圈磁通矢量相偏离，也就是说，磁力线与线圈之间的角度不再是 $\pi/2$；因此其他线圈产生的磁通要小于线圈 S1-S2 产生的磁通，随着其他线圈相对于 S1-S2 位移角趋近于 $\pi/2$ 时，磁通降低。

同样，图 9.1 所示转子磁场中，线圈 R1-R2 产生的磁通矢量与该线圈的法线重合，且该线圈产生的磁通是所有线圈产生磁通中的最大值。

与线圈 S1-S2（R1-R2）偏离的其他线圈中产生的磁通要比式（9.9）和式（9.10）的计算结果偏小，从后面的介绍中可知其他线圈产生的磁通与该磁通矢量和对应线圈法线之间夹角的余弦值有关。例如，选择由位于 $\theta = \theta_1$（进入纸面）导体和 $\pi + \theta_1$（流出纸面）的导体组成的线圈，计算其磁通；该线圈的法线与线圈 S1-S2 的法线之间夹角为 θ_1，其磁通 $\Phi_S(\theta_1)$ 通过计算相应的磁感应强度在该线圈所包围的面上的面积分得到：

$$\Phi_S(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\pi+\theta_1} B_r^S(\theta) L \cdot R d\theta = \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{S0} \int_{\theta_1}^{\pi+\theta_1} \sin(\theta) d\theta$$
$$= \Phi_{S1} \cos\theta_1 \tag{9.11}$$

等式（9.11）表明具有位移角 θ_1 的线圈的磁通是该位移角的余弦函数；当 $\theta_1 > \pi/2$ 时，该线圈的磁通为负值；$\theta_1 = \pi$ 时，线圈又回到 S1 和 S2 位置，但是其导体电流方向相反，其磁通与初始位置时的磁通符号相反；同理可以得到转子偏离 R1-R2 的其他线圈的磁通：

$$\Phi_R(\theta_2) = \frac{\mu_0 L R^2}{\delta} J_{R0} \int_{\theta_2+\theta_m}^{\pi+\theta_2+\theta_m} \sin(\theta - \theta_m) d\theta$$
$$= \Phi_{R1} \cos\theta_2 \tag{9.12}$$

从式（9.11）和式（9.12）可以看出，偏离初始位置的其他线圈的磁通与其偏移角的余弦值相关，且该磁通矢量的幅值、方向表征着磁场强度，该方法在4.4节已经进行了讨论并在图9.1和图9.2得到了应用。

9.4.3　绕组磁通

绕组磁通是组成绕组每匝线圈的磁通之和。图9.4给出了由缠绕在铁磁棒上的N匝线圈组成的绕组，绕组的每匝线圈具有相同的磁通Φ，因此绕组总的磁通ψ为线圈匝数N与每匝线圈磁通Φ的乘积，即$\psi=N\Phi$；这是因为每匝线圈磁感应强度所穿过的面面积相等且其法线方向一致。当绕组的每匝线圈具有相等的磁通且它们的法线一致时，称该绕组为集中绕组。

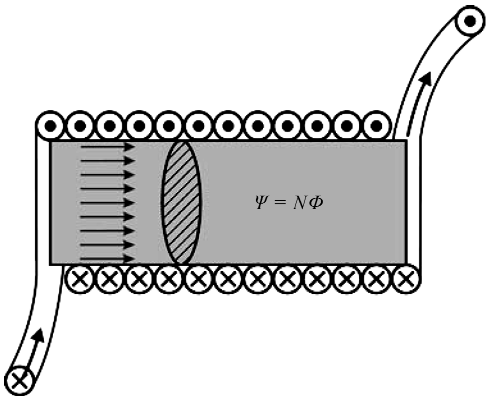


图9.4　集中绕组中的磁通

与单匝线圈磁通相似，绕组中的磁通可以通过计算磁感应强度在绕组包围的面上的面积分求得。每匝线圈所包围的面容易确定，而绕组的面却很难确定；在图9.5中试着确定集中绕组的面，这三匝相连的线圈使得绕组成为复杂的线圈，图中阴影部分为绕组导体所包围的面；如果三匝线圈之间的距离足够小，则三匝线圈具有相同的磁通，因此，磁场中每条磁力线三次穿过绕组的面，又由于每匝线圈的磁通为Φ，则绕组磁通ψ为$N\Phi=3\Phi$。

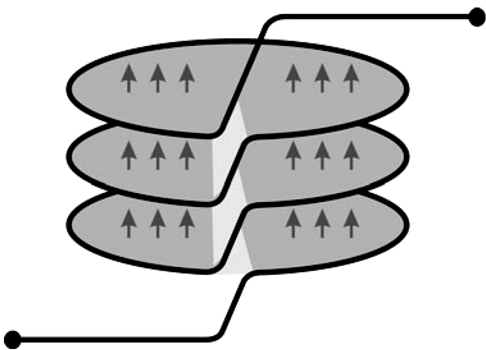


图9.5　依附于由三匝线圈组成的集中绕组的面

在具有分布绕组的圆柱形电机中，定子和转子线圈沿圆周分布；定子导体放在定子磁路内表面的槽中，而转子导体则放在与气隙接触的转子表面的槽中；两个相对的导体构成一匝，也就是一个线圈。绕组是由一系列相连的线圈构成，其磁通是各个独立线圈的磁通之和，每匝线圈的磁通取决于其相对于磁场的位置。当磁力线与线圈面相垂直的时候，磁通达到最大值；当磁力线与线圈面平行时，线圈磁通为零。

前面已经证明，单匝线圈的磁通与磁感应强度矢量和线圈面法线之间夹角的余弦值成正比，该法线称为磁轴。在图9.1中该法线与连接相对的两根导体的直线相垂直；给

定磁场的方向，每匝线圈的磁通 $\Phi(\theta)$ 由其位置角 θ 决定；等式（9.11）和式（9.12）给出定子和转子的单匝磁通，其是在线圈法线与磁通矢量之间夹角的基础上求得的。

由于构成分布绕组的线圈有其各自的磁轴且方向不一，对应的磁通也不相等，因此，总的绕组磁通不能用线圈匝数与单匝磁通相乘得到。

一般情况下，绕组磁通由各个线圈磁通叠加得到；当绕组为集中绕组时，绕组磁通矢量的幅值为 $\psi=N\Phi$；当绕组按导体线密度 $N'(\theta)$ 分布时，绕组磁通通过积分求得；在导体间隔为 $\mathrm{d}\theta$ 角时，导体数为：

$$\mathrm{d}N=N'(\theta)R\mathrm{d}\theta$$

式中，R 为电机的半径；在区间 $\theta\in[0\cdots\pi]$ 内的每组导体和在区间 $\theta\in[\pi\cdots2\pi]$ 与其直径相对的那组导体组成一匝线圈，每匝线圈的磁通由产生磁场的磁通矢量和该线圈法线之间夹角决定。最终，每匝线圈的磁通可以由 θ 的函数表示；$\mathrm{d}N$ 匝线圈产生的磁通为：

$$\mathrm{d}\Psi=N'(\theta)\Phi(\theta)R\mathrm{d}\theta$$

绕组中总的磁通为：

$$\Psi=\int_0^{\pi}N'(\theta)\Phi(\theta)R\mathrm{d}\theta \tag{9.13}$$

等式（9.13）既可应用在定子绕组，也可应用在转子绕组。

定子绕组自感的计算就是式（9.13）的一个实际应用，自感是一个表征绕组电流对绕组磁通的作用的系数。当绕组磁通不是由任何外部激励作用产生，而只是由绕组电流作用产生时，自感 $L_{\mathrm{S}}=\Psi/I$。在使用式（9.13）之前，必须计算出每匝线圈的磁通 $\Phi(\theta)$，它是通过对气隙磁感应强度 $B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}$ 进行面积分计算得到，此处 $B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}$ 表示由定子电流产生的磁感应强度的径向分量。用定子电流 I 除以绕组磁通，得到定子绕组的自感系数。

利用上述步骤也可得到定子绕组和转子绕组之间的互感系数。互感系数 L_{m} 表征了转子电流对定子绕组磁通的影响；当转子电流对气隙磁场强度产生影响时，其改变了定子线圈的合成磁通，进而改变定子绕组磁通；同时，L_{m} 也表征定子电流对转子绕组磁通的作用。互感系数的计算需要对前面自感系数的公式进行修改，当计算定子每匝线圈磁通 $\Phi(\theta)$时，需要把 $B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{S}}$ 替换为 $B_{\mathrm{r}}^{\mathrm{R}}$，于是，$\Phi(\theta)$ 所对应的磁通是由转子电流在定子每匝线圈中产生的；此时，由式（9.13）计算得到的磁通是转子电流作用在定子绕组上时产生的磁通；由计算出的磁通除以转子电流，得到定子绕组和转子绕组的互感系数。

图 9.1 所示电机中定子绕组的磁通是利用式（9.13）计算得到的，且其前提为气隙中磁场是由定子电流感应产生的，因此，气隙磁场的计算是在转子电流为零的前提下进行的。定子分布绕组是 $N_{\mathrm{T}}=N_{\mathrm{C}}/2$ 个相连的线圈，N_{C} 表示定子绕组的导体数，N_{T} 表示定子绕组的匝数。根据式（8.2）线圈匝数 $N_{\mathrm{T}}=2RN'_{\mathrm{Smax}}$，$N'_{\mathrm{Smax}}$为定子导体线密度最大值，其位于图 9.1 中导体 S1 和 S2 处。

为了计算绕组磁通，必须计算每匝线圈的磁通；当线圈法线与磁轴夹角为时 θ，由式（9.11）可以得到线圈磁通 $\Phi_{\mathrm{S}}(\theta)$ 为：

$$\Phi_{\mathrm{S}}(\theta)=\Phi_{\mathrm{S1}}\cos\theta$$

定子导体的线密度为：

$$N'(\theta)=N_{\mathrm{Smax}}\cos\theta$$

式（9.13）改写为：(9.14)

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{S}} &= \int_0^{\pi} N_{\mathrm{Smax}}\cos\theta\cdot\Phi_{\mathrm{S1}}\cos\theta\cdot R\cdot \mathrm{d}\theta \\ &= N_{\mathrm{Smax}}\Phi_{\mathrm{S1}}R\int_0^{\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{2}N_{\mathrm{Smax}}\Phi_{\mathrm{S1}}R \\ &= \frac{\pi}{4}N_{\mathrm{T}}\Phi_{\mathrm{S1}} \end{aligned} \tag{9.14}$$

由于 $\pi/4<1$，从式（9.14）中可以看出，当具有相同匝数时，分布绕组的磁通要比集中绕组的磁通小。通过将图 9.1 中所有的导体都放在 S1 和 S2 处便可获得集中绕组，将绕组匝数 N_{T} 与每匝线圈磁通 Φ_{S1} 相乘即可得到集中绕组的磁通。

9.4.4 绕组磁通矢量

绕组磁通由一个描述磁通位置、幅值和方向的矢量表示，磁通矢量由表示各个线圈磁通的矢量相加得到。当各个线圈磁通矢量具有不同的方向时，需要计算它们的矢量和，并确定绕组磁通矢量的位置和方向。

用矢量表示单匝线圈的磁通的惯例在 4.4 节已作过介绍，单匝线圈磁通矢量的位置和方向由相应线圈包围的面和法线决定。5.5 节中，在由绕组电流产生的磁力线的位置和方向的基础上，定义了绕组的磁轴，而绕组电流在磁路中感应的磁极的位置决定了绕组轴线的位置。8.5 节中，给出了用磁通矢量代表分布绕组产生的磁场的惯例，并再次指出磁通矢量的位置和方向由磁场的空间位置（即磁极的位置）决定。结合图 9.1 中所示电机，给出了计算磁通矢量位置和方向的例子，首先要确定由分布绕组电流产生的磁场的分布，绕组磁通矢量的方向是在磁力线方向的基础上确定的，而其位置由磁极决定，此处，磁极为磁路的定位区域且磁感应强度达到最大值；按此方法，图 9.2 给出了有磁通矢量代表磁场的示意图。

磁通矢量的位置和绕组的磁轴也可由单匝线圈磁动势矢量相加或线圈的磁通矢量相加得到。图 9.6 为由三匝线圈 A1-A2、B1-B2、C1-C2 组成的定子绕组的矢量示意图，上半部分表示各个线圈的磁动势矢量，分别由矢量 F_{A}，F_{B}，F_{C} 表示，它们由各自线圈的法线决定；如果不存在线圈 B 和 C，则磁动势 F_{A} 决定了绕组磁通的位置和方向；图 9.6 的下半部分为由三匝线圈磁动势合成的绕组合成磁动势 F_{S} 示意图，合成磁动势矢量是由 F_{A}、F_{B} 和 F_{C} 矢量相加得来的。由于每匝线圈磁通由对应的磁动势除以磁阻求得，因此绕组磁通矢量的位置和方向由合成磁动势决定，如图中所示，绕组磁通矢量与中间线圈 A1-A2 的法线重合。

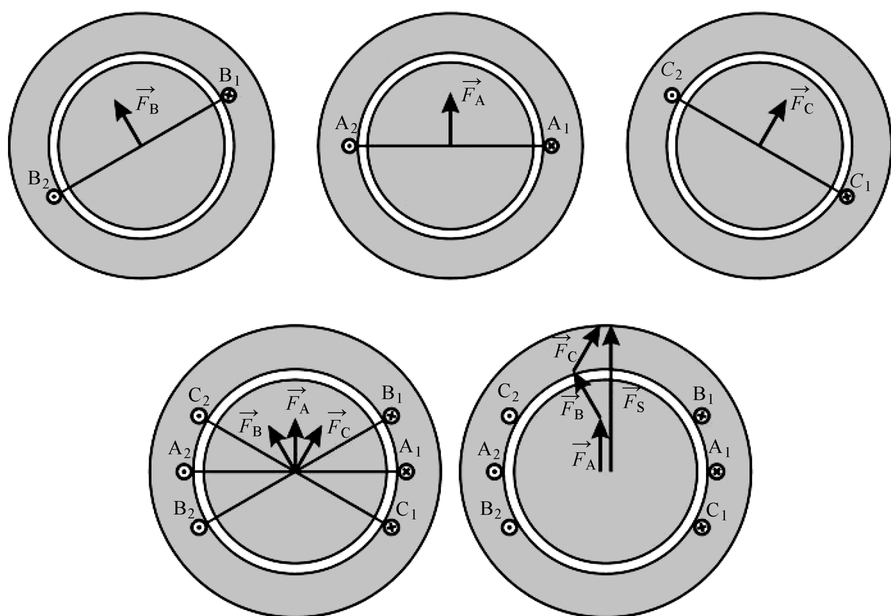
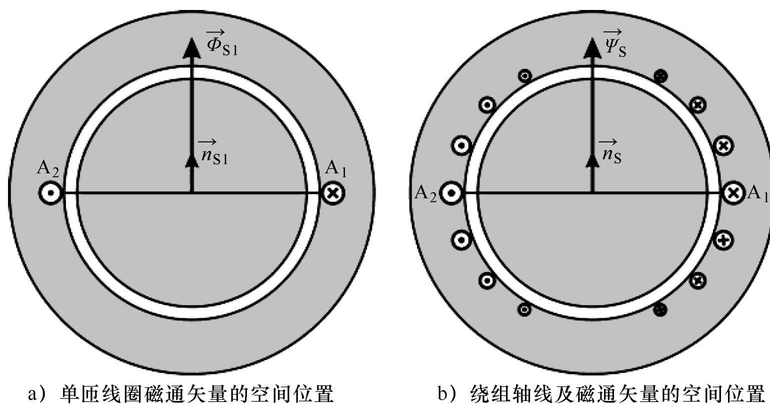


图 9.6　三个线圈的磁动势矢量相加及各线圈的磁轴

9.5　绕组轴线和磁通矢量

前面的分析为确定绕组轴线的一些细节，如单匝线圈磁通矢量的位置，由多匝线圈组成的绕组的磁通矢量等。下面给出了一些结论，并通过图 9.7 对这些进行验证，这些



a）单匝线圈磁通矢量的空间位置　　b）绕组轴线及磁通矢量的空间位置

图　9.7

结论将在后面的章节中用到。

图中所示电机绕组为分布绕组，且其导体线密度按正弦分布，导体 A1 和 A2 处为导体线密度最大值，线圈 A1-A2 产生的磁通 Φ_{S1} 也为最大值。

线圈 A1-A2 的磁通 Φ_{S1} 的位置由法线 n_{S1} 决定，法线 n_{S1} 是一个与线圈 A1-A2 包围平面垂直的单位矢量。

定子绕组磁通矢量 Ψ_S 的位置由单位矢量 n_S 决定，该矢量代表绕组的轴线（即绕组的磁轴），因此分布绕组的导体按正弦分布时，磁通矢量和绕组轴线与线圈 A1-A2 磁通矢量具有相同的位置和方向，此时导体 A1 和 A2 位于导体线密度最大值处。

9.6 定子磁通矢量和转子磁通矢量的矢量积

图 9.1 为圆柱形电机的定子绕组和转子绕组为直流时，用磁力线表示磁场分布图。两个相互作用产生电磁转矩，如式（9.7）所示，式中 θ_m 角为转子相对于定子的位置，它也代表定转子磁通矢量之间的夹角。

一般情况下，定子和转子都是由多套绕组组成，绕组中电流为直流或交流，绕组电流为交流可能产生旋转磁场，该旋转磁场可以由一个旋转磁通矢量代表；该磁场相对于产生磁动势的绕组旋转，而磁动势又激励产生磁场。当定子绕组为交流并产生旋转磁场时，定子磁通矢量 $\theta_{\Psi S}$ 的方向取决于定子绕组电流的瞬时值；当转子绕组电流为交流并产生旋转磁场时，转子电流的瞬时值决定了转子磁通矢量 $\theta_{\Psi R}$ 相对于转子的位置。因此，转子磁通矢量 $\theta_{\Psi R}$ 相对于转子的位置由转子位置 θ_m 和转子电流瞬时值决定。一般情况下，定子磁通矢量和转子磁通矢量之间的夹角 $\Delta\theta=\theta_{\Psi S}-\theta_{\Psi R}$ 由转子位置 θ_m 和定转子绕组电流的瞬时值决定，如图 9.8 所示。根据式（9.6）可得：

$$T_{em}=\frac{\mu_0\pi R^3L}{\delta}J_{R0}J_{S0}\sin\theta \tag{9.15}$$

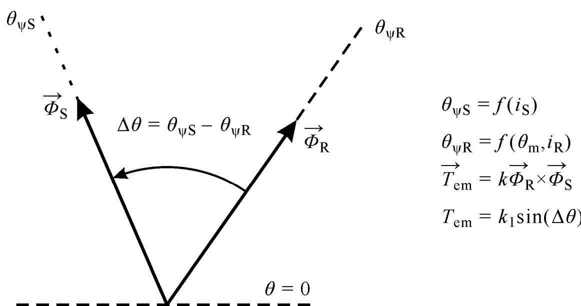


图 9.8 定子和转子磁通矢量的空间位置及矢量积表示的电磁转矩

当定子磁通和转子磁通之间的夹角 $\Delta\theta=\theta_{\Psi S}-\theta_{\Psi R}$ 为 π/2 时，电磁转矩达到最大值。

$$T_{max}=\frac{\mu_0\pi R^3L}{\delta}J_{R0}J_{S0} \tag{9.16}$$

电磁转矩可以由定子磁通矢量 Φ_{S1} 和转子磁通矢量 Φ_{R1} 的矢量积表示，磁通 Φ_{S1} 和 Φ_{R1} 为图 9.1 中电机线圈 S1-S2 和 R1-R2 的磁通，S1-S2 和 R1-R2 代表分布绕组的线圈，并且它们为定子/转子的导体线密度最大值处。当电机转子绕组中没有电流时，Φ_{S1} 为线圈 S1-S2 的合成磁通；同样，当定子绕组中没有电流时，Φ_{R1} 为 R1-R2线圈的合成磁通。在式（9.9）和式（9.10）的基础上，求得矢量 Φ_{S1} 和 Φ_{R1} 的幅值：

$$\Phi_{S1}=\frac{2\mu_0R^2L}{\delta}J_{S0},\ \Phi_{R1}=\frac{2\mu_0R^2L}{\delta}J_{R0}$$

由于电磁转矩函数 sin(Δθ) 表示，因此其可以通过计算定转子磁通矢量的矢量积得到，电磁转矩可以由下式表示：

$$\frac{\mu_0\pi R^3L}{\delta}J_{R0}J_{S0}\sin\Delta\theta=\left(\frac{\pi\delta}{4\mu_0LR}\right)\left(\frac{2\mu_0R^2L}{\delta}J_{S0}\right)\left(\frac{2\mu_0R^2L}{\delta}J_{R0}\right)\sin\Delta\theta$$

上式为矢量积的幅值，矢量积可以表示为式（9.17）：

$$\vec{T}_{em}=\left(\frac{\pi\delta}{4\mu_0LR}\right)\cdot[\vec{\Phi}_R\times\vec{\Phi}_S]=k[\vec{\Phi}_R\times\vec{\Phi}_S] \tag{9.17}$$

式中常数 k 为

$$k=\frac{\pi\delta}{4\mu_0LR}$$

由于线圈 S1-S2 和 R1-R2 的矢量磁通 Φ_{S1} 和 Φ_{R1} 分别与定子磁通矢量和转子磁通矢量具有相同的空间位置，相应的，电磁转矩也可由矢量积 $\Psi_S\times\Psi_R$ 表示，其中 Ψ_S、Ψ_R 分别为定子磁通矢量和转子磁通矢量；由式（9.14）可以求得磁通矢量 Ψ_S、Ψ_R 的幅值：

$$\Psi_S=\frac{\pi}{4}N_{TS}\Phi_{S1},\ \Psi_R=\frac{\pi}{4}N_{TR}\Phi_{R1}$$

式中，N_{TS} 和 N_{TR} 表示定子绕组和转子绕组的匝数；由于线圈的合成磁通矢量和相应绕组的磁通矢量重合，因此，式（9.17）可转化为：

$$\begin{aligned}\vec{T}_{em}&=\left(\frac{\pi\delta}{4\mu_0LR}\right)\cdot[\vec{\Phi}_R\times\vec{\Phi}_S]\\&=\left(\frac{\pi\delta}{4\mu_0LR}\right)\cdot\left(\frac{4}{\pi N_{TS}}\right)\left(\frac{4}{\pi N_{TR}}\right)[\vec{\Psi}_R\times\vec{\Psi}_S]\\&=\left(\frac{4\delta}{\mu_0\pi LRN_{TS}N_{TR}}\right)\cdot[\vec{\Psi}_R\times\vec{\Psi}_S]\\&=k_1\cdot[\vec{\Psi}_R\times\vec{\Psi}_S]\end{aligned} \tag{9.18}$$

式中，k_1 为：

$$k_1 = \frac{4\delta}{\mu_0 \pi L R N_{TS} N_{TR}}$$

式（9.17）和式（9.18）给出了电磁转矩的矢量形式，该矢量的位置由柱面坐标系统的 z 轴（即转子转轴）决定，矢量转矩的方向与 z 轴的参考方向一致；当电磁转矩为正时，转子转速 Ω_m 增加，位移角 θ_m 增大，旋转方向为逆时针方向。电磁转矩的幅值由下式确定：

$$T_{em} = k\,|\vec{\Phi}_R \times \vec{\Phi}_S|$$

问题（9.3）：电磁转矩表达式（9.7）中有负号，那么应该在图 9.1 中表示出负的转矩吗？为什么不含有负号？

解答（9.3）：电磁转矩是由函数 $\sin(\Delta\theta)$ 决定的，其中 $\Delta\theta = \theta_{\Psi S} - \theta_{\Psi R}$，$\theta_{\Psi S}$ 角和 $\theta_{\Psi R}$ 角确定了定转子磁通矢量的位置。在图 9.1 中，定转子磁通矢量的位置是定转子绕组中通入直流时的位置，因此，$\theta_{\Psi S} = \pi/2$、$\theta_{\Psi R} = \pi/2 + \theta_m$、$\Delta\theta = -\theta_m$；在上述情况下，电磁转矩与函数 $\sin(\Delta\theta) = -\sin(\theta_m)$ 成正比，从而导致式（9.7）中为负号。

9.7　电磁转矩产生的条件

电磁转矩可以由磁通矢量 Φ_{S1} 和 Φ_{R1} 的矢量积计算得到，其中 Φ_{S1} 是由定子线圈 S1-S2（图 9.1 中）产生，Φ_{R1} 由转子线圈 R1-R2 产生；式（9.17）为电磁转矩的表达式，式（9.18）是电磁转矩的矢量形式。

电磁转矩与定转子磁通矢量之间夹角 $\Delta\theta$ 的正弦值成正比，当定子绕组和转子绕组中电流为直流时，定子磁通相对于定子没有转动且转子磁通相对于转子也不转动，在这种情况下，定子磁通超前转子以 $\Delta\theta = -\theta_m$ 角。

当转子以恒定转速 Ω_m 旋转，初始位置为 $\theta_m(0) = 0$ 时，转子位置以函数 $\theta_m(t) = \Omega_m t$ 变化，定转子磁通矢量之间的夹角为 $\Delta\theta = -\theta_m = \Omega_m t$。当定转子绕组中电流均为直流时，电磁转矩与 $\sin(\Omega_m t)$ 成正比，此时电磁转矩和对应转换功率 $P_{em} = T_{em}\Omega_m$ 的平均值均为零。因此，当定子绕组和转子绕组中电流均为直流时，电机中产生的平均功率为零。

当定转子磁通矢量之间的夹角 $\Delta\theta$ 恒定时，就能产生一个平均值非零的电磁转矩；且在给定绕组电流的情况下，$\Delta\theta = \pi/2$ 时，电磁转矩具有最大值。

当定转子绕组中电流为直流时得不到 $\Delta\theta =$ 定值的条件，后面将证明，定子绕组或转子绕组中至少有一个通入交流并产生旋转磁场时才能使 $\Delta\theta =$ 定值。有三种情况能够满足 $\Delta\theta =$ 定值的条件，图 7.8 给出了建立定转子磁通矢量相对静止的方法，下面又重复了这三种方法，并从磁通矢量的角度进行了阐述。

由上面分析可知，只有当 $\Delta\theta = \theta_{\Psi S} - \theta_{\Psi R}$ 恒定时才能产生平均值非零的电磁转矩，也就是说，定转子磁通矢量之间必须保持相对静止，不管定转子磁通矢量旋转还是静止，由磁通矢量代表的磁场之间的夹角必须保持不变。下面给出满足此条件的三种情况：

a）定子磁场相对定子静止，转子磁场相对转子旋转，方向相反；此时，转子磁场相对定子静止。

b）定子磁场相对定子旋转，转子磁场相对转子旋转；转子相对定子的转速和转子磁场相对转子的转速之和与定子磁场相对定子的转速相等。

c）定子磁场相对定子的旋转速度与定子的转速相等，且转子磁场相对转子静止。

给定转子绕组中通入直流时产生的定子磁场和转子磁场与各自对应的绕组相对静止；当定子或转子绕组中至少有两套绕组且空间方向不同，并给绕组中通以具有合适频率和初始相位的交流，绕组将会产生相对于绕组旋转的磁场。在旋转磁场的章节已经对旋转磁场产生条件进行了讨论。

情况（a）对应的是直流电机的情况，如图 7.8a 所示。由于定子导体中电流为直流，定子磁通矢量相对于定子没有转动，电磁转矩产生要求转子磁通相对定子磁通静止，也就是说图 7.8a 中转子磁通矢量静止不动。为了实现当转子旋转时转子磁通矢量保持静止不动，转子导体中电流产生的磁场必须以相对于转子 $-\Omega_m$ 的转速旋转；此时，转子以 Ω_m 的转速沿正方向旋转，而转子磁通相对于转子旋转的方向为反方向，因此，转子磁通相对于定子静止。为使转子绕组产生旋转磁场，转子绕组必须通以交流，其频率由转子转速决定。但是，直流电机由直流电源供电，为把直流电流转换为交流转子电流，需要一个换相器，换相器由与定子接触的电刷和与转子接触的集电器组成。集电器由许多与转子导体相连的独立的组件组成，当转子转动，电刷下的组件滑动，改变电刷与组件的连接并改变直流电流进入转子绕组的路径；如此，换相器把电源的直流电流转换为交流进入转子绕组，转子中交流的频率由转子转速决定。在直流电机这一章节将会对换相器做更详细的分析。由于换相器的存在，使得磁通矢量 $\boldsymbol{\Phi}_{R1}$ 与磁通矢量 $\boldsymbol{\Phi}_{S1}$ 保持相对静止，即 $\Delta\theta$ 恒定不变。

情况（b）对应图 7.8b 的异步电机。定子绕组和转子绕组中电流均为交流，角频率分别为 ω_s 和 ω_k。定子磁通矢量以 Ω_s 的角速度相对于定子旋转，转子磁通以 Ω_k 的角速度相对于转子旋转；角频率之差 $\Omega_s-\Omega_k$ 决定了转子转速 Ω_m。定转子磁通矢量都是角速度 Ω_s 旋转，因此，它们之间的夹角保持不变。

情况（c）对应图 7.8c 的同步电机。转子磁通既可由通入直流的绕组产生，也可由固定在转子上的永磁体产生；在任一情况，转子磁通矢量 Φ_{R1} 与转子具有相同的转速。定子绕组由通入交流的两相或多相绕组组成，角频率为 ω_s 的转子绕组电流产生的转子磁场以加速度 Ω_s 相对于定子旋转。在同步电机中，定子电流的频率必须确保定子磁场与转子具有相同的转速 $\Omega_s=\Omega_m$。因此，磁通矢量都是以角速度 Ω_s 旋转，它们之间的夹角保持不变。

问题（9.4）：图 3.6 中，作用在一匝通有电流的线圈上的电磁转矩的表达式是在均匀磁场中求得的，线圈的法线相对于矢量 $\boldsymbol{B}$ 有一个倾斜角 θ。假如线圈以与磁场方向垂直的轴旋转，转速已知且恒定，确定作用在线圈上电磁转矩的瞬时值和平均值；另外，如果磁场强度不变，但是线圈中电流可变，确定 $i(t)$，使线圈获得一个平均值非零的转矩。

假设磁感应强度 $B(t)$ 可变，而电流 $i(t)=I$ 恒定，确定 $B(\theta)$，使线圈获得一个平均值非零的转矩。

解答（9.4）：作用在单匝线圈上的电磁转矩 T_{em} 为 $I\cdot B\cdot S\cdot \sin(\theta)$。当线圈以角速度 Ω 旋转，线圈电流和磁感应强度不变时，电磁转矩随着函数 $\sin(\Omega t)$ 变化，其转矩平均值为零。当磁感应强度不变，电流 $i(t)=I\sin(\omega t)$（角频率 ω 由线圈角速度 Ω 确定）时，电磁转矩与 $(\sin(\omega t))^2$ 成正比，且平均值不为零。如果线圈电流恒定，当磁感应强度 $B(t)=B_m\cdot\sin(\omega t)$（角频率 ω 由线圈角速度 Ω 确定）时，可以得到平均值非零的电磁转矩。

9.8　电磁转矩和电机尺寸之间的关系

由（9.16）所示电磁转矩的表达式可以看出，电磁转矩与 R^3L 成正比，也就是说，其与电机轴向长度 L 和电机直径 D 的三次方成正比。直径和轴向长度是电机的线性参数，常用记法 l 既可表示直径也可表示长度。因此，电磁转矩与电机线性参数 l 的四次方成正比（$T\sim l^4$），又电机的体积与 l 的三次方成正比（$V\sim l^3$），因此，电磁转矩 $T\sim V^{4/3}$。

电机大都由铁和铜做成，且这些材料的质量密度（$\gamma_{Fe}=\Delta m_{Fe}/\Delta V=7874\text{kg/m}^3$，$\gamma_{Cu}=\Delta m_{Cu}/\Delta V=7874\text{kg/m}^3$）已知，因此，一台电机的质量由事先设计好的电磁转矩决定，电磁转矩与电机质量之间的关系为 $T\sim m^{4/3}$。举个例子，如果将电机的尺寸增加一倍，则新的电磁转矩为原来的 $2^4=16$ 倍。

电磁转矩与电机质量之间的关系为 $T\sim m^{4/3}$ 也可用另外一种方法证明。前面已经证明，电磁转矩可由定转子磁通矢量的矢量积求得，磁通的幅值取决于磁通穿过面（$S\sim l^2$）和磁感应强度（$B<B_{max}$），对磁感应强度进行限制是为了防止铁磁材料饱和，其值一般不超过 1.5～1.7T。因此，定子磁通矢量和转子磁通矢量取决于 l^4，由此可知电机的电磁转矩与 l^4 成正比。

电机中机电转换的功率与电机的转矩和转速有关，因此，$P\sim V^{4/3}\Omega$。当两台电机具有相同的尺寸而转速不同时，转速较高的能够输送更多的能量。当要求机电转换功率 P 恒定，而电机转速有多种选择时，选择转速较高的电机比较有利；高转速时，电磁转矩 $T=P/\Omega$ 较小，由于 $T\sim l^4$，因此电机的体积相对较小。例如，当电机和负载之间由齿轮相连时，不同的电机转速经过齿轮后可以达到要求的负载转速；设计该系统时，选择的齿轮比应该是选择具有较高转速的电机，这样能够减小电机的尺寸和重量。

从式（9.16）中可以看出，电磁转矩与气隙长度长 δ 反比，当定子电流和转子电流为定值时，减小气隙长度会使电磁转矩增大；当气隙长度趋于无限小时，电磁转矩接近无限大，考虑到磁路饱和的情况，电磁转矩不可能无限大。上述电磁转矩的表达式是在忽略磁路饱和的前提下求得的，定子和转子磁路是由磁导率 μ_{Fe} 很高的铁片组成，这使得铁心中的磁场强度 H_{Fe} 可以忽略。当磁感应强度 B_{Fe} 过高时，铁心中磁场强度 H_{Fe} 便不

能忽略，此时式（9.16）是无效的。由前面的分析中知道，气隙中的磁感应强度 B_0 与气隙长度 δ 成反比，忽略槽的影响，其与铁心中的磁感应强度几乎相等 $B_{Fe}=B_0$。因此，气隙长度的下降会导致磁感应强度的增加，当 B 达到最大值 $B_{max}=1.5\sim1.7T$ 时，铁心饱和，磁导率 μ_{Fe} 下降，H_{Fe} 不可忽略。从这个意义上讲，忽略磁路饱和求得的（9.15）及其后面的结论是无效的。

在能够满足所要求的磁感应强度 B 的前提下，为了降低电流及铜耗，电机的气隙应设计得尽量小。然而，由于力学性能的限制，小电机的气隙不能比 1mm 小太多，大电机的气隙至少应该为几毫米。设置气隙长度的下限是为了防止旋转中的转子与定子相接触；在制作电机转子和定子表面时，有限的误差便有可能发生接触和摩擦。电机转轴在径向上的弹性形变也有可能使转子定子摩擦；这些情况使得电机气隙长度不能过小。

问题（9.5）：由电机电磁转矩和功率的表达式可以看出，电磁转矩和功率与电机的气隙长度 δ 成反比，在此基础上，保持电机电流不变，减小气隙长度，可以使电机转矩和功率无限增大。但是，某些因素的存在会使上述结论无效，举出其中两种因素。

解答（9.5）：电磁转矩的表达式表明，减小气隙长度能使电磁转矩和转换功率增大。表面上看，当气隙长度足够小时，能得到很大的电磁转矩。

这一结论是在忽略磁饱和的情况下得到的。电磁转矩的表达式是在假设磁场强度 H_{Fe} 可以忽略的情况下得到的，该假设只有在磁通密度 B_{Fe} 没达到其饱和值 $B_{max}=1.5\sim1.7T$ 时成立。换句话说，给定磁动势 $Ni=2H\delta$，磁通密度随着气隙的减小而增加（$B=\mu_0 Ni/(2\delta)$）；当磁通密度 B 达到其饱和值 B_{max} 后，磁感应强度 B_{Fe} 的增加由式 $\Delta B=\mu_0\Delta H$ 决定，也就是说饱和铁磁材料的磁导率 $\Delta B/\Delta H$ 接近 μ_0。当磁通变化时，磁路饱和等效于移除部分电机定子和转子的磁路，由于 $\Delta B/\Delta H\approx\mu_0$，饱和的铁心就像空气一样。因此磁路饱和可以当做是大大增大气隙长度。因此，通过减小气隙长度获得很大的电磁转矩是不现实的。需要注意的是，大部分电机在设计时，为了充分利用电机磁路，会使电机磁通密度接近饱和值。

另外一个阻止转矩增大的原因就是气隙长度不能减小到某一范围（一般为 1mm），这是由电机的机械条件决定的。

9.9　旋转磁场

根据前面的分析，产生均值非零的电磁转矩的条件之一为定子磁通矢量和转子磁通矢量之间的相对位置 $\Delta\theta$ 保持不变。在直流电机中，定子磁通矢量和转子磁通矢量相对于定子保持静止；在交流电机中，不管是异步电机还是同步电机，两种磁通矢量以同一速度旋转。

为了实现上面的条件，在转子旋转的情况下，至少要有一种磁通（Φ_S 或 Φ_R）相对产生该磁通的绕组旋转。相对于励磁绕组旋转的磁场又称为旋转磁场；旋转磁场的产

生需要至少两套独立的绕组，并且这两套绕组的磁轴具有合适的空间位置，绕组中交流电流应有相等的频率和幅值，电流的初始相位应与绕组磁轴的空间位置相对应。在上述情况下，该绕组系统将产生以某一转速旋转的磁动势和磁通，转速由交流的频率决定。

9.9.1 两相正交绕组系统

电磁转矩取决于定子磁通矢量和转子磁通矢量的矢量积，并与这两种矢量之间夹角 $\Delta\theta$ 的正弦值有关；另外，只有当 $\Delta\theta$ 恒定时，电机能量才能以恒定的转矩和功率进行转换。因此，定子绕组和（或）转子绕组必须能够产生旋转磁场。

图 9.9 给出了由两套绕组 α 和 β 组成的定子，每套绕组有 N 匝线圈；绕组既可以是集中绕组也可是分布绕组，绕组的结构对后面的分析和结论不会产生影响，为简单起见，后面的讨论都是在绕组为集中绕组的基础上进行的。单匝线圈磁通由 Φ 表示，它等于磁动势 $F=Ni$ 和磁阻 R_μ 的比值；由于铁心的高磁导率，铁心中磁场强度 H_{Fe} 可以忽略；假设绕组中电流为 i，气隙中的磁场强度可以由关系式 $Ni=2\delta H_0$ 求得，而气隙中磁感应强度 B 为 $B_0=\mu_0 H_0$。面 S_1 为绕组中一匝线圈所包围的面，假设该面穿过气隙，其代表半圆柱面，且其面积 $S_1=\pi LR$。因此，单匝线圈的磁通为：

$$\Phi=B_0S_1=\mu_0H_0\pi LR=\frac{\mu_0\pi LR}{2\delta}Ni$$

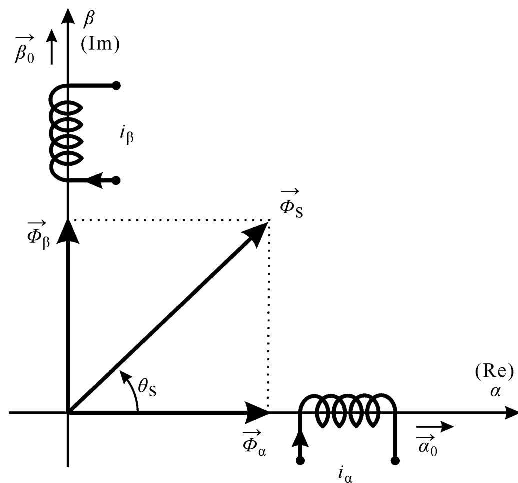


图 9.9 两套正交绕组系统

上式可以通过用磁动势除以磁阻（$\Phi=F/R_\mu$）得到证明。假设 $H_{Fe}=0$，且每条磁力线穿过气隙两次，则：

$$R_\mu=\frac{1}{\mu_0}\frac{2\delta}{S_1}=\frac{1}{\mu_0}\frac{2\delta}{\pi LR}$$

式中，$S_1=\pi LR$ 表示磁通穿过磁路的面积；μ_0 为气隙磁导率；2δ 表示磁路的长度，假设此处的磁场强度 H 足够大，且磁场强度的线积分为磁压降。磁力线穿过气隙两次，即磁力线从定子 N 极气隙，穿过气隙进入转子，经过转子再次进入气隙，进而进入定子 S 极。式 $\Phi=F/R_\mu$ 可以转化为：

$$\Phi=\frac{F}{R_\mu}=\frac{Ni}{\left(\frac{1}{\mu_0}\ \frac{2\delta}{\pi LR}\right)}=\frac{\mu_0\pi LR}{2\delta}Ni \tag{9.19}$$

绕组 α 和 β 的磁轴位于图 9.9 所示直角坐标系的横坐标和纵坐标轴上，绕组 α 的轴线和单位矢量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 确定的位置平行。通入电流 i_α，产生磁动势 $F_\alpha=Ni_\alpha$，该磁动势与单位矢量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的位置和方向一致。单匝线圈中磁通可用磁动势除以磁阻求得，即 $\Phi_\alpha=Ni_\alpha$，则绕组磁通为 $N\Phi_\alpha=N^2i_\alpha/R_\mu$。绕组 β 的轴线与绕组 α 的轴线正交，且指向矢量 $\boldsymbol{\beta}_0$ 的方向；绕组磁动势 F_β 和磁通 Φ_β 与纵坐标轴 β 的方向一致，并与绕组电流 i_β 成正比。绕组磁通矢量可由单位矢量表示为：

$$\vec{\Phi}_\alpha=\frac{N}{R_\mu}i_\alpha\cdot\vec{\alpha}_0,\ \vec{\Phi}_\beta=\frac{N}{R_\mu}i_\beta\cdot\vec{\beta}_0$$

绕组 α 和 β 中的交流电流具有相同的幅值 I_m 和角频率 ω_s，ω_s 表示定子绕组中电流的角频率；两套绕组的初始相位是不相等的，绕组 α 中的电流超前绕组 β 中的电流 $\pi/2$ 角，该角与绕组 α 和 β 的磁轴之间的空间位移相对应。式（9.20）给出了两套绕组中的电流：

$$\begin{aligned}i_\alpha&=I_m\cos(\omega_S t)=I_m\cos\theta_S\\ i_\beta&=I_m\cos\left(\omega_S t-\frac{\pi}{2}\right)=I_m\sin(\omega_S t)=I_m\sin\theta_S\end{aligned} \tag{9.20}$$

定子绕组的合成磁动势 F_S 和合成磁通 Φ_S 可通过叠加 α 和 β 分量得到，如果给正交绕组 α 和 β 通以式（9.20）中的电流，可求得合成磁动势矢量 $\boldsymbol{F}_S$ 如式（9.21）所示，合成磁通矢量 $\boldsymbol{\Phi}_S$ 如式（9.22）所示。由于 α 和 β 分量与函数 $\cos(\theta_s)$ 和 $\sin(\theta_s)$ 成正比，θ_s 以 $\omega_s t$ 变化，后一方程式表示磁通矢量以速度 ω_s 旋转，幅值恒定。等式（9.22）为单匝合成磁通矢量，而合成磁通矢量可通过将单匝磁通与绕组线圈匝数相乘求得，如式（9.23）。

$$\begin{aligned}\vec{F}_S&=R_\mu\vec{\Phi}_S=NI_m(\vec{\alpha}_0\cos\theta_S+\vec{\beta}_0\sin\theta_S)\\&=NI_m[\vec{\alpha}_0\cos(\omega_S t)+\vec{\beta}_0\sin(\omega_S t)]\end{aligned} \tag{9.21}$$

$$\vec{\Phi}_S=\frac{NI_m}{R_\mu}(\vec{\alpha}_0\cos\theta_S+\vec{\beta}_0\sin\theta_S) \tag{9.22}$$

$$\vec{\Psi}_S=N\vec{\Phi}_S=\frac{N^2I_m}{R_\mu}(\vec{\alpha}_0\cos\theta_S+\vec{\beta}_0\sin\theta_S) \tag{9.23}$$

磁通分量 $\boldsymbol{\Phi}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_\beta$ 是定子合成磁通矢量 $\boldsymbol{\Phi}_S$ 在坐标轴 α 和 β 上的投影，该分量也代表绕组 α 和 β 中单匝线圈的磁通。图 9.9 中，两套绕组的轴线正交，因此，绕组 α 中的电流不会改变绕组 β 的磁通，同样，绕组 β 中的电流也不会改变绕组 α 的磁通。

由于旋转磁通矢量具有分量，因此，可以知道，旋转磁场的产生至少需要两套空间分布的绕组。

式（9.22）中，磁通矢量的 $\boldsymbol{\Phi}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_\beta$ 分量与单位矢量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 和 $\boldsymbol{\beta}_0$ 有关。为简化分析，可以用复数域代替实数域 α-β，α 轴代表实轴，β 轴代表虚轴。矢量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 用 1 代替，矢量 $\boldsymbol{\beta}_0$ 用 j 代替，就可将实数域 α-β 坐标系统转换为复数域坐标系统。因此，式（9.22）可转化为：

$$\underline{\Phi}_S = \Phi_\alpha + \mathrm{j}\Phi_\beta = \frac{NI_m}{R_\mu}(\cos\theta_S + \mathrm{j}\sin\theta_S) = \frac{NI_m}{R_\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_S} \tag{9.24}$$

由前面分析可知，两个相互独立且正交的绕组系统可产生旋转磁场。当两套绕组中通入幅值和角频率相等、初始相位相差 π/2 的正弦电流时，其合成磁动势和磁通在电机中旋转，因此，这些参数可由旋转矢量表示，这些矢量以角速度 Ω_s（由角频率 ω_s 决定）旋转；旋转过程中，这些旋转矢量的幅值保持不变。图 9.9 所示的两套绕组系统中，角速度 Ω_s 与角频率 ω_s 相等。

问题（9.6）：假设图 9.9 所示定子两套绕组中电流 i_α 和 i_β 幅值相等，初始相位差用 φ 表示。

1）当 $\varphi=0$ 时，分析并确定定子磁通矢量。

2）当 $\varphi=\pi/2$ 时，分析并确定定子磁通矢量。

3）证明当 $0<\varphi<\pi/2$ 时，定子磁通矢量可以由两个磁通矢量表示，其中一个矢量以 $\Omega_s=\omega_s$ 旋转，并保持幅值不变；而另一个矢量在同一位置做脉振运动。

解答（9.6）：式（9.19）中给出单匝线圈的磁通为磁动势 $F=Ni$ 和磁阻 R_μ 的比值：

$$\Phi = \frac{\mu_0 \pi LR}{2\delta}Ni = \frac{Ni}{\left(\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{2\delta}{\pi LR}\right)} = \frac{Ni}{R_\mu}$$

当绕组电流 i_α 和 i_β 已知，定子磁通的分量可以表示为

$$\vec{\Phi}_\alpha = \frac{N}{R_\mu}i_\alpha \cdot \vec{\alpha}_0,\ \vec{\Phi}_\beta = \frac{N}{R_\mu}i_\beta \cdot \vec{\beta}_0$$

当 $\varphi=0$ 时，电流 $i_\alpha(t)$ 和 $i_\beta(t)$ 的瞬时值相等，合成磁通矢量为

$$\vec{\Phi}_S = \frac{N}{R_\mu}I_m\cos(\omega_S t)\cdot(\vec{\alpha}_0+\vec{\beta}_0)$$

因此，$\varphi=0$ 时，定子磁通矢量不旋转，并在相对于横坐标 π/4 处做脉振运动，该矢量的代数值以角频率 ω_s 作脉振变化。

当 $\varphi=\pi/2$ 时，定子磁动势矢量由式（9.21）决定，而单匝线圈的合成磁通矢量为：

$$\vec{\Phi}_S = \frac{N}{R_\mu}I_m\cos(\omega_S t)\cdot(\vec{\alpha}_0+\vec{\beta}_0)$$

一般情况下，绕组 β 中的电流可以由下式表示：

$$i_\beta = I_m\cos(\omega_S t-\varphi) = I_m\cos(\omega_S t)\cos\varphi + I_m\sin(\omega_S t)\sin\varphi$$

而绕组 α 中的电流可以以和的形式给出：

$$i_\alpha = I_m\cos(\omega_S t) = I_m\cos\theta_S(1-\sin\varphi) + I_m\cos(\omega_S t)\sin\varphi$$

定子磁通矢量可由矢量和表示：

$$\vec{\Phi}_S = \vec{\Phi}_{SO} + \vec{\Phi}_{SP}$$

其中：

$$\vec{\Phi}_{SO} = \frac{NI_m}{R_\mu}\cdot\sin\varphi\cdot[\vec{\alpha}_0\cos(\omega_S t)+\vec{\beta}_0\sin(\omega_S t)]$$

$$\vec{\Phi}_{SP} = \frac{NI_m}{R_\mu}\cdot\cos(\omega_S t)\cdot[\vec{\alpha}_0(1-\sin\varphi)+\vec{\beta}_0\cos\varphi]$$

矢量 Φ_{SO}代表以 $\Omega_s=\omega_s$ 的速度旋转的磁场，在旋转过程中，其幅值不变并与 φ 的正弦值成正比。因此，$\varphi=0$ 时，电机中不存在旋转磁场，矢量 Φ_{SP}的位置不变，该位置由 φ 确定。脉振磁场 Φ_{SP}在相对于横坐标 $\pi/4$ 的位置，并在此处作脉振运动。

9.9.2　三相绕组系统

在大多数情况下，异步电动机和同步电动机是由电压源提供三相电压和电流系统供电；当作为发电机时，电机将机械能转换成电能，并在定子端产生能与电负载相连的三相电压。因此，异步电机和同步电机的定子绕组一般有三相，也就是说定子绕组由三个独立并在存在空间位移的绕组组成，由 a、b 和 c 表示。在三相电机中，三相绕组轴线之间相差 $2\pi/3$，图 9.10 为由相绕组 a、b 和 c 组成的电机，三相绕组的电流为正弦电流，并且幅值和角频率相等，初始相位相差 $\pm 2\pi/3$。相电流的相位与相绕组轴线之间的空间位移相对应。

定子三相绕组的磁动势 F_a、F_b 和 F_c 的幅值分别为 Ni_a、Ni_b 和 Ni_c，它们的方向由相应绕组的磁极决定，且它们的位置可由单位矢量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 和 $\boldsymbol{\beta}_0$ 表示：

$$\vec{a}_0=\vec{\alpha}_0,\ \vec{b}_0=-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0,\ \vec{c}_0=-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0 \tag{9.25}$$

相绕组电流由下式表示：

$$\begin{aligned} i_a &= I_m\cos(\omega_S t)\\ i_b &= I_m\cos(\omega_S t-2\pi/3)\\ i_c &= I_m\cos(\omega_S t-4\pi/3) \end{aligned} \tag{9.26}$$

由此，各相的磁动势矢量为：

$$\vec{F}_a = Ni_a\vec{a}_0,\ \vec{F}_b = Ni_b\vec{b}_0,\ \vec{F}_c = Ni_c\vec{c}_0$$

利用式（9.25）可以求得由单位矢量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 和 $\boldsymbol{\beta}_0$ 表示的各相磁动势矢量：

$$\vec{F}_a = Ni_a\vec{\alpha}_0$$

$$\vec{F}_b = Ni_b\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0\right)$$

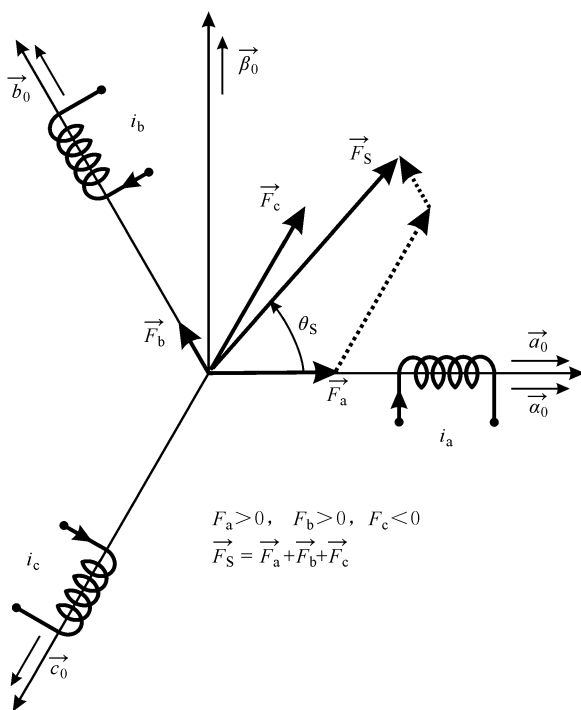


图 9.10　各相绕组磁动势和磁极的位置及直角坐标系的单位矢量

$$\vec{F}_c = Ni_c\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0\right) \tag{9.27}$$

将各相绕组磁动势矢量相加可求得定子绕组的合成磁动势：

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = \frac{3}{2}NI_m[\vec{\alpha}_0\cos(\omega_S t) + \vec{\beta}_0\sin(\omega_S t)] \tag{9.28}$$

由上式可知，合成磁动势幅值为 $3/2NI_m$。合成磁动势矢量在 α 和 β 轴上的投影与函数 $\cos(\omega_s t)$ 和 $\sin(\omega_s t)$ 成正比，由此可以证明，合成磁动势矢量以 $\Omega_s = \omega_s$ 的转速旋转，且幅值不变。定子绕组磁动势 F_S 与磁路磁阻 R_μ 的比值即为定子磁通矢量 $\boldsymbol{\Phi}_S$，且与磁动势矢量 $\boldsymbol{F}_S$ 具有相同的转速。因此，通有正弦电流的定子三相绕组能够产生一个旋转磁场，该磁场的转速由相电流的角频率决定，其幅值与相电流的最大值 I_m 有关。

如在序言中强调的那样，弄清楚转子转速和电流与电压的角频率之间的区别是非常重要的；前者是一个机械参数，其单位为 rad/s；而后者是一个电参数，其单位也为 rad/s。整本书中，机械速度由表示 Ω，而电压和电流的角频率由 ω 表示。

图 9.11 给出了由定子三相绕组系统产生的合成磁动势矢量和合成磁通矢量。

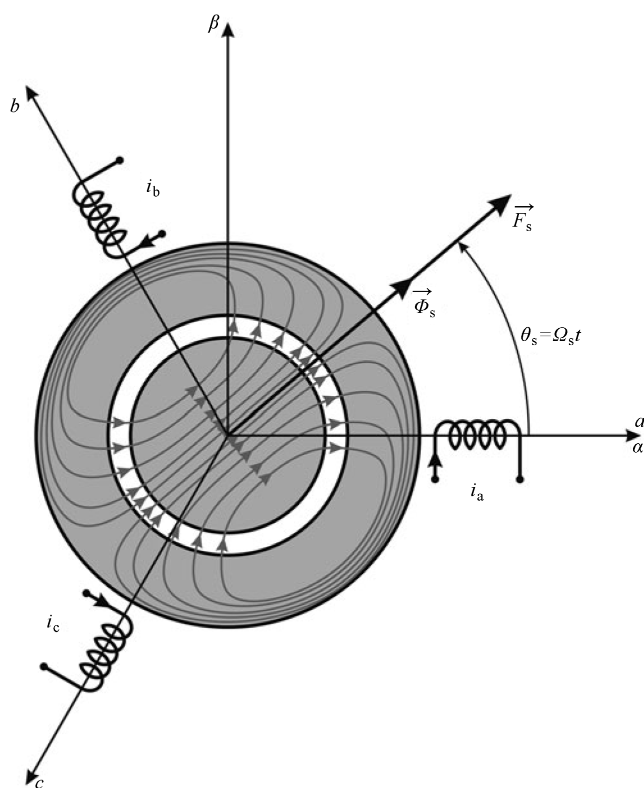


图 9.11　旋转磁场中的磁力线及矢量

第 10 章　电　动　势

这一章中将分析和讨论电机中绕组线圈所感应的电动势。本章的分析包括了变压器电动势和运动电动势。这里的均方根值、波形和谐波均是指集中和分布式绕组中所产生的。而实际绕组中的导体是分布在有限数量的槽中，其电动势是通过引入、分析和使用短距系数和分布系数来计算的。讨论中还包括了抑制电动势中低阶谐波的设计方法。本章还总结了分布式绕组在导体中电密呈正弦变化下的有关分析。通过计算该种绕组中的磁链及电动势可以了解到它们实现了对所有谐波失真的抑制并作为理想的空间滤波器运转。

电机绕组中磁链的变化导致了感应电动势的产生，其大小与磁链的一阶导数成比例。绕组中的电压平衡如等式 $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 所示，其中 u 是指绕组的端电压，i 是指绕组中流过的电流，R 是指绕组电阻，而磁链的一阶导数即代表了感应电动势。在电气工程的基础性课程中，电动势的计算式如 $e = -\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 所示，在磁链的一阶导数前有一负号。这一规定说明了感应电动势以及电流中的相应变化与磁链的变化是相反的。也就是说，在一短路的绕组中（$u=0$），磁链的变化会产生电动势，反过来，这一电动势会产生一阻止磁链变化的电流。采取另一种规定也是有其优点的。当将电动势定义为 $e = +\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 时，绕组中的电流就是由电压差（$u-e$）与电阻 R 的比值来决定了。定义为 $e = +\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 的电动势与电压的方向是相反的，因此也被称为反电动势。在本书中，今后的规定均采用电动势 $e = +\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$，绕组中的电压平衡式为 $u = Ri + e$。

10.1　变压器电动势和运动电动势

电动势的产生是由于绕组中磁链的变化。磁链的变化可以是因为绕组中电流的变化，也可以是因为定子、转子之间的相对运动。对应于由相对运动而产生的磁链变化的电动势被称为运动电动势。当定子绕组中流过恒定电流时，相对定子旋转的转子绕组中就会出现运动电动势。定子的恒定电流会产生一个与定子无相对运动的静止磁场，其中一部分的包围也会穿过转子绕组。由定子电流产生的转子磁链的大小取决于定子与转子间的相对位置。当转子运动时，这一部分的转子磁链就会变化，这也将导致运动电动势的产生。

电动势也可以在没有转子运动的情况下出现。如果定子导体中流过的电流是变化的，那么定子绕组所产生的磁链也是变化的。某种程度来说，转子磁链是定子电流产生的一种结果。由定子电流产生的转子磁链的大小是由定子、转子间的互感决定的。即使转子没有运动，转子磁链也会因为定子绕组中电流的变化而变化，从而，转子绕组会感应出电动势。这一部分电动势被称为变压器电动势。在一电力变压器中，一次侧绕组中

的交变电流会产生一个穿过二次侧绕组的变化的磁链。这一变化的磁链就导致了二次侧绕组中产生变压器电动势，从而为把一次侧的功率传递到二次侧提供了途径。

在一独立绕组中由于电流 i 的变化而出现的电动势 $e = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，与系数 L，也就是绕组的自感成比例。这一电动势被称为自感电动势。

10.2　单匝线圈中的电动势

为了将电机模型化，计算集中和分布绕组中感应的电动势是很有必要的。图 10.1 显示了一个在转子磁路中存在永磁体的电机。这一磁体的铸造和放置方式使得在气隙中产生了正弦分布的磁感应强度：

$$B = B_m\cos(\theta - \theta_m) \tag{10.1}$$

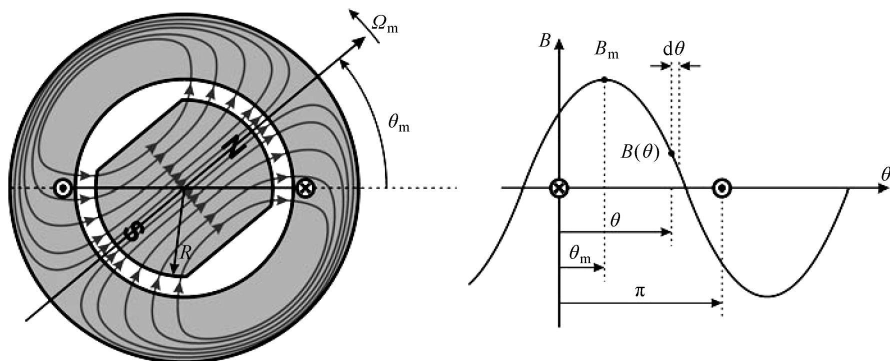


图 10.1　由转子磁路中永磁体的运动产生的转子磁场

由于转子的旋转，磁感应强度的最大值 $B_m = \mu_0 H_m$ 出现在 $\theta = \theta_m$ 的位置，其中 θ_m 代表了转子相对于定子的相对位置。在转子以一恒定速度 Ω_m 旋转的情况下，转子的位置以 $\theta_m = \Omega_m t$ 变化，而观察位置为 θ 处的磁感应强度等于

$$B(\theta, t) = B_m\cos(\theta - \Omega_m t)$$

这个表达式代表了一个随着转子的运动而呈正弦波分布的磁场。这对于决定定子单匝线圈中的电动势是有意义的。图 10.1 中画出了这样一个线圈，它是由两个整距放置的导体构成的。由⊗表示的导体是位于 $\theta_{\otimes} = 0$ 的位置，而由⊙表示的导体是位于 $\theta_{\odot} = \pi$ 的位置。定子线圈中的电动势可以由以下两种方式确定：

1）通过确定穿过线圈的磁通的一阶导数。

2）通过计算每一导体中的电动势并进行求和。

10.2.1　计算穿过单匝线圈的磁通的一阶导数

穿过单匝线圈的磁通的一阶导数决定了该线圈中感应的反电动势的大小。安装在转子上的永磁体的运动产生了穿过线圈的磁通，从而也在气隙中产生了磁场。气隙中沿着

转子表面的磁感应强度的空间分布就像表达式（10.1）所描述的那样。穿过该线圈的磁通等于任何一个以导体⊗和⊙为边的面的磁感应强度在该表面的曲面积分。因为气隙中磁感应强度的表达式 $B(\theta)$ 已经知道了，所以为了方便计算，我们应该选择一个穿过气隙的表面。这样选择出的表面是一个从位于 $\theta=0$ 的导体⊗开始，穿过上图所示的气隙部分直到位于 $\theta=\pi$ 的导体⊙的半圆柱面。这个半圆柱面的长度就是导体的长度 L，半径是就是转子的半径 R。所选择的曲面的面积为

$$S = LR\pi \tag{10.2}$$

穿过线圈的磁通就是用如式（10.1）所示的磁感应强度在所选的半圆柱面上进行曲面积分计算得到的。因为气隙中的磁场是径向的，所以磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 这两个矢量均是垂直于曲面的。从而，矢量 $\boldsymbol{B}$ 与从半圆柱面所取得的方向为半圆柱面单位法线的面元 $\mathrm{d}S$ 的点积变为了 $\boldsymbol{B}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的大小的乘积。所以，磁通的表达式的形式变为了

$$\Phi = \int_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = \int_S B\mathrm{d}S$$

半圆柱面的面元 $\mathrm{d}S$ 为 $\mathrm{d}S = LR\mathrm{d}\theta$，从而定子单匝线圈中由于永磁体运动而产生的磁通的表达式的形式变为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\Phi = \int_0^{\pi}B\mathrm{d}S = \int_0^{\pi}BLR\mathrm{d}\theta \\ &= (2LRB_{\mathrm{m}})\sin\theta_{\mathrm{m}} = \Phi_{\mathrm{m}}\sin\theta_{\mathrm{m}}\end{aligned} \tag{10.3}$$

线圈中磁通的大小取决于定子与转子的相对位置。当转子转到 $\theta=\pi/2$ 的位置时，单匝线圈中的磁通达到最大值。也就是说，当转子位于这个位置时，磁通大小为 Φ_{m}，其表达式为

$$\Phi_{\mathrm{m}} = 2RLB_{\mathrm{m}} \tag{10.4}$$

当转子位于其他位置时，单匝线圈中磁通的值会变小，表达式为 $\Phi(\theta_{\mathrm{m}}) = \Phi_{\mathrm{m}}\sin\theta_{\mathrm{m}}$。当转子以一个恒定的速度 Ω_{m} 旋转时，转子的位置以 $\theta_{\mathrm{m}} = \Omega_{\mathrm{m}}t$ 变化着，所以单匝线圈中的磁通表达式为

$$\Phi = \Phi_{\mathrm{m}}\sin(\Omega_{\mathrm{m}}t)$$

从而单匝线圈中的（反）电动势为

$$e_1 = +\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \Omega_{\mathrm{m}}\Phi_{\mathrm{m}}\cos(\Omega_{\mathrm{m}}t) \tag{10.5}$$

10.2.2 各个导体产生电动势的总和

单匝线圈中的电动势是可以通过将组成这一线圈的各个导体的电动势进行求和而得到的。在图 10.1 描述的例子中，永磁体产生的磁场在相对于定子导体旋转。这一相对运动的线速度为 $v = R\Omega_{\mathrm{m}}$，其中 R 为转子的半径，Ω_{m} 为转子旋转的角速度。对于⊗所表示的导体，其电动势为

$$e_{\otimes} = LR\Omega_{\mathrm{m}}B_{\mathrm{m}}\cos(\Omega_{\mathrm{m}}t)$$

在 $\theta=\pi$，也就是整距放置的另一导体⊙的位置，有着大小相同且方向相反的磁感应强度。因此，导体⊙中感应的电动势 $e_{\odot}$ 也有着相反的方向，即 $e_{\otimes}=-e_{\odot}$。单匝线圈的电动势等于各个导体的电动势的和。一个线圈是由两个导体串联形成的。在圆柱体的前边，线圈的终端是打开可供接线的；在圆柱体的后边，导体⊗和⊙的另一端是被接在一起的。因此，当电流沿着两导体流通时，导体电动势 $e_{\otimes}$ 和 $e_{\odot}$ 的求和是根据 $e=e_{\otimes}-e_{\odot}$ 来进行的。最终，单匝线圈中的电动势为

$$e_1=2e_{\otimes}=2LR\Omega_m B_m\cos(\Omega_m t) \tag{10.6}$$

根据式（10.4），单匝线圈中磁通的最大值为 $\Phi_m=2LRB_m$，所以上式可写为

$$e_1=\Omega_m\Phi_m\cos(\Omega_m t) \tag{10.7}$$

这个结果与式（10.5）是一致的。

在上面所说的例子当中，感应电动势都是时间的调和函数，那么，它们就可以用相量替代。因此，电动势 $e_{\otimes}$ 和 $e_{\odot}$ 的求和可以转化为相量的求和，就像图 10.3 所表示的那样。

10.2.3　单匝线圈中的电压平衡

单匝线圈中的电压平衡如式（10.8）所示。

$$u=Ri+e_1\approx\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=2\Omega_m LRB_m\cos\theta_m=\Omega_m\Phi_m\cos\theta_m=E_m\cos\theta_m \tag{10.8}$$

其中 e_1 表示（反）电动势。如果线圈的电阻 R 足够小，则电压降 Ri 可以被忽略掉，从而电动势 e_1 就等于线圈的端电压。由于电动势是时间的正弦函数，所以其均方根值就如式（10.9）所给出的那样，其中频率 f 的单位为 Hz，也就是转子每秒所旋转的圈数。因此，电动势与磁通的最大值及频率成比例

$$E_{1\mathrm{rms}}^{\mathrm{turn}}=\frac{E_m}{\sqrt{2}}=\frac{(2\pi f)\Phi_m}{\sqrt{2}}=4.44f\Phi_m \tag{10.9}$$

10.2.4　电动势波形

之前的分析是基于电机转子中有能在气隙表面产生有正弦分布的 $B(\theta)$ 的磁场的永磁体的情况。在恒定的转子速度下，定子线圈中感应的正弦电动势就如图 10.1 中所画的那样。

如果转子旋转的速度是变化的，那么线圈中所感应的电动势可能就不是正弦变化的了。在磁场的分布为正弦，但转子旋转速度 $\Omega_m(t)$ 变化的情况下，线圈中的电动势为

$$e_1=+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_m\sin(\Omega_m t))=\Omega_m\Phi_m\cos(\Omega_m t)+t\Phi_m\cos(\Omega_m t)\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t}$$

这个表达式在转子速度恒定，也就是 $\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t=0$ 的前提下，表示了一个时间的调和函数。

当永磁体在气隙中产生一个非正弦周期分布的磁场时，感应电动势为一个时间的非

正弦函数。将沿着气隙圆周变化的磁感应强度表示为 $B(\theta-\theta_m)$ 这样一个周期函数。在导体⊗的位置，磁感应强度的大小为 $B_{\otimes}=B(0-\theta_m)=B(-\theta_m)$。如果转子以一个恒定速度旋转，那么根据式（10.6）所计算的线圈的电动势等于

$$e_1=2e_{\otimes}=2LR\Omega_m B_{\otimes}=2LR\Omega_m B(-\Omega_m T) \tag{10.10}$$

从所得的表达式可以知道电动势的波形取决于函数 $B(\theta-\theta_m)$，这一函数表示的是由转子永磁体产生的磁感应强度的空间分布。因此，函数 $B(\theta-\theta_m)$ 的形式也就决定了单匝线圈电动势 $e_1(t)$ 的波形。当气隙中磁场的 $B(\theta-\theta_m)$ 为非正弦分布时，线圈（如图 10.1 所示）中感应的电动势也会是非正弦的。

问题（10.1）：假设同步电机带负载运行，且其定子集中绕组由放置在定子内表面的两个槽里的所有导体构成。这两个槽是面对气隙的磁路中整距分布的两个槽。转子上的永磁体在气隙中产生的磁感应强度为 $B(\theta)=B_m\mathrm{sgn}[\cos(\theta-\theta_m)]$。计算并画出电机提供的负载电压的波形。

解答（10.1）：由式（10.8）可知，定子绕组的端电压等于

$$u\approx 2NLR\Omega_m B(\Omega_m t)=(2NLR\Omega_m B_m)\mathrm{sgn}[\cos(\Omega_m t)]$$

10.2.5　电动势的均方根值（*rms*）

电气工程中的交流电压和电流通常是以它们的均方根值作为其特征的。描述正弦电压及电流时最常用的就是它们的均方根值而非它们的峰值。交流电压的均方根值对应的就是加在电阻负载两端时，产生相同功率的直流电压。也就是说，当把一均方根值为 U 的交流电压加在电阻 R 两端时，电阻负载所消耗的功率会为 $P=U^2/R$。这和将一直流电压 U 加在相同电阻上所消耗的功率是一样的。因此，交流电压的均方根值也被称为等效直流电压。对于正弦电压，其均方根值是将它们的峰值除以$\sqrt{2}$得到的。对于非正弦周期电压，同样可以定义其均方根值。如果一个电压的变化周期为 T，那么它的均方根值是按下式进行计算的

$$U_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\mathrm{d}t}$$

运用上述表达式，同样可以定义交流电流的均方根值。对于正弦电流，它们的均方根值为其峰值的$\frac{1}{\sqrt{2}}$。式（10.11）和式（10.12）分别给出了单匝线圈中电动势的均方根值以及单根导体中电动势的均方根值

$$E_{1rms}^{turn}=\frac{E_m}{\sqrt{2}}=\frac{(2\pi f)\Phi_m}{\sqrt{2}}=4.44f\Phi_m \tag{10.11}$$

$$E_{1rms}^{con}=2.22f\Phi_m \tag{10.12}$$

电动势的角频率 $\omega=2\pi f$ 的大小由转子旋转速度 Ω_m 来决定。感应电动势可以由频率 f 和磁通来表示，即 $E_{rms}=4.44f\Phi_m$。对于一个由 N 匝线圈构成的集中绕组，其电动势的均方根值如以下等式所示

$$E_{\mathrm{rms}}^{\mathrm{wind}} = 4.44 N f \Phi_{\mathrm{m}} \tag{10.13}$$

10.3　绕组中的电动势

电机里通常有许多的绕组。大多数的感应电机和同步电机（也被称为交流电机），都有被设计为能够连接三相交流电压和电流系统的定子。因此，大多数的交流电机的定子上都有三个绕组，也被称为相绕组。一些书的作者也用定子绕组这个名词来描述由三相绕组构成的绕组系统。

每一个绕组中都有一个或者多个线圈，各个线圈都是串联在一起的。串联之后的线圈的两端往往会被放在电机的终端以供接线使用。在这一部分，我们将会分别计算集中绕组和分布绕组中的感应电动势。这一电动势也决定了电机的端电压。

10.3.1　集中绕组

如果构成某个绕组的所有导体都被集中放置于两个整距分布的槽中，那么这个绕组就被等效为了一个集中绕组。因为集中绕组的所有线圈都被放在相同的位置，所以它们有着相同的磁通和相同的电动势。由两个整距放置的导体构成的单匝线圈的电动势，其表达式已经由式（10.11）给出来了。而对于一个由 N 匝线圈构成的集中绕组而言，其感应电动势的均方根值如式（10.13）所示。

10.3.2　分布绕组

绕组通常是由放置在沿电机圆周均匀分布的槽中的导体构成的。各个线圈在空间上是有偏移的并有着不同的电动势。因此，分布绕组的电动势不等于匝数 N 与单匝线圈电动势的乘积。这一节将说明分布绕组中电动势的计算过程。

构成一个绕组的线圈经常由两个不是整距放置的导体构成。也就是说，构成一个线圈的两个导体的角位移也许并不为 π。两个导体间的距离也被称为线圈的节距。当线圈的节距小于 π 时，该线圈被称为非整距线圈或短距线圈。

在分布绕组中，导体可能会被放在几个相邻的槽中。这样的一组导体称为一个相带。在图 10.2 中，画出了如图所示的绕组的 3 个串联的线圈，1A-1B，2A-2B 以及 3A-3B。导体 1A 和 1B 属于 1 个线圈，并且它们被放置在了角位移相距 α 的导体中。当 $\alpha = \pi$ 时，导体是被整距放置的，也就构成了一个整距线圈。当 $\alpha < \pi$ 时，导体 1A 和 1B 位于圆周的一个弦的两端。这时，线圈 1A-1B 是短距线圈。

短距线圈中所感应的电动势是小于相同情况下的整距线圈的。减少的部分取决于绕组的一个系数——短距系数。

导体 1A、2A 和 3A 被放在了相邻的 3 个槽中，也就构成了一个相带。同样的，导体 1B、2B 和 3B 被放在了另外的 3 个相邻的槽中。由于线圈 1A-1B、2A-2B 以及 3A-3B 空间位置的不同，所以它们所对应的感应电动势也是不相等的。因此，各个线圈中的电动势不会在同一时间达到最大值。各个线圈磁场轴线空间位置的变化也导致了它们对应

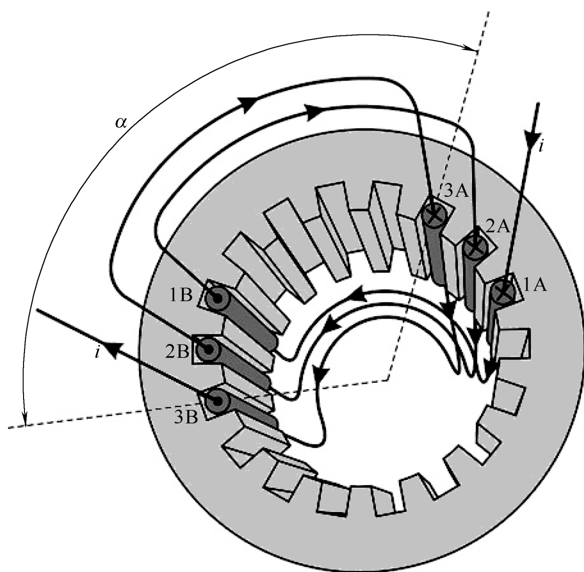


图 10.2 一个线圈为短距线圈且相带包含 3 个槽的绕组的导体分布

的电动势相位的变化。基于这个原因，绕组电动势的峰值和均方根值会小于单匝线圈电动势峰值/均方根值与其匝数（3）的乘积。减少的部分取决于绕组的一个系数——相带分布系数，或称为分布系数。分布绕组的电动势的计算要求绕组的短距系数及分布系数均为已知。

10.3.3 短距系数

目前我们所得到的电动势的表达式均是适用于由整距放置的导体所构成的线圈，也就是整距线圈。我们有必要解释一下为什么要求构成单匝线圈的两个导体间的角位移小于 π。采用短距的原因往往是为了缩短线圈的端部，也就是在电机末端将两个导体串联在一起构成完整线圈的导线。在大多数情况下，短距绕组都能用来减少或消除可能出现在电动势中的不需要的高次谐波。

例如，我们可以回过头看看图 10.2 中所示的电机，并且假设气隙中的磁感应强度 $B(\theta)$ 的空间分布为非正弦的。为了讨论的需要，我们可以假设 $B(\theta)$ 为 $B_{m1}\cos(\theta-\theta_m)+B_{m5}\cos5(\theta-\theta_m)$。在此条件下，构成单匝线圈的导体中感应电动势 $e_{\otimes}$ 和 $e_{\odot}$ 中有角频率为 $\omega=\Omega_m$ 的基波，也有角频率为 $5\Omega_m$ 的 5 次谐波。当导体⊗和⊙被放置在角位移相距为 π 的位置时，它们中所感应的电动势有相同的波形。电动势中的基波成分取决于 B_{m1}。与此同时，磁感应强度中的高次谐波决定了电动势中的高次谐波。通过将整距放置的导体串联起来，电动势中的基波成分变为了两倍，但同时，不需要的五次谐波成分也变为了两倍。

如果两个导体被放置的位置角位移相距 $\alpha=4\pi/5$，则电动势 $e_{\otimes}$ 和 $e_{\odot}$ 之间会有一个相位差，该相位差取决于角位移 α。在转子的运动过程中，转子磁极 N 经过定子导体⊙的时间相对于导体⊗滞后了 $\Delta t=\alpha/\Omega_{\mathrm{m}}$。导体⊙中电动势的角频率为 Ω_{m}，并且其相对于导体⊗中的电动势的相位差为 α。在图 10.1 中，构成线圈的两个导体的角位移为 $\alpha=\pi$，在图 10.2 中，两导体的角位移 $\alpha<\pi$。当 $\alpha=\pi$ 时，导体⊗和⊙中电动势的符号相反。两导体的端部是串联起来的，从而电流能在两导体间流动。在这种连接下，两个符号相反的电动势实际上是相加的。因此，图 10.1 里单匝线圈中感应的电动势是各个导体中电动势的两倍。

各个导体中的电动势可以用相量 $\underline{e}_{\otimes}$ 和 $\underline{e}_{\odot}$ 来表示。当转子旋转的线速度为 $v=R\Omega_{\mathrm{m}}$，且 $B(\theta)=B_{\mathrm{m}}\cos(\theta-\theta_{\mathrm{m}})$ 时，两相量有着相同的大小 $|\underline{e}_{\otimes}|=|\underline{e}_{\odot}|=e_1=LvB_{\mathrm{m}}$，其中 L 表示电机的轴向长度。图 10.3a 所示的线圈的电动势是通过将相量 $\underline{e}_{\otimes}$ 和 $\underline{e}_{\odot}$ 按 $\underline{e}=\underline{e}_{\otimes}-\underline{e}_{\odot}$ 进行求和得到的。而当导体间的角位移为 α 时，若 $\underline{e}_{\otimes}=e_1$，则 $\underline{e}_{\odot}=e_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}$，$(-\underline{e}_{\odot})=e_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha+j\pi}$。如图 10.3b 部分所画的那样，当导体间的角位移为 $4\pi/5$ 时，电动势相量 $\underline{e}_{\otimes}$ 和 $\underline{e}_{\odot}$ 变为不共线的两个相量。相对于 $e_{\otimes}$，电动势 $-e_{\odot}$ 有着 $\pi/5$ 的相位差。因此，所得到的单匝线圈的电动势 $e_{\otimes}-e_{\odot}$ 会比各个导体中电动势的大小 LvB_{m} 的和稍微小一点。

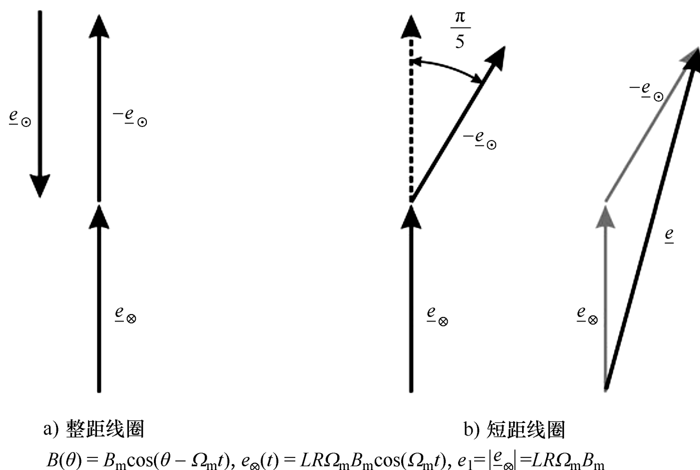


图 10.3　单匝线圈中导体的电动势

相量图既适用于基波，也适用于任意次数的高次谐波。当 $B(\theta)=B_{\mathrm{m1}}\cos(\theta-\theta_{\mathrm{m}})+B_{\mathrm{m5}}\cos(\theta-\theta_{\mathrm{m}})$ 时，电动势中有频率为 Ω_{m} 且大小决定于 B_{m1} 的基波，以及频率为 $5\Omega_{\mathrm{m}}$ 且大小决定于 B_{m5} 的 5 次谐波。对于电动势中的 5 次谐波，其相位差及频率均应乘以 5。由于 $5\times\pi/5=\pi$，所以电动势 $e_{\otimes}$ 中的 5 次谐波与电动势 $(-e_{\odot})$ 中的 5 次谐波方向是相反的，从而，它们会被相互抵消。尽管 $B(\theta)$ 的空间分布中存在着 5 次谐波，但线圈所感应的电动势中并不包含 5 次谐波。减小线圈节距的另一结果是一次谐波，也就是基波

的减少。采用短距放置的导体构成的单匝线圈中的电动势可以通过图 10.3 中的相量图计算得到，也可以通过计算图 10.4 中线圈 P_1-P_2 的电动势得到，而这也是我们下一步分析所要做的。

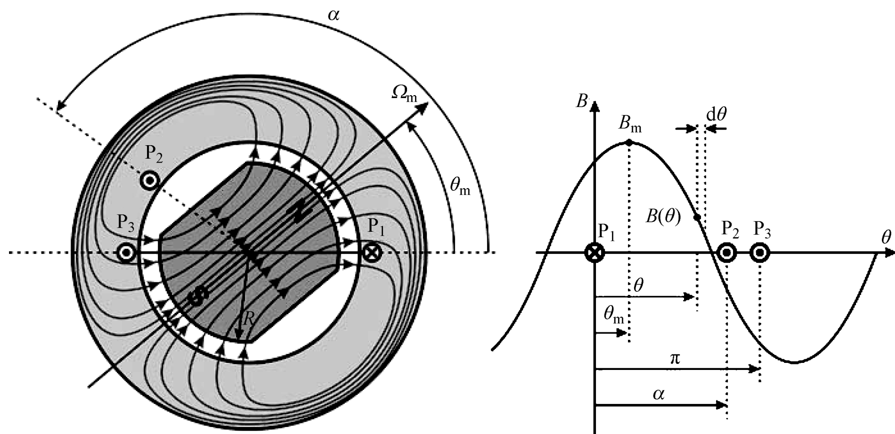


图 10.4　短距线圈中的电动势

问题（10.2）：我们怎么放置导体可以使得它们构成的线圈中感应电动势的 7 次谐波被消除？假设 $B(\theta)$ 的空间分布中包含有 7 次谐波。

解答（10.2）：我们应该将导体放置在角位移相距 $6\pi/7$ 的位置，并且它们的串联方式应使得导体中基波电动势所对应的相量的相位差为 $\pi/7$，则电动势中 7 次谐波所对应的相量的相位差为 π。因此，当将两导体中的电动势相加时，7 次谐波就被消除了。

在图 10.4 中，角位移相距 $\alpha<\pi$ 的导体 P_1 和 P_2 所构成的线圈中感应的电动势，小于由整距放置的导体构成的线圈 P_1-P_3 中感应的电动势。由导体非整距放置而造成的电动势的减小是由被称为短距系数的系数 k_T决定的。系数 k_T的大小可以通过测量线圈 P_1-P_2的感应电动势来得到，其值总是满足 $k_T\leqslant 1$。

图 10.4 显示了一个电机的横截面，该电机的定子线圈 P_1-P_2 的导体是短距放置的。我们假设气隙中的磁场是正弦分布的，且随着转子一起旋转。图中也画出了磁感应强度的变化，该磁感应强度的空间分布可以通过将永磁体放入转子磁路得到。

线圈 P_1-P_2 中的电动势可以通过计算穿过该线圈的磁通的导数得到。而穿过线圈 P_1-P_2 的磁通可以通过以下表达式计算：

$$\Phi = \int_0^{\alpha} B\mathrm{d}S = \int_0^{\alpha} BLR\mathrm{d}\theta = LRB_{\mathrm{m}}\int_0^{\alpha}\cos(\theta-\theta_{\mathrm{m}})\,\mathrm{d}\theta \tag{10.14}$$

其中，L 是电机的轴向长度，R 是转子的半径，而 B_{m}是由转子上的永磁体产生的正弦分布的磁感应强度的最大值。通过计算上面的积分，我们可以得到

$$\Phi = LRB_{\mathrm{m}}\sin(\theta-\theta_{\mathrm{m}})\Big|_0^{\alpha} = LRB_{\mathrm{m}}[\sin(\alpha-\theta_{\mathrm{m}})-\sin(-\theta_{\mathrm{m}})]$$

$$= \left[2LRB_{\mathrm{m}}\sin\frac{\alpha}{2}\right]\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta_{\mathrm{m}}\right) = \Phi_{\mathrm{m}}^{\alpha}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta_{\mathrm{m}}\right) \tag{10.15}$$

$\Phi_{\mathrm{m}}^{\alpha}$ 表示线圈 P_1-P_2 中磁通的最大值。当转子的位置位于 $\theta_{\mathrm{m}}=\alpha/2$ 时，磁通可以达到该最大值。由于线圈 P_1-P_3 中磁通的最大值为 $\Phi_{\mathrm{m}}^{\pi}=2LRB_{\mathrm{m}}$，所以可以知道，短距线圈中磁通峰值的减少是由于系数 $\sin(\alpha/2)$ 的存在。换句话说，短距线圈中磁通的峰值（$\Phi_{\mathrm{m}}^{\alpha}$）小于整距线圈中磁通的峰值（$\Phi_{\mathrm{m}}^{\pi}$），并且满足 $\Phi_{\mathrm{m}}^{\alpha}=\Phi_{\mathrm{m}}^{\pi}\sin(\alpha/2)$。线圈 P_1-P_2 中的感应电动势如下式所示

$$e_1(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \Omega_{\mathrm{m}}\Phi_{\mathrm{m}}^{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta_{\mathrm{m}}\right) = E_{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\omega_{\mathrm{m}}t\right) \tag{10.16}$$

该电动势的峰值为

$$E_{\mathrm{m}} = 2\pi f\cdot\Phi_{\mathrm{m}}^{\pi}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \tag{10.17}$$

系数 $k_{\mathrm{T}}=\sin(\alpha/2)$ 决定了由于短距而造成的电动势减小的部分。线圈中电动势的均方根值如下式所示：

$$E_{1\mathrm{rms}}^{\mathrm{turn}} = \frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} = 4.44f\Phi_{\mathrm{m}}^{\pi}\sin\frac{\alpha}{2} \tag{10.18}$$

图 10.5 中将电动势表示成了与其对应的相量。利用这些相量，短距系数的计算步骤可以得到简化。直角三角形 ABC 的斜边 AC 表示了单根导体中感应电动势 E_1 的均方根值。角 $\alpha/2$ 所对应的边 BC 的长度为 $E_1\sin(\alpha/2)$。相量 DC 表示了线圈中感应电动势的均方根值，其长度为 BC 边长度的两倍，即 $2E_1\sin(\alpha/2)=2E_1k_{\mathrm{T}}$。因此，由于短距的原因，单匝线圈中的电动势大小小于 $2E_1$。短距系数 $k_{\mathrm{T}}=\sin(\alpha/2)$ 与式（10.18）中的结果是一致的。

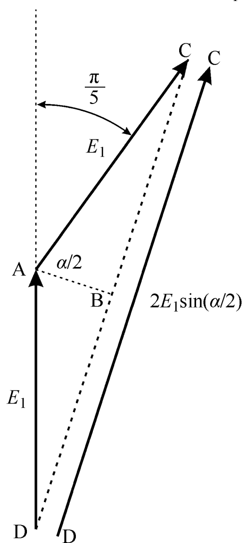


图 10.5　短距绕组中的电动势。E_1 表示单根导体中感应电动势的大小。单匝线圈线圈中感应电动势的大小取决于相量 DC 的长度

在随后的章节中，将讨论能减少电动势中谐波失真，以及能消除特定次数的低次谐波的绕组设计方法。这些方法中包括了将单匝线圈的导体按弦的方向而非直径方向放置，以及按相带安排绕组线圈。为了方便计算这种绕组中的感应电动势，我们通过分析得出了被称为分布系数和短距系数的两种系数。

在 10.5 节中，将会分析理想分布绕组中的感应电动势，并证明即使磁感应强度 $B(\theta)$ 的分布为非正弦且各导体中的感应电动势波形为非正弦，这种绕组中的感应电动势也只包含有基波。基本上，我们可以想象一种对于绕组中所有导体的适用的串联方式，使得电动势中除基波以外的

所有谐波均被消除。在接下来的分析中，我们将考虑导体沿电机圆周面成正弦分布的绕组。对于理想正弦分布的导体而言，所有失真将会消失，使得绕组中产生正弦波电动势。此时，绕组变成了一个空间滤波器，它滤除了 $B(\theta)$ 空间分布中的失真并形成了一个正弦波电动势。

10.3.4　分布系数

实际电机的绕组是通过将导体放置在磁路中轴向切割的开槽里形成的。定子和转子中均有许多这样的槽。图 8.1 中画出了一个电机磁路的横截面，显示了槽通常的形状及数量。

一个线圈是两个整距放置的导体，或是两个放在弦两端的导体组成的。另一方面，定子三相绕组由三相构成，这三套独立的绕组的轴线各相差 $2\pi/3$。因此，一台三相电机定子磁路所包含的槽的最少数量为 $2\times3=6$。这样的情况通常出现在相绕组为集中绕组的情况下，也就是说，绕组的所有导体均放置在两个整距分布的槽中。槽的数量往往是大于 6 的。使用较多数量的槽的一个原因是关于将一相绕组中一半的导体放在一个槽里的问题。这时，一个槽的横截面积将会非常大，而这对于电机的铸造而言是不实际的。因此，导体往往会分布在一些相邻的槽中，这样，一个相带就形成了。一个相带包含了 2 个、3 个或是更多的相邻的槽，其中，每个槽里均可放置一个或多个绕组导体。为了简化分析，我们可以假设相带中的每个槽均只包含一个导体。而当每个槽中有 M 个导体时，所有后续的结论均一样，只是电动势的大小较单根导体时需乘以 M。

图 10.6 中画出了一个例子：相带中的导体被放在了相邻的三个槽中。该图显示了这样一个绕组的横截面，且相量图显示了各个绕组中感应电动势的关系。线圈 1A-1B、2A-2B 和 3A-3B 都是整距的，也就是说，构成这些线圈的导体都是整距放置的。相量 E_1、E_2和 E_3分别代表了线圈 1A-1B、2A-2B 和 3A-3B 中的感应电动势。图 10.6 中的角 γ 表示了相邻两个槽之间的距离。线圈在空间位置上的这个偏差导致了与之对应的电动势之间的相位差 γ。

相带中导体的放置方法可以消除或减少感应电动势中的高次谐波。正如之前在讨论短距系数时所解释的那样，由于导体间空间位移的存在，各导体中的感应电动势也存在着相位差。当一个相带包含有 m 个相邻的槽时，绕组中的电动势可以根据以下等式求得：

$$\vec{E}^{\text{phase}}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\dots+\vec{E}_{\text{m}} \tag{10.19}$$

其中 E_1到 E_{m}表示各个线圈中的感应电动势。由于相位差的存在，经各导体电动势求和所得电动势的均方根值小于各导体电动势均方根值的和，即

$$\left|\vec{E}_1+\vec{E}_2+\dots+\vec{E}_{\text{m}}\right|<\left|\vec{E}_1\right|+\left|\vec{E}_2\right|+\dots+\left|\vec{E}_{\text{m}}\right|$$

从转子中心看去，相邻的槽之间的角度为 γ，该角度同时也决定了各线圈中感应电动势的相位差。当然，这里所说的线圈是指线圈导体位于相邻槽的两线圈。通过式（10.19）以及图 10.7 中所给出的相量图我们可以知道，相带中导体的分布可以使得感应电动势中特定次数的高次谐波被消除掉。

图 10.6　3 个串联起来的线圈的导体被放在了相带中
注：每一相带有 3 个相邻的槽（左图），相量图表示了线圈 1、2 和 3 中的感应电动势（右图））。

图 10.7　由 3 个相邻槽构成的相带中各个线圈电动势的相量图

10.3.5　相带中的谐波表达式

根据式（10.10）我们可以知道，气隙中磁感应强度的空间分布决定了导体电动势的变化。如果磁感应强度的空间分布中包含有 n 次空间谐波，则单个导体中所感应的随时间变化的电动势中也包含有 n 次谐波。在一整距线圈中，导体被放在了整距分布的槽

中，其电动势为单根导体电动势的两倍。因此，线圈的电动势中也存在有 n 次谐波。

图 10.6 中所示绕组的电动势等于存在空间位移的线圈 1A-1B、2A-2B 和 3A-3B 中感应电动势的和。我们可以通过选择合适的角度 γ 来消除高次谐波。图 10.6 中右图画出了代表线圈 1A-1B、2A-2B 和 3A-3B 中电动势基波分量的相量 E_1、E_2 和 E_3。相邻相量的方向相差角度 γ，这代表了两相邻线圈的空间位移。电动势中的高次谐波分量同样可以用相量来表示。对于各个线圈而言，n 次谐波分量的大小是一样的，但由于它们空间位置的不一样，其对应相量的相位也不一样。n 次谐波的角频率较基波而言扩大了 n 倍。在相邻导体中，空间位移 γ 造成了 n 次谐波分量 $n\gamma$ 的相位滞后。相量图中代表线圈电动势中 n 次谐波分量的相量 E_{1n}，E_{2n} 和 E_{3n} 相差的角度为 $n\gamma$。

如果图 10.6 中左图的角度 γ 等于 $2\pi/(3n)$，则 n 次谐波的相量 E_{1n}、E_{2n} 和 E_{3n} 相差的角度为 $2\pi/3$。因为这些相量的大小均相等，所以可以用一个等边三角形来代替相量图，其中，第一个相量的首端与最后一个相量的末端重合。也就是说，三个线圈中 n 次谐波的相量的和等于零。因此，在 $\gamma=2\pi/(3n)$ 的情况下，电动势中的 n 次谐波可以被消除。

一般而言，构成一个绕组的两个相带均包含 m 个连续的槽，这样，一个绕组就由 m 个线圈串联形成。如果角度 γ 等于 $2\pi/(mn)$，那么相邻槽的电动势中基波成分的相位差即等于 $2\pi/(mn)$，而 n 次谐波的相位差即为 $2\pi/m$。绕组感应电动势中的 n 次谐波分量是由代表每个线圈中 n 次谐波的 m 个相量相加所得。这 m 个相量大小相同，且相邻相量间初始相位相差 $2\pi/m$。由此我们可以知道，代表着由 m 个串联线圈构成的绕组的电动势中 n 次谐波的相量为

$$\underline{E}_{n}^{\mathrm{wind}} = \underline{E}_{1n} + \underline{E}_{2n} + \underline{E}_{3n} + \cdots + \underline{E}_{mn}$$

$$= \underline{E}_{1n} \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\cdot\frac{2\pi}{m}} = 0$$

上述表达式可以用图形来表示。将相互间相位相差 $2\pi/m$ 的 m 个相量相加后，可以发现最后一个相量的末端与第一个相量的首端重合了，此时的相量图即为一个 m 边等边多边形。该多边形可内接于圆且代表各线圈中 n 次谐波的相量为此圆的弦。

由此，我们可以总结得到当角度 γ 等于 $2\pi/(mn)$ 时，电动势中 n 次谐波分量为零。也就是说，当相带的范围为 m 个相互角位移为 $2\pi/n$ 的槽时，n 次谐波可以被消除掉。

由于相带中各槽之间的分布，电动势中的基波分量比起集中绕组的电动势而言稍小一些。观察图 10.7 我们可以发现，相量和 $E_1+E_2+E_3$ 的大小小于各模值的和 $(|E_1|+|E_2|+|E_3|)$。这个差距是由于相加的各个相量不共线而引起的。系数 k_p 等于

$$k_p = \frac{|\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3|}{|\vec{E}_1| + |\vec{E}_2| + |\vec{E}_3|}$$

且其被称为分布系数。

当相带的宽度为 $m=3$ 时，如图 10.7 所示，电动势中的基波成分可以由 3 个相量相

加所得，也就是以下等式：

$$\vec{E}_{m=3}^{\text{wind}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \tag{10.20}$$

相量 E_1、E_2和 E_3位于半径为 R 的圆周上。对于图 10.7 中的每一个等腰三角形而言，我们知道其底边等于其腰长与顶角的一半的正弦值的乘积。因此，等式 $R\sin(\gamma/2) = E_1/2$ 将圆的半径、电动势 E_1和角度 γ 联系在了一起。同时，式（10.20）中所得相量的模值为

$$E_{m=3} = 2R\sin\frac{3\gamma}{2} = 2\left(\frac{E_1}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\right)\sin\frac{3\gamma}{2}$$

$$= E_1\frac{\sin\frac{3\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{3\gamma}{2}}{3\sin\frac{\gamma}{2}}\right)3E_1 = k_p 3E_1$$

其中 k_p表示相带宽度为 $m=3$ 个槽的绕组的分布系数。对于相带宽度 $m\neq 3$ 时，代表基波成分的上述相量的模值为 $E_m = 2R\sin(m\gamma/2)$，其中半径 R 及单匝线圈电动势 E_1之间的关系为 $R\sin(\gamma/2) = E_1/2$。当 E_1表示单匝线圈感应电动势中基波成分的均方根值时，由 m 个线圈串联构成的绕组中基波成分的均方根值为

$$E_m = E_1\frac{\sin\frac{m\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{m\gamma}{2}}{m\sin\frac{\gamma}{2}}\right)mE_1 = k_p mE_1$$

分布系数 k_p由下式求得：

$$k_p = \frac{|\vec{E}_{m=3}|}{m|\vec{E}_1|} = \frac{\sin\frac{m\gamma}{2}}{m\sin\frac{\gamma}{2}} \tag{10.21}$$

且绕组电动势的均方根值可以由下式求得：

$$E_{rms} = E^{\text{phase}} = 4.44k_p fN\Phi_m^{\pi} \tag{10.22}$$

其中 $\Phi_m^{\pi} = 2LRB_m$ 是整距线圈中磁通的最大值，N 是串联线圈的个数，而 $f = \Omega_m/(2\pi)$ 则是频率。

问题（10.3）：由于磁感应强度 $B(\theta)$ 的非正弦分布，导体中的感应电动势包含有高次谐波的成分。一个绕组是由 3 个线圈即 6 个导体构成的。这些导体相互之间的角位移为 $\gamma = 24°$。最终测得的绕组终端的电动势中没有出现导体电动势中存在的一些高次谐波。请问这些谐波的次数是多少？

解答（10.3）：当 $\gamma = 2\pi/(mn)$ 或 $\gamma = q2\pi/(mn)$ 时，所得电动势中的 n 次谐波等于0，其中 q 是一个整数。因为 $m=3$ 且 $\gamma = 2\pi/15$，所有次数为 $n=5q$，也就是次数为 5 的倍数的谐波均被消除掉了。

10.4 复励绕组中的电动势

绕组往往是由几个短距线圈串联形成的，也就是说，组成这些线圈的导体不是整距放置的，而是放置在圆周的某个弦的两端。并且，某几个线圈的导体会分布在几个相邻的槽中，从而形成一个相带。因此，绕组电动势中基波成分（即一次谐波）的计算应同时包括分布系数及短距系数。这些系数如下式所示：

$$k_{r}=\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$k_{p}=\frac{\sin\dfrac{m\gamma}{2}}{m\sin\dfrac{\gamma}{2}} \tag{10.23}$$

而复励绕组的电动势的均方根值可由下式计算：

$$E_{rms}=4.44\cdot k_{p}k_{T}Nf(2LRB_{m}) \tag{10.24}$$

其中 $N=N_{C}/2$ 是线圈的个数，B_{m}是气隙中正弦分布的磁感应强度的最大值，L 和 R 分别是电机的轴向长度和转子的半径，f 是感应电动势的频率。在图 10.6 的例子当中，频率 f 等于转子每秒旋转的圈数。

式（10.24）可以写成以下形式：

$$E_{rms}=4.44k_{p}k_{T}Nf\Phi_{m}^{\pi}$$

其中 $\Phi_{m}^{\pi}=2LRB_{m}$ 表示单匝整距线圈存在的磁通的最大值。对于由短距线圈构成的分布绕组，Φ_{m}^{π} 是假设出来的，所以式（10.24）更适合。

10.5 谐波

运动电动势的波形是由气隙中磁场的分布决定的。当磁场强度 H 和磁感应强度 B 沿电机圆周呈正弦变化时，则电动势也是一个时间的正弦函数，并且其不存在任何失真和高次谐波。频率为基频的分量被称为一次谐波，而高次谐波是指任何次数 $n>1$ 的其他谐波。高次谐波的存在使得原始波形失真且变为非正弦的。气隙磁场的建立是导体电流产生的磁动势以及转子永磁体共同作用的结果。在这两种情况下，电机设计时的目标之一均是建立一个接近正弦分布的气隙磁场，从而获得正弦分布的电动势。由于各种原因，这个目标并不能被完全实现。其中一个原因是构成绕组的导体由于必须被放置在槽中，它们并不是呈正弦分布。电机中的磁路中通常有几十个槽，所以，相对于放置导体而言，这个数量是比较少的。导体中的电流在气隙中产生了磁动势及磁场。而导体中谐波分布的偏差导致了气隙中磁感应强度 $B(\theta)$ 中空间高次谐波的出现。高次谐波的存在使得 $B(\theta)$ 的空间分布不是角 θ 的正弦函数。同样，转子中的永磁体也不能产生一个理想的、正弦分布的磁场，而是产生了一个包含空间高次谐波的磁场。

当气隙中的磁场为 $B(\theta)$ 且转子的旋转速度为 Ω_m 时，定子导体中感应的电动势与磁感应强度和速度成比例。在导体位于 $\theta=0$ 的位置时，感应电动势为 $E=R\Omega_m LB(0-\theta_m)$，并且其可以写成 $E=kB(0-\Omega_m t)$ 的形式。当 $B(\theta)$ 的空间分布中包含有 5 次谐波时，$\theta=0$的位置的磁感应强度为

$$B_5\cos 5(\theta-\theta_m)=B_5\cos 5(0-\theta_m)=B_5\cos(5\Omega_m t)$$

则 $\theta=0$ 位置的导体中感应电动势的 5 次谐波为

$$E_5=R\Omega_m LB_5\cos(5\Omega_m t)$$

因此，函数 $B(\theta)$ 中的空间高次谐波导致了感应电动势中的高次谐波。

电动势中的高次谐波产生了电磁干扰以及电磁转矩中的脉动。相对于正弦电动势而言，高次谐波增大了电流的最大值和均方根值。由于这个原因，电机中损失的功率也增加了。因此，电机绕组在设计和铸造时均以降低磁场中高次谐波对于感应电动势的影响为目标。大多数情况下，要获得一个理想的正弦分布的磁场是不可能的。所以，要通过合适的绕组设计方法来减少高次谐波。

一个绕组是由许多串联在一起的导体构成的。在每个导体中，感应电动势均取决于转子速度以及气隙中的磁感应强度。不管是否为正弦，这些电动势均是周期性的交流波，其频率由转子速度决定。导体中感应电动势的初相位取决于导体被放置的槽的位置。绕组电动势即是各个导体中存在相位差的电动势的和。导体的连接方式可能会使得电动势中的高次谐波的相位正好相反，从而它们在求和的过程中会被互相抵消。谐波间的相位差同时也取决于谐波的次数 n，这将使得谐波的消除过程有更多因素要被考虑。也就是说，在绕组的某个构成方式下，一种高次谐波被消除了，但与此同时，可能另外一个次数的高次谐波求和后反而增强了。

实际的绕组设计方法中指出了将各个导体放入不同槽的方法。在大多数情况下，所有串联起来的导体连同其端部都是由一根不间断的导线制成的。在这种情况下，绕组设计给被插入导线的槽的位置及次序提供了一种方案及图纸。同时，绕组设计时基于的大多数危害均是来自次数较低的谐波这一基础上的，因此，大多数的绕组设计方案均集中考虑的是次数较低的谐波的抑制。

磁感应强度的空间分布的波形 $B(\theta)$ 往往是关于最大值 B_m 的位置对称的，而且它不包含偶次谐波。因此，感应电动势中也只包含奇次谐波。同时，奇次谐波中的次数为 $3n$ 的谐波也是不存在的。以下将对此进行简单的解释。

对于星形联结的三相绕组，电流的和等于零（$i_a+i_b+i_c=0$）。各相电流的基波分量相位互差 $2\pi/3$，这就使得它们的和为零。再来考虑次数为 $3n$（3 的倍数）的谐波，它们互相之间的相位差为 $3n\times 2\pi/3=n\times 2\pi$；从而，它们有着相同的相位。因此，次数为 3 的倍数的谐波在电流中是不存在的，否则电流的和就不等于零了。当没有电流流通的路径时，由于不产生电流，所以电动势中次数为 3 的倍数的谐波不存在。在一星形联结中，相绕组中电动势可能会包含次数为 3 的倍数的谐波，但它不会产生电流。相电动势中次数为 3 的倍数的谐波的相位等于 $3n\times 2\pi/3=n\times 2\pi$。因此，两相电压之差，也就是线电压中，不存在次数为 3 的倍数的谐波。

基于以上原因，实际的绕组设计过程中最初集中考虑的是 5 次和 7 次谐波的抑制。在某些情况下，也会接着考虑 11 次和 13 次谐波。

10. 5. 1 分布绕组中的电动势

实际的电机绕组是由放置在槽中串联在一起的导体构成的。电机往往都会有几十个槽，也就意味着导体可以被放到这几十个位置分散的槽的任意一个。实际的绕组设计中常常使得导体的空间分布尽可能地接近正弦分布。绕组设计技术包括了将构成线圈的导体放在短距位置（短距绕组）从而消除或减少一些高次谐波。另外，绕组的导体分布在包含一些相邻槽的相带中，这种途径也能消除或减少绕组电动势中的高次谐波。基于这个原因，接下来将会分析在导体沿电机圆周接近正弦分布情况下的绕组电动势。

之后我们的讨论是基于导体呈正弦分布的理想绕组的情况，这个理想绕组消除了感应电动势中的所有高次谐波，就像一个空间滤波器一样。当气隙中的磁感应强度 $B(\theta)$ 沿电机圆周为非正弦分布时，各个谐波中的电动势也为非正弦的，并且包含了更高次的谐波。尽管$B(\theta)$存在失真，导体呈正弦分布的绕组还是有正弦变化的感应电动势，不存在高次谐波及失真。在这一章的末尾，我们将证明这个结论。因此，导体的正弦分布是我们所追求的理想情况。但是，在实际情况中，由于每个电机的槽数均有限，我们无法完全达到这一理想情况。因此，实际电机中由于高次谐波没有被完全消除，所以其电动势较之于理想正弦波是有所偏离的。

在接下来的讨论里，计算绕组中感应电动势时，是在基于导体沿电机圆周完全呈正弦分布的假设下进行的。我们的分析将围绕图 10. 8 中所示电机进行。

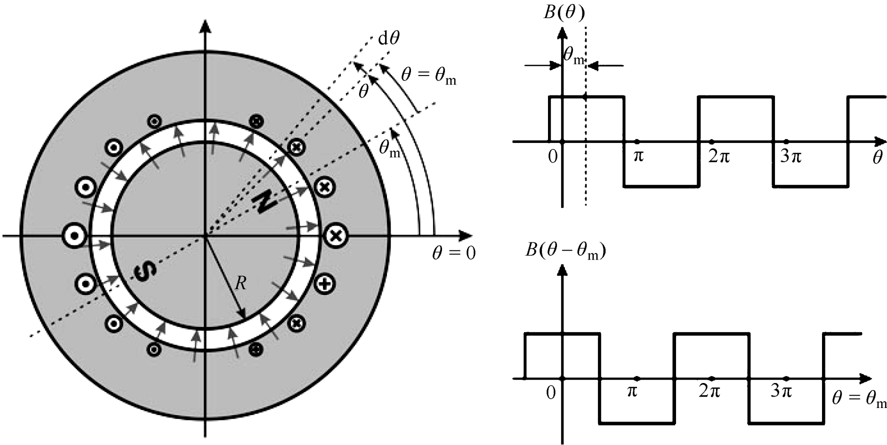


图 10. 8 一个定子绕组导体为正弦分布，且转子永磁体磁感应强度的空间分布为非正弦下的电机的横截面

图 10.8 中所示电机在转子上有永磁体。这一永磁体在气隙中产生空间分布为 $B(\theta)$ 的磁感应强度。函数 $B(\theta)$ 是非正弦的，其存在高次谐波。这一电机定子绕组的导体是沿定子磁路的内表面分布的。假设这些导体中的每一个都能被放在任意的位置且最终导体的分布沿圆周呈正弦分布。我们可以证明，在这种情况下，即使气隙中的磁场为非正弦分布，绕组中的感应电动势也是正弦的。此时，绕组扮演了一个空间滤波器的角色，它将感应电动势中除了一次谐波，也就是基波以外的所有谐波都消除了。函数 $B(\theta)$ 的基波分量是式（10.25）中的第一项，也就是 $i=1$ 的那一项。它代表了磁场空间分布中的一次谐波。绕组电动势的基波是由 $B(\theta)$ 分布中的一次谐波及角频率 $\omega_s=\Omega_m$ 决定的。这一节会计算得到具体的表达式。

大多数情况中，气隙中的磁场是转子电流或转子磁路中永磁体产生的结果。在这两种情况下，转子磁场的方向均是由转子的位置决定的。当转子以角速度 Ω_m 旋转时，转子磁场也以相同的速度旋转。从而，在定子导体中可以感应出电动势。在图 10.8 所示的情况下，气隙中磁感应强度 $B(\theta)$ 的分布是非正弦的，它包含了高次谐波，具体如式（10.25）所示。绕组中感应电动势的计算结果将证明其仅包含有基波成分。

由转子磁路中永磁体产生的磁感应强度如函数 $B(\theta-\theta_m)=B_m\mathrm{sgn}[\cos(\theta-\theta_m)]$ 所示。在 $-\pi/2<(\theta-\theta_m)<+\pi/2$ 的区间上，磁感应强度等于 $+B_m$，而在 $+\pi/2<(\theta-\theta_m)<+3\pi/2$ 的区间上，磁感应强度为 $-B_m$。将这一函数展开成傅里叶级数时，我们可以得到

$$B(\theta-\theta_m)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{B_m}{2i-1}(-1)^{i+1}\cos[(2i-1)(\theta-\theta_m)] \tag{10.25}$$

这一函数包含了所有奇次谐波，而同时偶次谐波均等于零。各次谐波的幅值随着它们次数的增加而减小，即 $A\sim 1/(2n-1)$。上述函数中不存在偶次函数也可以从函数 $B(\theta-\theta_m)$ 的图形为轴对称而得到，即有 $B(x)=B(-x)$。式中一次谐波的幅值等于 $4B_m/\pi$。

10.5.1.1　单匝线圈中的磁通

定子绕组感应电动势的计算需要首先确定绕组中的磁链，从而电动势可以由绕组磁链的一阶导数得到。由于一个绕组是由一些串联在一起的线圈构成，且每个线圈的位置均不同，则总磁链是将各个线圈中的磁通求和（积分）得到。首先，我们有必要求出单匝线圈中的磁通 $\Phi(\theta)$。假设某线圈是由导体 A 和 B 构成，同时导体 A 用⊗表示，位于 θ 的位置，而导体 B 用⊙表示，位于 $\theta+\pi$ 的位置，则我们所计算的线圈是整距的。导体 A 和 B 如图 10.9 所示。

磁通 $\Phi(\theta)$ 等于代表磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的矢量沿以线圈导体 A 和导体 B 为边构成的曲面 S 的面积分（如图 10.10 所示）。这一积分计算的曲面是气隙中从导体 A 开始到导体 B 构成的曲面。积分曲面选择穿过气隙的曲面是因为气隙中磁感应强度 B 随角度 θ 变化的表达式我们已经分析得到了。参考方向的确定是根据右手定则来决定的。由此，磁通的确定是通过将 $B(\zeta)\mathrm{d}S=B(\zeta)LR\mathrm{d}\zeta$ 在 θ 到 $\theta+\pi$ 的区间上积分所得，如式 10.26 所示。

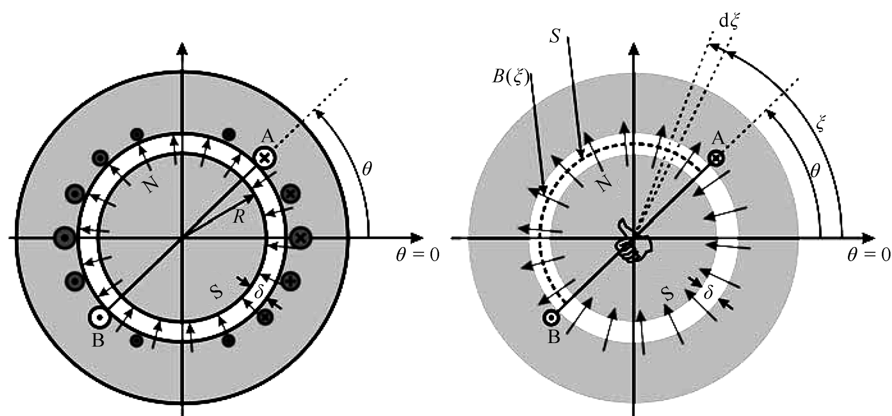


图 10.9 线圈 A-B 中磁通的计算（左图）表面 S 的选择（右图）

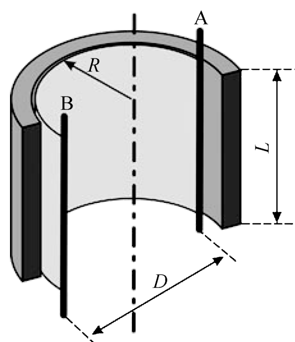


图 10.10 沿着气隙从导体 A 开始止于导体 B 的半圆柱面 S

$$\begin{aligned}\Phi(\theta) &= \int_{\theta}^{\theta+\pi} B(\xi) LR\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\theta}^{\theta+\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{B_{\mathrm{m}}}{2i-1} (-1)^{i+1} \cos[(2i-1)(\xi-\theta_{\mathrm{m}})] \right\} LR\mathrm{d}\xi \end{aligned} \quad (10.26)$$

上述积分是在穿过气隙的曲面 S 上进行的，面元为 $\mathrm{d}S = LR\mathrm{d}\zeta$，其中 L 为电机的轴向长度，$R = D/2$ 是转子圆柱体的半径。B（ζ）表示在区间［θ，$\theta+\pi$）上任意位置 ζ 的磁感应强度的径向分量。上述积分的结果也就是以下等式所确定的磁通。

$$\Phi(\theta) = LRB_{\mathrm{m}} \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^{i}}{(2i-1)^{2}} \sin[(2i-1)(\theta-\theta_{\mathrm{m}})] \quad (10.27)$$

10.5.1.2 导体的正弦分布

绕组中的磁链 Ψ_{s} 是通过将各个线圈中的磁通求和计算所得。图 10.9 中所示的分布

绕组沿电机圆周面导体的线密度如 $N'(\theta)$ 的表达式如下所示。

$$N'(\theta) = N_m \cos\theta$$

导体密度最大的位置是 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 的位置。在电机圆周面上一个非常小的面元 $R\mathrm{d}\theta$ 中，有 $\mathrm{d}N$ 个导体

$$\mathrm{d}N = N'(\theta) R\mathrm{d}\theta$$

所有参考方向为⊗的导体均被放置在［$-\pi/2$，$\pi/2$）的区间里。每一个参考方向为⊗的导体都与整距放置的方向为⊙的导体串联在了一起。这两个导体在电机端部连接在一起，构成了一个线圈。单匝线圈的磁通 $\Phi(\theta)$ 可以由式（10.27）得到。我们所考虑的线圈的导体⊗是位于 θ 的位置，导体⊙是位于 $\theta+\pi$ 的位置。

绕组中的磁链 Ψ_S 是通过将 $\mathrm{d}\Psi_S = N_m \Phi(\theta) R\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$ 在区间上积分所得

$$\Psi_S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N_m \Phi(\theta) R\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{10.28}$$

通过引入式（10.27）中的磁通 $\Phi(\theta)$，我们可以得到绕组的磁链为

$$\Psi_S = N_m L R^2 B_m \frac{8}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i-1)^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)]\cos\theta \mathrm{d}\theta \tag{10.29}$$

如果式（10.29）中积分的被积函数写为以下形式：

$$\begin{aligned} f(\theta,i) &= \sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)]\cos(\theta) \\ &= 1/2[\sin(2i\theta-(2i-1)\theta_m) + \sin((2i-2)\theta-(2i-1)\theta_m)] \end{aligned}$$

当（$N_m L R^2 B_m \cdot 8/\pi$）的值用 k 表示时，式（10.29）的结果可以化为以函数 $f(\theta, i)$ 在 $-\pi/2 \sim \pi/2$ 上的积分为元素的求和。

$$\Psi_S = k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i-1)^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(\theta,i)\mathrm{d}\theta$$

当 $i \geqslant 2$ 时，函数 $f(\theta, i)$ 中的每一项都是一个周期区间为［$-\pi/2$，$\pi/2$）的整数倍的正弦函数。因此，当 $f(\theta, i)$ 在上述区间上积分时，只有 $i=1$ 这一项的值不是零，求和式子中的其他项均等于零。对于求和式子中的第一项，也就是 $i=1$ 的项，被积函数变为了：

$$f(\theta,1) = [\sin(2\theta-\theta_m) + \sin(-\theta_m)]/2$$

将该表达式引入式（10.29），则对于 $i=1$ 的项，我们可以得到

$$\Psi_S^1 = N_m L R^2 B_m \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^1}{(2-1)^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(\theta-\theta_m)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$$

这也就是所求得绕组中的磁链。这也进一步证明了非正弦分布的磁感应强度 $B(\theta)$ 中，只有一次谐波（基波）能在导体为正弦分布的绕组中产生磁链。因为

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(\theta-\theta_m)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [\sin(2\theta-\theta_m) + \sin(-\theta_m)]\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{4}\cos(2\theta-\theta_m)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \frac{1}{2}\sin(-\theta_m)\cdot\theta\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = -\frac{\pi}{2}\sin\theta_m \end{aligned}$$

磁链的值 Ψ_S^1 等于

$$\Psi_S^1 = N_m LR^2 B_m \frac{8(-1)}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\sin\theta_m\right) = 4N_m LR^2 B_m \sin\theta_m \qquad (10.30)$$

对于表达式（10.29）中求和部分的其他 $i>1$ 的项，它们的值都等于零。对于 $i=2$，被积函数为

$$f(\theta,2) = [\sin(4\theta - 3\theta_m) + \sin(2\theta - 3\theta_m)]/2$$

这一函数在区间［$-\pi/2$，$\pi/2$）上的积分等于零，对于任意 $i>1$ 的项也一样。因此，我们可以总结得到：感应电动势中不含有任何高次谐波。

10.5.1.3　导体任意分布下绕组的磁链

我们之前的计算是为了证明导体正弦分布下的绕组就像空间滤波器一样，能消除电动势波形中的所有高次谐波。但同时，我们也应该得到更一般情况下绕组磁链的表达式，其中导体的分布用一个任意的函数 $N'(\theta)$ 来描述。

计算绕组磁链的第一步是得到位于 θ 位置的线圈中的磁通。这一磁通我们可以根据式（10.26）计算得到

$$\Phi(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+\pi} B(\xi) LR\mathrm{d}\xi$$

其中，函数 $B(\xi)$ 为气隙中磁感应强度的分布。

总磁链是将各个线圈中的磁通进行求和来得到。在一分布绕组的情况下，求和的形式即为积分。当导体的线密度为 $N'(\theta) = N_m\cos\theta$ 时，绕组的磁链可以根据以下表达式计算：

$$\Psi_S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N_m \Phi(\theta) R\cos\theta \cdot \mathrm{d}\theta$$

运用之前所得到的结果，绕组中磁链的表达式可以变为

$$\Psi_S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N_m \left\{\int_{\theta}^{\pi+\theta} LRB(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} R\cos\theta\mathrm{d}\theta \qquad (10.31)$$

一般来说，构成绕组的导体的线密度可能是一任意的分布，其可以用函数 $N'(\theta)$ 来描述。那么，此时绕组中的总磁链可以用以下表达式计算：

$$\Psi_S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N'(\theta) \left\{\int_{\theta}^{\pi+\theta} LRB(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} R\mathrm{d}\theta \qquad (10.32)$$

式（10.32）可以应用于任意磁场分布 $B(\xi)$ 下以及任意导体线密度 $N'(\theta)$ 下绕组磁链的计算。

10.5.2　各种谐波

这一节中的计算均是围绕：求导体沿电机圆周呈正弦分布的定子绕组中的感应电动势。我们是在转子永磁体产生的气隙磁场为非正弦的 $B(\theta)$，即其包含高次谐波的情况下进行的电动势的计算。具体而言，我们是从式（10.25）开始着手的，也就是气隙中不仅包含基波，且包含所有奇次谐波的磁感应强度的表达式。因为这一非正弦的磁感应

强度为对称的，所以函数 $B(\theta-\theta_m)$ 不包含偶次谐波。在我们所考虑的情况下，定子导体的线密度为 $N'(\theta)=N_m\cos\theta$，同时气隙中磁感应强度的变化如式（10.25）所示。这一表达式表示函数 $B(\theta)$ 可以变化为一个仅包含有奇次项的级数。该级数的第一项为 $i=1$的项，其表示磁感应强度空间分布中的基波成分。对于级数中 $i>1$ 的项，其表示了磁场空间分布中的高次谐波成分。在式（10.25）的基础上，函数 $B(\theta)$ 的次数为（$2i-1$）的空间谐波等于

$$\frac{4}{\pi}\frac{B_m}{2i-1}(-1)^{i+1}$$

通过将以上结论代入式（10.31），我们可以得到 Ψ_S^{2i-1}，其表示次数为（$2i-1$）的谐波对于绕组总磁链所做的贡献。Ψ_S^{2i-1} 的大小与磁感应强度空间分布中的（$2i-1$）次谐波有关。

$$\Psi_S^{2i-1}=\frac{4N_mLR^2B_m(-1)^{i+1}}{\pi(2i-1)}\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\int_{\theta}^{\pi+\theta}\cos[(2i-1)(\xi-\theta_m)\mathrm{d}\xi\right\}\cos\theta\mathrm{d}\theta \quad (10.33)$$

通过将函数 $\cos[(2i-1)(\xi-\theta_m)]$对 ξ 进行积分，我们可以得到：

$$\int\cos[(2i-1)(\xi-\theta_m)]\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2i-1}\sin[(2i-1)(\xi-\theta_m)]$$

上述结果可以代入式（10.33），从而计算被积函数为关于 ξ 的函数且积分区间为 θ 到 $\theta+\pi$ 的定积分。计算结果如下所示：

$$\frac{1}{2i-1}\sin[(2i-1)(\xi-\theta_m)]\Big|_{\theta}^{\theta+\pi}=-\frac{2}{2i-1}\sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)]$$

通过将所得结果代入之前的表达式，其可以变为

$$\Psi_S^{2i-1}=\frac{8N_mLR^2B_m(-1)^{i}}{\pi(2i-1)^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)]\cos\theta\mathrm{d}\theta \quad (10.34)$$

由于有

$$\sin[(2i-1)(\theta-\theta_m)]\cos\theta=\frac{1}{2}\sin[2i\theta-(2i-1)\theta_m]+\frac{1}{2}\sin[(2i-2)\theta-(2i-1)\theta_m]$$

则所得结果可以被分解为两个定积分，分别为 I_A和 I_B，如下所示：

$$\Psi_S^{2i-1}=\frac{4N_mLR^2B_m(-1)^{i}}{\pi(2i-1)^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin[(2i-2)\theta-(2i-1)\theta_m]\mathrm{d}\theta$$
$$+\frac{4N_mLR^2B_m(-1)^{i}}{\pi(2i-1)^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin[2i\theta-(2i-1)\theta_m]\mathrm{d}\theta=I_A+I_B \quad (10.35)$$

由于 i 从 1 变化到 $+\infty$，且区间$[-\pi/2,\pi/2)$包含了函数 sin（$2i\theta$）的一个周期区间的整数倍区间，所以积分 I_B等于零。当 $i>1$ 时，这一结论也适用于积分 I_A。因此，只有当 $i=1$，也就是对应于一次谐波（基波）的情况下，磁链 Ψ_S^{2i-1} 的值才不等于零。对于任意 $i>1$ 的情况，被积函数均为一正弦波，且其周期区间的某整数倍区间总可构成积分区域$[-\pi/2,\pi/2)$。

在所得结果的基础上，我们可以总结得到：当绕组导体沿电机圆周呈正弦分布时，可以防止 $B(\theta)$ 中的高次谐波影响绕组磁链。因此，绕组中的感应电动势也不受 $B(\theta)$ 波形中高次谐波的影响。

综上所述，绕组中导体的正弦分布消除了感应电动势中的所有高次谐波，只保留了基波分量。

10.5.3　绕组电动势的峰值和均方根值

在所得结果的基础上，接下来我们将会介绍定子绕组中感应电动势的瞬时值、峰值以及均方根值的表达式。式（10.37）~式（10.39）适用于绕组中导体分布为 $N'(\theta)=N_m\cos\theta$，以及气隙中磁感应强度分布如图 10.8 所示，如式（10.25）的情况。

10.5.3.1　高次谐波的抑制

目前为止我们所得到的结果表明导体的正弦分布可以消除绕组感应电动势中的高次谐波。当一绕组中的导体分布为理想的正弦分布时，即使磁感应强度 $B(\theta)$ 的空间分布中存在高次谐波，其感应电动势也是正弦的。$B(\theta)$ 的空间分布中的（$2i-1$）次谐波对于绕组总磁链所做的贡献为 Ψ_S^{2i-1}，其表达式如式（10.35）所示。对于任意 $i>1$ 的情况，Ψ_S^{2i-1} 都等于零。因此，绕组就成为了一个能消除 $B(\theta)$ 空间分布中高次谐波的影响，只能通过基波的空间滤波器。

10.5.3.2　绕组磁链

$B(\theta)$ 的空间分布中只有基波对于绕组磁链做了贡献。所以绕组磁通可以由以下等式进行计算：

$$\Psi_S=\Psi_S^1=4B_mN_mLR^2\sin\theta_m \tag{10.36}$$

10.5.3.3　电动势

如果转子以恒定的速度 Ω_m 旋转，那么它的位置会根据式子 $\theta_m=\Omega_m t$ 进行变化。从而定子绕组中的磁链是一个关于角频率 ω_s 的正弦函数，该频率的大小取决于转子的角速度 Ω_m。当 $\theta_m=\Omega_m t$ 时，磁链的变化如以下等式所示：

$$\Psi_S(t)=4B_mN_mLR^2\sin\Omega_m t=\Psi_{Smax}\sin\Omega_m t$$

绕组中感应的电动势为一个正弦（反）电动势，它等于磁链的一阶导数：

$$e_s(t)=\frac{d}{dt}\Psi_S=4\Omega_mB_mN_mLR^2\cos\Omega_m t=\Psi_{Smax}\Omega_m\cos\Omega_m t \tag{10.37}$$

定子绕组中的这一正弦电动势的最大值为

$$e_{max}=\Psi_{Smax}\Omega_m=4\Omega_mB_mN_mLR^2 \tag{10.38}$$

而其均方根值为

$$e_{rms}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{Smax}\Omega_m=2\sqrt{2}\Omega_mB_mN_mLR^2$$

以上表达式中，电动势的最大值和均方根值均与定子导体沿电机圆周的最大线密度 N_m 有关。换个角度来看，它们也可以被表示为与线圈个数 N_T 有关的函数。对于导体为正弦分布的绕组而言，表达式（8.2）将其线圈个数 N_T 与导体最大线密度 N_m 建立起了

联系

$$N_{\mathrm{T}}=2RN_{\mathrm{m}}$$

所以，电动势的最大值可以由以下式子进行计算：

$$e_{\max}=2\Omega_{\mathrm{m}}B_{\mathrm{m}}N_{\mathrm{T}}LR$$

而绕组电动势的均方根值可以由以下式子进行计算：

$$e_{\mathrm{rms}}=\sqrt{2}\Omega_{\mathrm{m}}B_{\mathrm{m}}N_{\mathrm{T}}LR \tag{10.39}$$

以上分析表示了导体为正弦分布的绕组中的感应电动势不包含高次谐波，从而证明了这种绕组能像空间滤波器一样工作。

问题（10.4）：该题中我们所考虑的电机与之前分析中的对象一样，如图 10.8 所示。假设导体的数量不变，且集中放置于 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 的位置。试确定定子绕组中感应电动势的形状和大小。

解答（10.4）：每一个导体中所感应的电动势为 $e_{1\mathrm{C}}=LvB(\theta)$，其中 L 是电机的轴向长度，$B(\theta)$ 是 θ 位置的磁感应强度，而 $v=R\Omega_{\mathrm{m}}$ 是转子旋转的线速度。速度 v 反映了导体相对于磁场的相对运动。磁感应强度 $B(\theta)$ 的空间分布如图 10.8 所示。因此，感应电动势为一复杂的周期性矩形波，其周期与频率均取决于转子的速度。集中绕组的导体被放置于 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 的位置。由于 $B(0)=-B(\pi)$，所以整距放置的导体中的感应电动势的符号相反。把一对导体连接成一个线圈的方法使得我们应将两导体各自的电动势相减。将两个大小相同方向相反的电动势相减所得的线圈电动势 $e_{1\mathrm{T}}$ 是 $e_{1\mathrm{C}}$ 的两倍。所以，单匝线圈中的感应电动势等于 $e_{1\mathrm{T}}=2e_{1\mathrm{C}}=2LR\Omega_{\mathrm{m}}B(0)$。对于一个线圈匝数为 N 的集中绕组，绕组的电动势等于 $e_{\mathrm{w}}=2NLR\Omega_{\mathrm{m}}B(0)$。该电动势的波形为一系列的矩形脉冲，其幅值为

$$e_{\mathrm{w}}^{\max}=2\Omega_{\mathrm{m}}B_{\max}N_{\mathrm{k}}LR$$

运用式（10.25）中的关系式可以知道，上述矩形脉冲序列的一次谐波的最大值是该序列幅值的 $4/\pi$ 倍。因此，集中绕组的感应电动势中一次谐波的均方根值等于

$$e_{\mathrm{w}}^{\mathrm{rms}}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}2\Omega_{\mathrm{m}}B_{\max}N_{\mathrm{T}}LR=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\Omega_{\mathrm{m}}B_{\max}N_{\mathrm{T}}LR\approx 1.8\Omega_{\mathrm{m}}B_{\max}N_{\mathrm{T}}LR$$

我们有必要将这一结果与之前所得的线圈匝数相同但导体为正弦分布的绕组的电动势的均方根值进行对比。在式（10.39）的基础上，我们可以得到这个值的大小为

$$e_{\mathrm{rms}}=\sqrt{2}\Omega_{\mathrm{m}}B_{\max}N_{\mathrm{T}}LR\approx 1.41\Omega_{\mathrm{m}}B_{\max}N_{\mathrm{T}}LR$$

我们可以总结得到：集中绕组中感应电动势的均方根值是分布绕组的 $4/\pi$ 倍，后者大概是前者的 78.5%

问题（10.5）：假设电机转子上的永磁体在气隙中产生的磁感应强度为一正弦分布，$B(\theta)=B_{\mathrm{m}}\cos(\theta-\theta_{\mathrm{m}})$，其中 θ_{m} 是转子相对于定子的位置。定子绕组有 N_{T} 匝线圈，即有 $2N_{\mathrm{T}}$ 根导体。该绕组有两种实现方式。第一种方式是将导体集中放置于 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 的位置，即做成集中绕组。另一种方式是将绕组中的导体做成正弦分布，导体密度为 $N'(\theta)=N_{\mathrm{sm}}\cos(\theta)$ 且导体总数为 $2N_{\mathrm{T}}$。试确定两种情况下定子磁链 $\Psi_{\mathrm{S}}(\theta_{\mathrm{m}})$ 的最大

值。电机的几何形状与习题 10.4 中所述的情况一样。

解答（10.5）：导体密度的峰值 N_{sm} 与线圈总数 N_T 之间的关系为

$$N_T = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left| N'_S(\theta) \right| R\mathrm{d}\theta = 2RN_{sm}$$

其中 R 表示转子的半径。单匝线圈中可实现的磁通的最大值为以下两者的乘积：磁感应强度 $B(\theta)$ 的平均值，$B_{av} = 2B_m/\pi$；以及该线圈所包围的半圆柱面的表面积，$S = \pi RL$（构成该线圈的两导体是整距放置的）。可以计算得到，该磁通的最大值为 $\Phi_m = 2B_mLR$。

当定子绕组为集中绕组时，定子磁链能达到的最大值为 $\Psi_1 = 2B_mLRN_T$。该最大值是当转子位于 $\theta_m = \pi/2$ 的位置，也就是代表转子磁链的矢量与定子绕组磁轴共线时才能取到。

当定子绕组为分布绕组时，我们用 $\Psi_2(\theta_m)$ 来表示定子磁链。若用 $N'(\theta) = N_{sm}\cos(\theta)$ 来表示导体密度，则转子位于 $\theta_m = \pi/2$ 的位置时的定子磁链可以由以下式子进行计算：

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Phi(\theta)\mathrm{d}N = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ \int_{\theta}^{\theta+\pi} RLB_m\cos(\xi - \pi/2)\mathrm{d}\xi \right\} RN'_S(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ \int_{\theta}^{\theta+\pi} RLB_m\sin(\xi)\mathrm{d}\xi \right\} RN_{Smax}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{RN_{Smax}}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ \int_{\theta}^{\theta+\pi} \Phi_m\sin(\xi)\mathrm{d}\xi \right\} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{RN_{Smax}\Phi_m}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \{2\cos(\theta)\}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= R\Phi_m \frac{N_T}{2R} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} B_mLRN_T = \frac{\pi}{4}\Psi_1
\end{aligned}$$

基于以上计算，我们可以得出结论：当所有条件一致时，导体呈正弦分布的定子绕组中定子磁链的峰值是集中绕组定子磁链的峰值的 $\pi/4$。

第 11 章　直流电机介绍

在第一座电站建立之前，电能大部分通过电池或者化学反应产生电流的方式获得。电池的端口能提供直流电压和直流电流。也正是因为这个原因，最早期的电机试验和应用都是直流电机。电气工程师研究这一类电机的工作原理和特性，发现了设计和制造直流电机的方法。

起初，电能的生产、传输、应用都是直流电的方式。所有的机电能量转换都是通过直流电机实现的。电站最初建立在工厂、城市和其他主要电能用户端的周边地区，来自原动机（水轮机或者汽轮机）的机械能通过直流发电机转化为电能。大部分直流发电机的输出端输出几百伏的电压。通过两根导线，电能能够传输超过 1 ~ 2km 的距离到达用户。最早的用户设备也被设计成直流设备，电灯能将直流电转化为光能，直流电动机能将电能转化为生产过程中的所需的机械能。

设计电压等级超过 1000V 的直流发电机或者电动机牵涉到的技术困难将会在后面提及。因此，直流发电机或者电动机制造和应用于低压的场合。根据公式 $I = P/U$，传输和分配功率 P 将需要很大的电流 I。传输 1MW 电能需要超过 1000A 的电流。为了减少线电阻 R，电力传输线的载流面积将会设计得非常大。直流输电方式会产生相当大的电能损失 RI^2 和非常大的电压降 RI。高压传输将会减小电流 $I = P/U$，损耗和电压降也会变小。然而，直流发电机的电压等级受到了限制，同时，也没有一种直流变压器能够将直流发电机发出的低压电转化为高压电用于传输。

现在的电力系统在发电、传输、配电环节都是采用频率为 50Hz 或者 60Hz 的交流电。通过电力变压器能够将交流发电机发出的相对较低的电压转换为几百千伏。大部分交流输电线路都是三相，电压等级有 110、220、400 或者 700kV。高压传输线路中的电流将会减小，线损和电压降落也会随之减小。在传输功率 $P = 100$MW 和电压等级 $U =$ 400kV 的输电线路中，线电流只有 150A。在用户的周边，输电线路中的高压电将会通过变压器转换为合适的电压等级（220V）供用户使用。电力变压器改变电压等级通过变压器变比 $m = N1/N2$，定义为一次绕组与二次绕组匝数之比。

直流电压不能通过电力变压器变压。近 20 年电力电子技术的发展，用于直流电压转换的高功率、高电压的静态电能转换器应运而生。这种设备在电力系统发展的初期是没有被发明的。因此，电站里直流发电机发出的直流电直接连接到输电电路，而没有通过变压器，用电设备也被设计成同样的电压等级，并与输电线路直接相连。输电线路采用较低的电压等级将会造成大电流、大的电压降落、高线损，因此早期的直流电力传输线只能用于很短距离。

现在，电力的生产、传输和配电都是采用交流电。交流发电机将机械能转换为电能。因此，直流发电机和发电机的数量正在减少。直流电机被交流电机所取代。然而，

学习最先广泛使用的直流电机是非常重要的。而且，直流电机相对简单的模型使得它们适合用于介绍基本原理、概念和电机特性。在学习直流电机的三个章节中，读者将会学到电机的机械特性、稳态操作区、暂态特性、稳态等效电路、动态模型、损耗的分析、电能供给和控制，还有牵涉到电机应用的其他的一些任务、问题、现象。

本章从电机运行的描述和原理开始。同时会给出有关直流电机设计的一些基本的知识。分析包括换向器（直流电机的核心部件，将直流电流转换为交流电流）的运行。换向器将电源和导线中的直流电传输到转子中。由于使用机械换向器，转子电流取决于转子位置。在稳定的速度，转子导体中的交流电流频率由速度决定。一些构成转子绕组和绕组与换向器的连接的基本方式将会给出。本章最后将会分析电磁转矩和电磁力的表达式。

电机的数学模型将会在下一章分析电机的暂态过程中介绍。等效电路图会在稳态分析基础上介绍。等效电路能够在电压已知和转速恒定的时候计算稳态时电机的电流、磁链、转矩。在这些章节，会得出机械特性（表示稳态时速度和转矩的关系）。研究电机发热和散热的过程中，会分析绕组和磁路的损耗。会介绍弱磁升速的原理和相关特性。暂态和稳态的工作区将由暂态和稳态的转矩速度曲线来决定。

11.1 结构和工作原理

直流电机包括定子磁路、转子磁路和转子绕组。定子包括定子绕组或者称为励磁绕组、或者永磁体。定子磁通由定子上安装的永磁体或者通入直流电流的定子绕组产生。转子中的电流产生转子的电磁力。在先前的章节，电磁转矩由定子磁通和转子磁通向量共同作用产生。

$$\overrightarrow{T_{em}} = k[\vec{\Phi}_R \times \vec{\Phi}_S]$$

因此，直流电机的电磁转矩由定子磁通和转子磁通向量决定。电磁转矩向量的方向与电机的轴线在同一方向上。

11.2 定子结构

定子磁通也被称为励磁磁通，是由定子绕组中的直轴电流分量产生的。励磁磁通也可以由永磁体产生。励磁磁通由定子励磁绕组产生的励磁方式称为电励磁。定子绕组包括直轴分量，直轴分量产生定子的电磁力和定子磁通。因为定子绕组通入直流电，因此定子磁通不移动。

除了通过电励磁的方式外，直流电机也可以将永磁体安装在定子磁路上用于励磁。永磁体在没有外磁场的情况下有相当大的剩余磁感应强度。在永磁体用于励磁的直流电机中，定子磁链不需要定子绕组。在图 11.1 中，磁力线从 N 极发出，穿过转子，最后汇入 S 极。

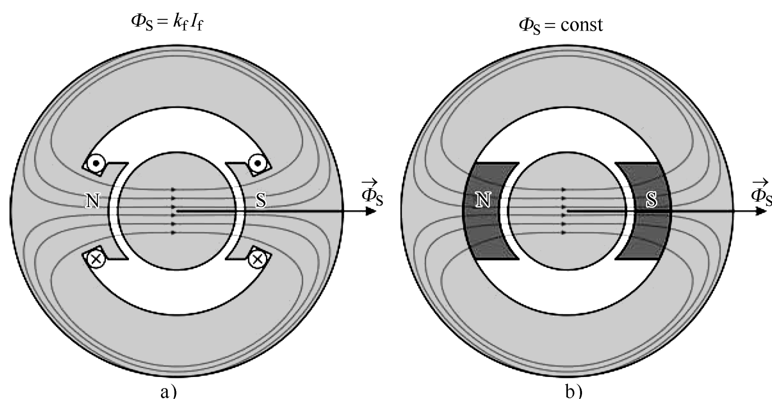


图11.1　由通入直流电的定子绕组产生的和由永磁体产生的定子磁通向量位置

11.3　他励直流电机

大部分直流电机都和转子的电流无关，这些电机称为他励直流电机。包括永磁直流电机，在永磁直流电机中，转子电流不会影响励磁磁链。他励电机也包括单独电源供电励磁的直流电机，独立电源与转子电流没有耦合关系。

在其他形式的直流电机中，定子激励受到转子电流的影响。如果励磁绕组是直接与转子绕组串联连接，励磁电流等于转子电流，这种类型的直流电机称为串励直流电机。如果励磁绕组是直接与转子绕组并联连接，励磁电压等于转子电压，当转子电流变化时，励磁电流也会发生变化，这种类型的直流电机称为并励直流电机。当然也存在串复励电机。

他励电机是我们这一章主要研究的电机类型。

11.4　转子导体中的电流

直流电机转子中的导体是轴向放置的，并通入电流。通过与励磁磁场的相互作用，转子导体产生电动力。一对作用力产生机械转矩并作用于转子，从而使转子旋转。由于有电机的特殊结构和换向器（将电流传导到转子的装置）的存在，在 N 极下的导体的电流的方向并没有改变。即使转子旋转，导体中的电流方向没有改变。在 S 极下的导体中的电流与 N 极下导体中的电流方向相反。

导体 1 和导体 2 被安放在转子槽中，它们随着转子以相同的速度旋转。当转子旋转了半圈以后，导体 1 和导体 2 交换了位置。如图所示，为了使转矩方向为正，导体中电流的方向需要改变。在导体 1 中，当它在 N 极下时，它的方向将会是流进，当它移动到 S 极下时，电流方向将会是流出，这样才能保证转矩始终为正。从导体 2 中我们也可以

得到相同的道理。

导体 1 和 2 组成了转子的一匝线圈。当转子以速度Ω_m，旋转一圈的时间为 $T=2\pi/\Omega_m$，为了能够产生方向不变的转矩，导体中的电流将会随着转子的旋转同步的改变方向。电流在前半个周期的时间 $T/2=\pi/\Omega_m$ 内为正，在余下的半个周期为负。因此，电流将会是以 T 为周期变化的，变化的周期由转子的转速决定。

将传导至转子中导体的电流变为周期性电流的方法暂不考虑，将会在后面的内容讲述。从图 11.2 分析得出，即使转子旋转，N 极下导体中的电流始终保持流入的方向，S 极下导体中的电流始终保持流出的方向。转子的磁动势和磁通能用方向朝下向量表示。另一方面，定子磁场是水平从左至右。定转子磁通向量之间的夹角恒定为 90°，与旋转速度和旋转方向无关。这满足产生恒定电磁转矩的最优条件。

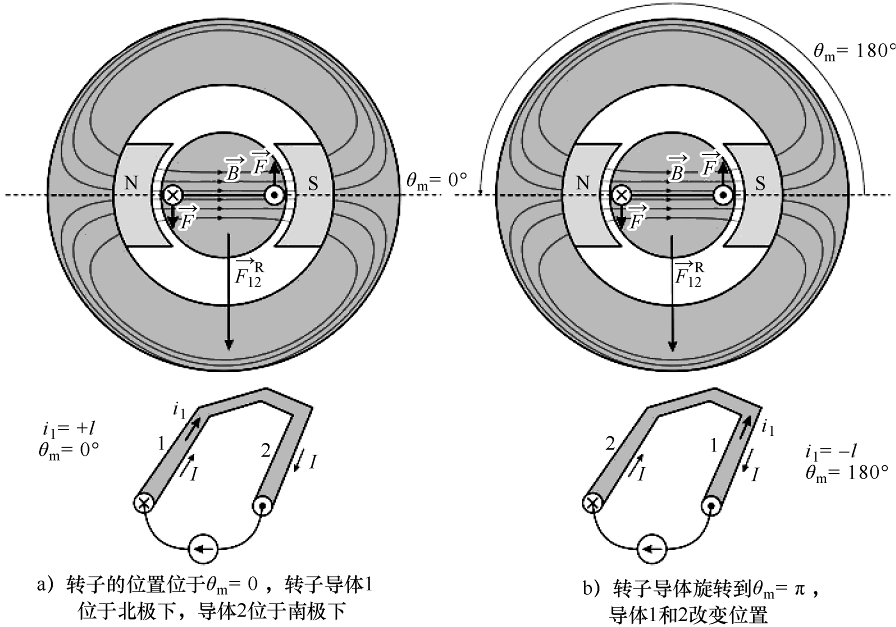


图 11.2 转子的位置及电流的方向

前面考虑了定子磁极下的一对导体。在导体 1 和 2 上，一对作用力产生正向的转矩。这个转矩将会使转子逆时针旋转。电磁转矩的表达式如下（11.1），其中 l 是导体的长度，B 是定子磁极下的磁感应强度，D 是转子直径。

$$\begin{aligned}\vec{F}&=i(\vec{l}\times\vec{B})\\ M_{em}&=l\cdot B\cdot i\cdot D\end{aligned}\tag{11.1}$$

11.5 机械换向装置

直流电机中的转子电流是从直流电源获得的。电源的电流提供给机械换向装置。换向装置中旋转的部分称为换向器，静止的部分由两个电刷组成，通常称为 A 和 B。外电源的正极连接 A 电刷，负极连接 B 电刷，电刷将电流传导到换向器中，换向器直接与转子中导体相连。电刷固定在定子上，不能移动。换向器安装在转子轴上并随着转子以相同的速度旋转。静止的电刷沿着换向器的一周安放。换向器是由相互绝缘的换向片组成的。换向片与转子线圈的连接将在后面的章节讲述。

外部直流电源将电流输入到位置相对的电刷 A 和 B 中。不动的电刷与换向片接触，将电流传导至转子导体中。当转子旋转，电刷从一组换向片滑到另一组换向片。因此，转子中电流方向变化一次。最终的结论是，即使转子转动，转子电流产生的磁动势向量 $\boldsymbol{F}_{12}^{\mathrm{R}}$ 相对于定子方向不变，如图 11.2 所示。转子磁动势产生的转子磁通也不会转动。

机械换向装置将从直流电源获得的直流电流转变为转子导体中的周期性变化的电流。周期性变化电流的频率由转子旋转的速度决定。机械换向装置的作用类似于静止变换器或者称为变频器，变频器利用功率半导体器件将直流电压和电流变换为交流电压和电流。装有机械换向器的转子中的电压和电流的变化就类似于一个变流器（直流供电）给异步电机和同步电机提供交流电的系统。

在现在的电机应用中，装有机械换向器的直流电机被变流器供电的交流电机和同步电机（统称为交流电机）所取代。

制作转子绕组的方法和连接绕组到换向器的方法是相关的。本书不包括详细的学习不同的转子绕组实现方法。为了理解换向器的换向原理，后面的章节将会分析几个相对简单的例子。

11.6 转子绕组

图 11.3 中的转子只有一匝线圈，它是由导体 1 和导体 2 串联组成的。导体 1 和 2 是与换向片 S1 和 S2 有电气连接的。这样的换向片是由一个金属圆环切成两个绝缘的半块构成。导体 1 的前端与 S1 连接，导体 2 的前端与 S2 连接。导体 1 和导体 2 的后半部分在电机的后部被连接在一起。电刷 A 和 B 连接到一个电流源 $i(t)$。在给定的位置，电刷 A 和 B 分别与换向片 S1 和 S2 相连。因此，电刷和换向片之间有电气连接。在图中的位置，导体 1 中电流的方向是流入的方向⊗，导体 2 中电流的方向是流出的方向⊙。当转子转动 π，导体 1 和 2 相互交换位置。在同时，换向片 S1 和 S2 改变了位置，因为它们固定在转子上并随转子旋转。导体 1 现在处在 S 极下，导体 1 中的电流反向，因此，N 极下转子中导体的电流始终保持为流入方向⊗，而 S 极下转子中导体的电流始终保持为流出方向⊙。机械换向器保证在定转子相对运动中，定子极下任何位置的导体中电流的方向保持不变。

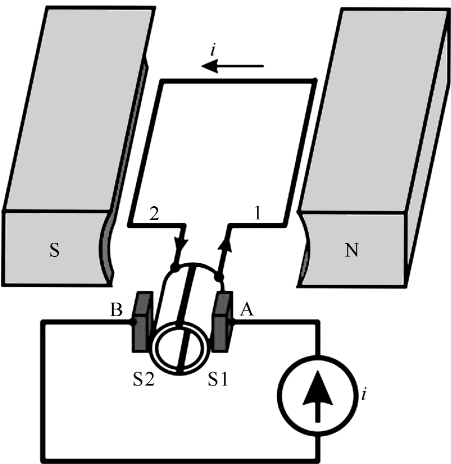


图 11.3 机械换向装置。电刷 A 和 B，换向片 S1 和 S2

转子中电流随着转子的旋转同步改变方向。换向器和电刷将电源提供的直流电变换为转子中周期性变化的电流。转子旋转一周的时间就是转子导体的电流的周期。因此，从定子侧观察，转子磁动势的方向并没有变化。在图 11.4 中，N 极下的导体的电流都是流入方向，在 S 极下绕组都是流出方向⊙。即使转子和导体在转动，这种分布保持不变。

实际上，转子绕组由一系列的沿转子分布的导体组成。导体与相关的换向片相连，换向器由一系列相互绝缘的换向片组成，换向片与 2 根或者更多的导体相连。电流i_a经过一对电刷和换向器流入转子。换向器传导电流到转子导体中，并使电流按图 11.4 中的方式分布。这种分布并不随着换向器的移动而改变。值得注意的是转子和转子上的导体是一起移动的，只是电流的分布没变。由于换向器的作用，转子导体中流入交流电流，并且产生了转子电流层相对于定子静止。在图 11.4 中转子磁动势的方式为竖直方向，与转子的位置无关。因此，转子的磁通保持静止，定转子磁通向量的夹角为 π/2 。直流电机转子上有相当多的转子导体和换向片。一个典型的直流电机转子如图 11.5 所示。

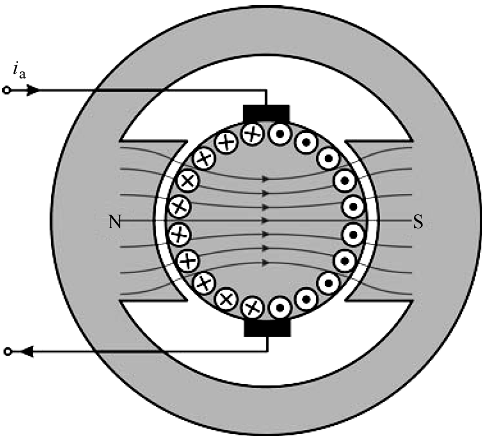


图 11.4 转子电流分布

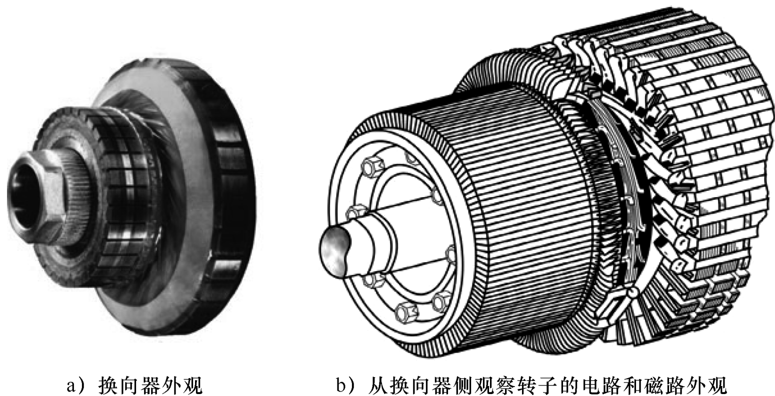


图 11.5　直流电机转子外观

图 11.6 中给出了在一个有 4 槽转子、4 块换向片、8 根导体的直线电机中连接转子导体和换向片的方法。这种电机在实际中很少见。在实际中转子的槽数会更多。因此，图 11.6 中的电机作为介绍转子绕组的一个简单例子。导体 P1-P8 被安放在转子槽中，每槽安装 2 根导体，这张图是从安装换向器的一侧观察电机的侧视图。在与换向器相对的另一侧的转子侧，导体也是相互按一定顺序连接的。由于这一侧面不可见，相关的连线在右侧的图中标为虚线。由于有这一侧的连接，导体被连接成 4 匝，P1-P2，P3-P4，P5-P6 和 P7-P8。在安装换向器的转子侧，电气连接被绘制成实线，如图 11.6 左所示。

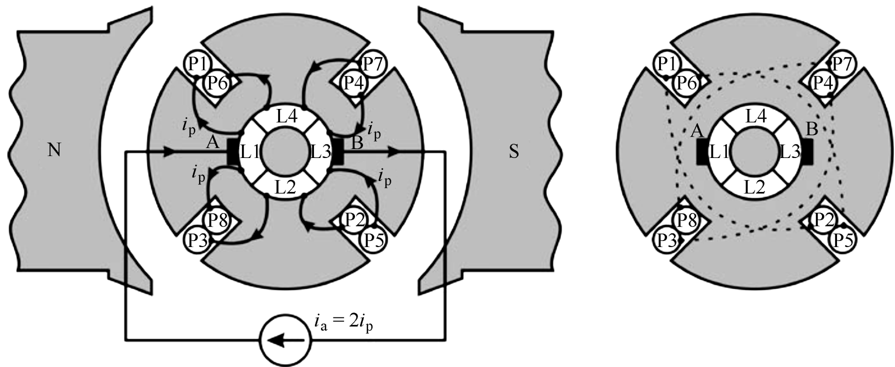


图 11.6　导体与换向器的连接形式（转子槽数为 4，总导体数为 8）

换向片 L1 与导体 P8 和 P1 相连，换向片 L2 与导体 P2 和 P3 相连，换向片 L3 与导体 P4 和 P5 相连，换向片 L4 与导体 P6 和 P7 相连。换向片与相关导体的连接是由实线

表示的，导体之间的连接在转子后部由虚线表示。在当前的位置，电刷 A 和 B 和换向片 L1 和 L2 接触，因此，电流源i_a被分流成两条支路，如图 11.7 所示。每根导体中电流大小为$i_a/2$。

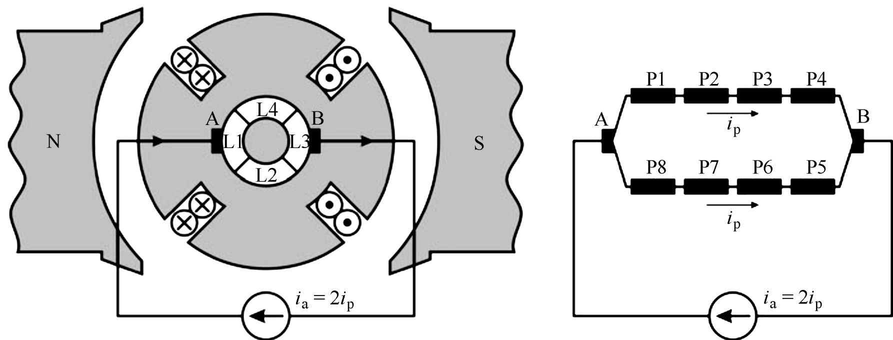


图 11.7　安放在 4 个导体槽中 8 根导体的电流方向

在 N 极下所有的导体中电流的方向都是流入方向（⊗代表垂直流入纸面的方向），在 S 极下所有的导体中电流的方向都是流出方向（⊙代表垂直流出纸面的方向）。转子旋转 π/2，电刷 A 和换向片 L4 接触，电刷 B 和换向片 L2 接触。根据图 11.6中转子导体和换向片的连接，我们可以分析在转子旋转后转子导体中电流的方向。由于旋转，导体会改变它们的位置。同时，由于换向器的作用，一部分导体中的电流会改变方向。最后，N 极下导体中电流方向仍然是流入方向⊗，S 极下导体中电流方向仍然是流出方向⊙。转子绕组的结构和转子绕组与换向片之间的连接使得磁极下导体中的电流方向在转子运动时保持不变。对于一根导体，导体中电流方向是变化的，当它从 N 极移动到 S 极，电流的方向由流入方向变为流出方向⊙。转子导体中交变电流的频率由转子转速决定。

转子电流路径图如图 11.8 表示。图中转子的结构更加简单，转子上有 4 槽、8 根导体、4 片换向片组成的换向器。换向装置使得转子绕组中的电流分布不随转子转动而移动，相对于定子不变。磁动势向量和磁通向量相于定子不变。电源通过电刷 A 和 B 提供给转子的电流是恒定的电流，如图 11.6 和 11.7 所示。

在转子运动的过程中，电刷将电流传导给换向片，换向片传导给转子导体。在导体从 N 极下移动到 S 极下时，导体中电流方向改变。因此，每一根导体中的电流都是交变的电流，频率由转子转速决定。从转子侧观察，转子电流的分布不变。转子电流的分布如图 11.7 所示，转子电流产生的转子磁通可以由竖直方向的相量表示，与定子磁场成 π/2。通过右手定则，转子磁通的方向为竖直向下。

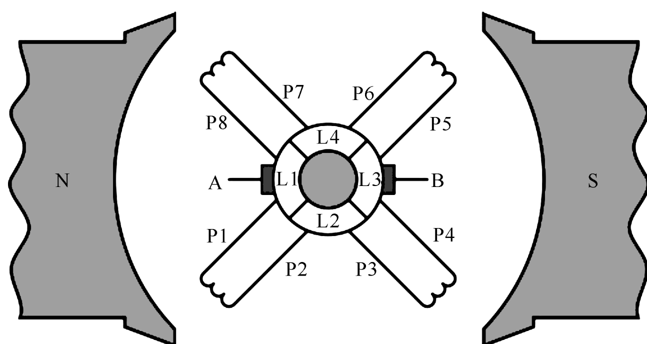


图 11.8　转子电路连线图

11.7　换向

在先前的例子中，在 N 极下转子电流为流出方向⊗，在 S 极下转子电流为流出方向⊙。在转动过程中，任意一根导体半个周期在 N 极下，半个周期在 S 极下，因此，转子导体电流方向随着转子转动而变化。电刷 A 和 B 固定在定子上，电刷与换向片接触，将电流i_a传导给转子。电刷在每一个时刻与在它下面的换向片接触。因此，换向片在电刷下移动，相当于电刷从一个换向片滑向下一个换向片，同时，与换向片相连的导体中的电流也会随之发生变化。换向装置使得电源提供的直流电转变为转子导体中的交流电。电刷从与一个换向片接触到与下一片换向片接触，使得转子绕组中电流随之变化的过程被称为换向。在变化过程中的某个特殊时刻，一个电刷同时接触到两片相邻的换向片，使得与换向片连接的转子导体短路。图 11.9 中出现的就是这种情况，此时，电刷 A 同时和换向片 L1 和 L2 接触。

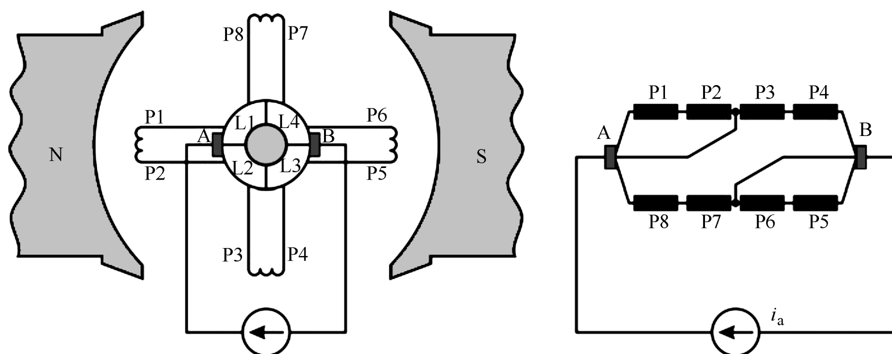


图 11.9　换向过程中的短路线圈

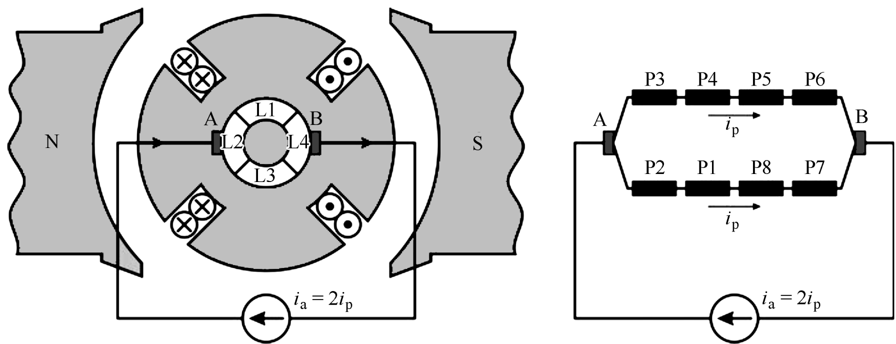


图 11.10 转子位置和电路连接，转子从图 11.8 中的位置旋转了 π/2

从图 11.8 中的位置变换为图 11.9 中的位置，转子移动了 π/4。因为电刷 A 使得换向片 L1 和 L2 短路，电刷 B 使得换向片 L3 和 L4 短路。在换向过程中，线圈 P1-P2 和 P5-P6 处于短路状态。当转子继续旋转 π/4，转子将旋转到图 11.10 的位置。相比于图 11.8，转子的位置顺时针转动了 π/2，电刷当前与换向片 L2 接触。图 11.10 中的连线图应该与图 11.6 和图 11.7 中的相比较。

对于我们分析的这台电机的转子，在一个周期内换向 4 次。分析换向过程中转子绕组周期性短路是必要的。从图 11.6 中转子导体绘制在转子槽中的原始转子模型分析，在换向过程中，如图 11.9 所示，线圈 P1-P2 和 P5-P6 短路。在同时，导体 P1，P2，P5 和 P6 通过相邻定子磁极的中心线，即电枢上的几何中心线，此处的感应电动势非常小且改变方向。短路绕组所处的位置如图 11.11 所示，其他没有短路的绕组没有绘制出来。在定子磁极中心线上，定子励磁产生的磁感应强度最大。在图 11.11 中，导体 P1、P2、P5 和 P6，径向磁感应强度接近于零。因此，短路绕组中不会产生很大的短路电流。

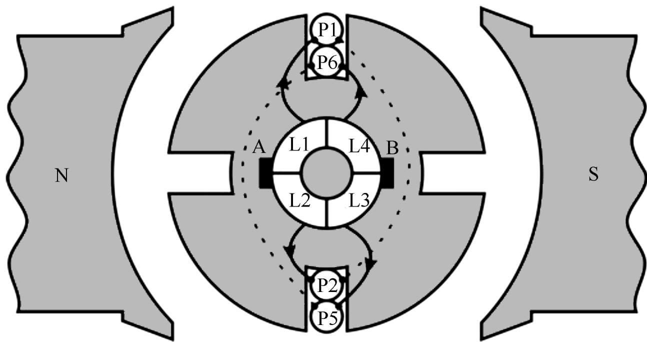


图 11.11 换向过程中短路绕组的位置。线圈 P1-P2 和 P5-P6 被电刷 A 和 B 短路

在实际中，直流电机通常有更多的换向片、转子槽、转子导体数。换向片与转子导体的连接将在后面的内容中介绍。无论换向片的数量有多少，换向总是出现在电刷 A 和 B 从一个换向片滑到另一个换向片的过程中。换向器安装在转子上并随转子以相同的速度旋转，换向片在电刷下滑动，速度由转子转速决定。

转子旋转一周，换向的次数由换向片的数量决定。通常换向的次数是换向片数量的几十倍。无论电机转子是什么结构，转子导体与换向片总是相连的。转子的导体通常串接组成一匝线圈，或者串接成多匝线圈。当电刷同时接触相邻的换向片，与相邻换向片相连的转子绕组会被短路。短路电流通过电刷形成环路。电流的大小取决于短路线圈的感应电动势的大小和线圈的等效阻抗。因此，短路绕组中的感应电动势趋近于零对于减小短路电流是至关重要的。直流电机设计时，换向时的短路绕组的感应电动势就被设计为零。短路绕组的感应电动势产生的电流流过电刷会产生火花、电弧，甚至是损坏电刷和换向器。

图 11.11 中绘制出了一台 4 极、4 槽直流电机的换向过程。被电刷短路的绕组处在电枢的几何中心线上，磁感应强度的径向分量接近于零。所有的直流电机都遵循这样的设计原则。在安装换向片数量很多的直流电机中，电刷会更宽，一把电刷能够短路多个绕组，所有被短路的绕组都应该处在电枢的几何中心线上，这样线圈中的感应电动势可以忽略。相邻磁极的中性线被称之为电枢的几何中心线，这将在随后的章节中介绍。

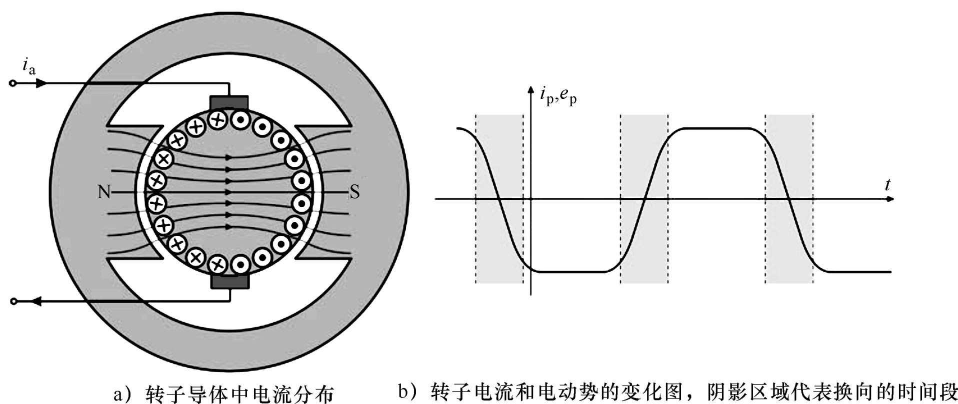
11.8　换向过程

机械换向装置能够将从直流电源获得的直流电流变为周期性变化的电流传导给转子的导体。转子导体中电流随时间变化的曲线如图 11.12b 所示。电流的方向与转子旋转同步。在换向的时间段内，在图 11.12b 中用阴影区域表示，电流i_c处于 $+i_a/2$ 和 $-i_a/2$。换流的时间相对于整个周期时间非常短。因此，转子电流的波形类似于幅值为$i_a/2$ 的方波。转子的电流不是正弦波。电流i_p是关于过零点对称的、周期性的电流，平均值为零[⊖]。

因此，图 11.12a 中的换向装置将直流电流转换为交流电流，电流的频率是由转子转速决定的。

在直流电机被用作发电机的场合，转子被水轮机或者汽轮机带动。转子导体在定子励磁产生的磁场中旋转。磁感应强度与定子磁通成比例。转子中产生的电动势大小与磁感应强度和外界转速成正比。在 N 极下，磁场方向与 S 极下的磁场方向相反。因此，不同磁极下产生的感应电动势方向相反。转子导体随着转子以相同的速度在磁极下移动。

⊖ 广义而言，它也可称为交流电流。严格说来，只有时间的正弦函数才被理解为交流电流，称为正弦或谐波电流。



a）转子导体中电流分布　　b）转子电流和电动势的变化图，阴影区域代表换向的时间段

图 11.12　类似于直流/交流变换器的机械换向器

因此，转子导体中的感应电动势呈周期性变化，感应电动势的平均值为零，频率由转子速度决定。转子旋转一周产生的感应电动势如图 11.12b 所示。下面将会介绍如何将转子导体中交流的感应电动势转变为电刷 A 和 B 之间的直流电动势。这种交流到直流的变换发生在换向装置将交流感应电动势转换为直流电动势的过程中。因此，换向装置起到了整流器的作用。

11.9　转子绕组的制作

为了更好的理解直流电机和学习换向装置的作用，这一章节将研究一个简单的电机，它拥有 8 槽、8 根导体、4 片换向片构成的换向器、2 把电刷。为了弄清楚导体与换向片的连接方法，有必要研究绕组的展开图——类似于把电机转子展开并放在一个平面。如图 11.13a 所示，将电机从虚线处剪开，并展开到一个平面（见图 11.13b）。最终，将转子的圆柱面展开为平面，就获得了如图 11.13c 所示的展开图。展开图中，转子导体绘制在转子磁极下面。值得注意的是在展开图中，导体 P1-P4 依然在 N 极下。

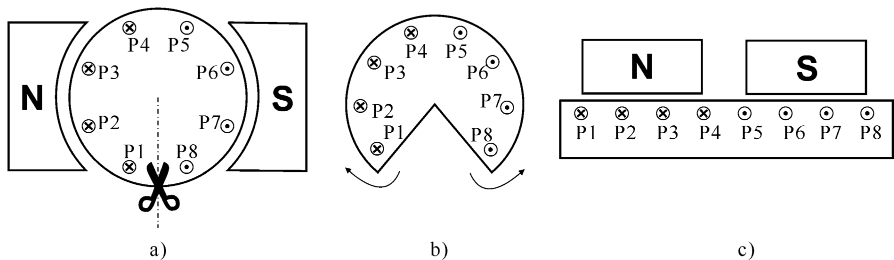


图 11.13　转子展开图

在图 11.15 中，换向片被标记为 L1-L4，导体被标记为 P1-P8。导体 P1-P4 的电流方向为流入⊗，它们处于 N 极下。导体 P5-P8 的电流方向为流出⊙，它们处于 S 极下。电流方向是指观察者从电机的前部看进去电流的流向。标志⊗表示从电流从前部（安装换向装置）的一侧流向后面的一侧，标志⊙则相反。

4 片换向片可以由一个完整的金属环均匀的切割成 4 段弧面，然后再弧面之间安装绝缘组成。换向片也可以用同样的方法展开。展开图的绘制是与转子绕组外表面成比例的。展开图的总宽度为 2π，水平轴线从 0 变化到 2π。图 11.15 绘制出了导体、电刷、换向片的展开图。图中的顶部是磁极。磁极（N，S）和电刷（A，B）不会移动。在图 11.15 中，转子的转动可以设想为一系列导体 P1-P8 和换向片 L1-L4 的左右平行移动。

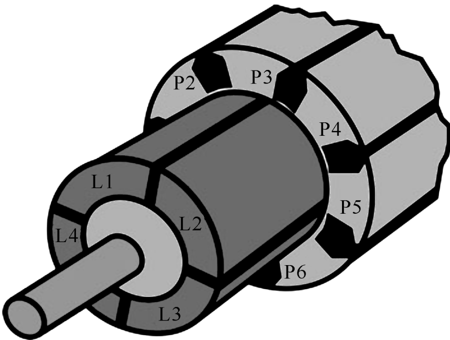


图 11.14 从前部观察直流电机转子

在图中的位置，导体 P1-P4 在 N 极下，电刷 A 和 B 接触换向片 L1 和 L3。当转子转

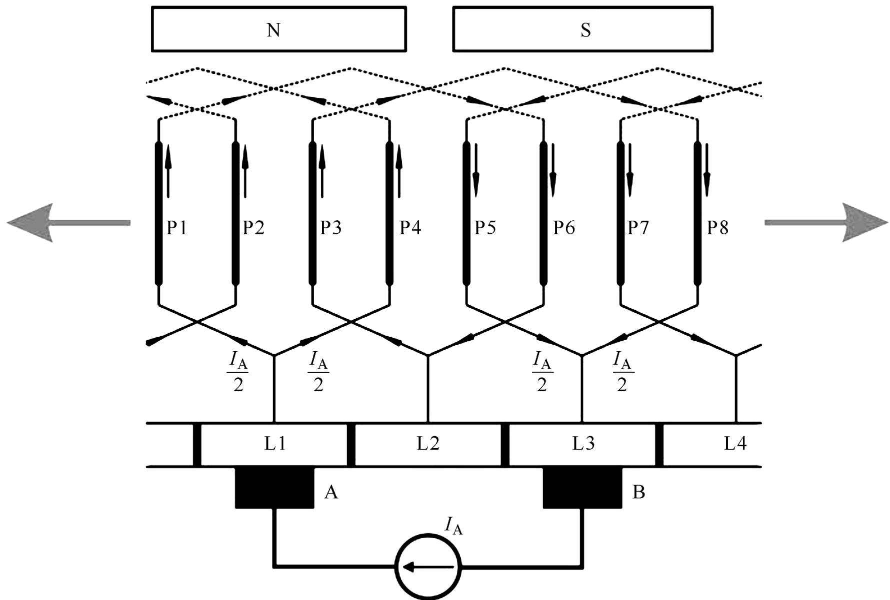


图 11.15 转子导体和换向片的展开图，电刷 A 和 B 分别与换向片 L1 和 L3 相连

动，转子导体和换向片也会产生相对运动。磁极和电刷被固定不会移动。在展开图中，转子转动被等效为转子导体和换向片的左右移动，移动的方向由电机的转速方向决定。

电机转子顺时针方向转动，展开图中的转子导体和换向片向右运动。

在图中的时刻，电刷 A 接触换向片 L1，电刷 B 接触换向片 L3。导体 P1- P8 用粗实线表示，导体之间的连接和导体与换向片的连接用细实线表示。图中导线绘制的粗细只是为了区分导体的不同部位，与实际的粗细并无关系。虚线表示在电机的后侧的导线之间的连接，因为从电机前部不可见，所以绘制成虚线。

电刷 A 和 B 与恒定的电流源I_a，在图示的位置，电刷 A 与换向片 L1 接触，换向片 L1 与导体 P1 和 P4 连接。从电刷 A 流入，电流被分为两条支路，每条支路电流的大小为$I_a/2$。

在第一条支路，电流$I_a/2$ 流过转子导体 P1，从电机前部流向后部，在后部，导体 P1 和 P6 的端部用虚线相连，电路通过导体 P6 从电机后部流向前部。导体 P6 与换向片 L2 相连。在图示的位置，换向片 L2 并没有与电刷接触，因此，P6 中的电流流经 P3，从电机的前部流至后部，在电机后部，导体 P3 与导体 P8 相连，电流流经 P8 至换向片 L3 和电刷 B。

在第二条支路，电流$I_a/2$ 流过转子导体 P4 和 P7，然后流过 P2 和 P5，最后流至换向片 L3 和电刷 B。因此，两条支路的电流在换向片 L3 处汇合，电流I_a经过电刷 B 流至电源。接着分析图 11. 13 中的转子所处的位置，我们得出结论：换向器将电源的电流传导至转子导体中，转子导体的电流分布按照 N 极下的导体的电流大小为$I_a/2$，方向由前部流向后部，其余的导体分布在 S 极下，电流密度与 N 极下的导体的电流密度相同，方向相反。

随着转子的旋转，导体 P1- P8 和换向片 L1- L4 在展开图中从左向右运动。当转子展开图向左移动 $\pi/4$，电刷 A 与换向片 L2 接触，电刷 B 与换向片 L4 相连。在新的位置下，转子电流的分布如图 11. 16 所示，导体 P3，P4，P5 和 P6 在 N 极下，这些导体中的电流是流入方向。导体 P7，P8，P1 和 P2 在 S 极下，电流方向为流出方向。通过与图 11. 15 比较得出结论：转子的旋转会导致单独导体中电流的变化，但是不会影响从定子侧观察转子电流的分布。换句话说，N 极下转子导体电流的方向为⊗，S 极下转子导体电流的方向为⊙。正因为如此，转子的转动并没有改变转子磁动势的方向。因此，机械换向装置保证了转子的磁通向量与定子的磁通向量保持相对静止。

通过分析单根导体在转子旋转一圈的过程中导体中电流的变化，得出一个结论：转子导体中流过的电流是交变的，电流的周期就是转子旋转一圈的时间。因此，机械换向装置能被设想成一个能把直流电转化为交流电的装置。

转子绕组的绕制方式如图 11. 15 所示。导体 P1 与换向片 L1 在电机的前端相连，在电机的后端与 P6 相连。值得注意的是 P1- P6 的连接方式是在电机的后部将 P1 与右侧的第五根导体相连。在电机的前部，P6 与换向片 L2 相连，同时也与 P3 相连，也就是 P3 左侧的第三根导体。按照同样的方法将电机的剩余导体连接起来。所有的导体在电机前部与右侧的第五根导体相连，在电机后部与导体左侧的第三根导体相连。除此以外，电机前部两根相连的导体都与一片换向片相连。上

述线圈绕制方式被称为分数极距绕组。整距绕组无论是在电机的前后部，都与第四根导体相连。

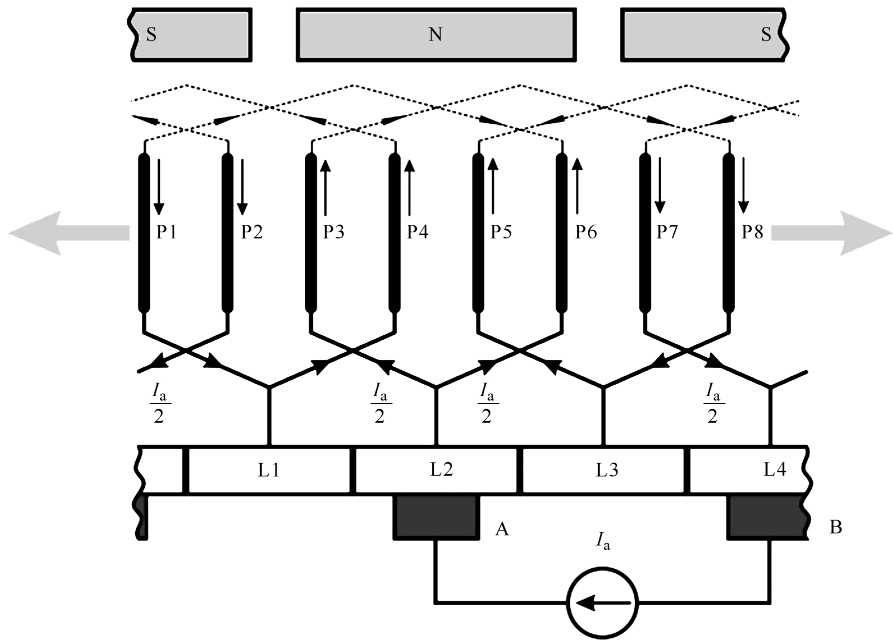


图 11.16　电刷 A 接触换向片 L2 时，转子导体的电流方向

上面介绍的是转子绕组绕制的基本原则。在实际中，有很多种绕组方案可以使用。大部分的直流电机的槽数不会超过 8 槽。绕组绕制的方法可以概括为：对于转子槽数为 $2N$ 的电机，在电机的后部，导体连接至右侧第（$N+1$）槽中的导体，在电机前部，导体连接至左侧第（$N-1$）槽中的导体并与换向片相连。

一个槽通常可以安放多根导体。因此，转子绕组的连接和与换向片的连接方式比图 11.15 更加地复杂。除了将一匝线圈安放在两个槽中，也可以将多匝绕组安置在两个槽中。也可以将两组导体分层安置在转子槽中，这样的绕组被称为双层绕组。图中 11.15 中的绕组为叠绕组。还有其他的绕组绕制方式，例如波绕组。[㊀]

图 11.17 中绘制电机的前侧图，图 11.15 给出了对应的展开图。符号⊗和⊙表示转子导体的方向。带箭头的实线表示电机前侧转子导体的连接方式，虚线表示电机后侧的转子导体连接。名称 P1P6 被标记在连接 P1 和 P6 的虚线附近，表示 P1 和 P6 之间的连接。图 11.17 与图 11.15 相比较得知展开图的优点。

㊀ （P278）电机绕组的更多细节可以参考 Pyrhonen J，Jikinen T，Hrabovcova V 2008 版的《旋转电机设计》。

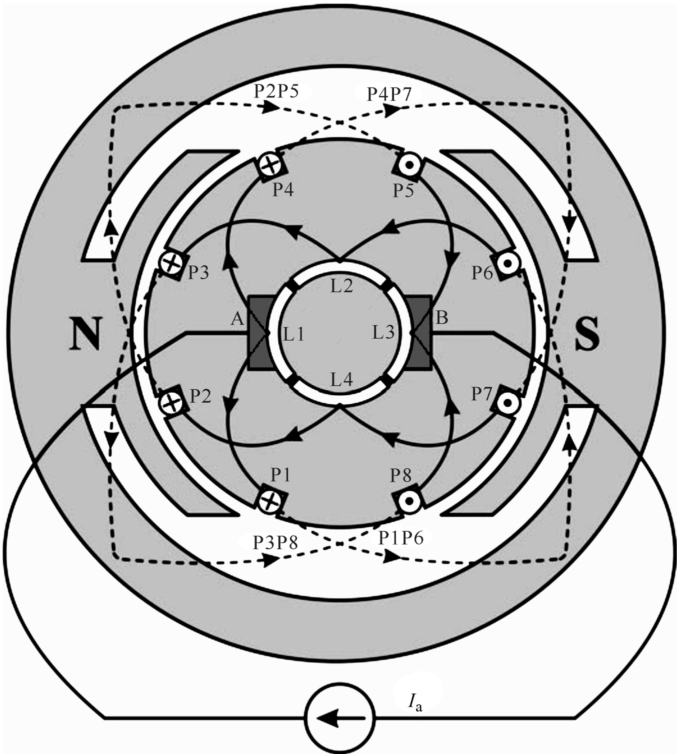


图 11. 17　电机转子绕组的前视图，图 11. 15 绘制出了相应的展开图

11. 10　换向问题

在例证中的电机中，转子绕组包含 8 根导体和 4 片换向片，通过前面的分析，在任意时刻，在电刷 A 和 B 之间有两个电流通路。每一个电路通路有 4 根导体串联在一起。每一支路中电流的大小为电源提供电流的一半。

当电刷 A 从换向片 L1 移动到换向片 L2，电刷 B 经过换向片 L3 和换向片 L4。电刷的移动使单根导体中的电流方向产生变化。在换向过程中，如图 11. 18 所示，电刷 A 使换向片 L1 和 L2 短路，同时，电刷 B 使换向片 L3 和 L4 短路。P1 和 P6 组成的线圈被电刷 A 短路，P2 和 P5 组成的线圈被电刷 B 短路。

在图 11. 15 所示的位置，导体 P1 和 P3 中电流的方向为⊗，导体 P5 和 P6 中电流的方向为⊙。当转子旋转 π/2，转子的位置如图 11. 16 所示，导体 P1 和 P3 中电流的方向为⊙，同时导体 P5 和 P6 中电流的方向为⊗。因此，被电刷短路的绕组中的电流方向发生改变。在图 11. 8 中，短路的导体用更粗的线表示。

当线圈 P1 – P6 中存在较大感应电动势的情况，由于线圈的阻抗很小，将会产生很大的短路电流流过电刷。同样，P2 – P5 线圈中也会产生很大的短路电流流过电刷 B。短路电流的大小等于电动势和绕组等效阻抗的比值。线圈中短路电路增加了流过电刷总电流，因此，增加了电刷与换向片接触面积上的电流密度。过热将会使电刷与换向片之间产生电弧，换向片之间也会产生电弧。火花和电弧能够加速电刷的磨损甚至损坏换向器。如果换向不充分，电刷和换向片之间将会产生不会熄灭的电弧。在这种情况下，电刷和换向器将会过热，火花和电弧将会在电刷的附近区域产生相当数量的电离粒子流。在电刷和与之靠近的换向片之间将会产生一些电离气体。由于电机的旋转，电离气体也跟着向电刷 B 移动。当换向很差的时候，电刷 A 和 B 之间存在电弧。在这种状态称为环火，电刷和电源将会被短路。同时转子绕组也是短路状态，电机长期在这种存在环火的状态下运行存在将会对绕组和机械换向装置造成永久的损害，同时也会有起火的风险。

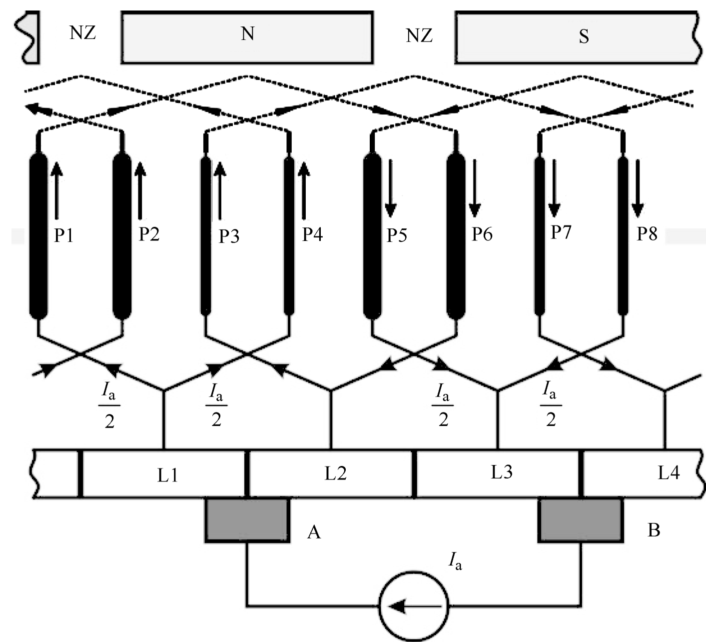


图 11.18　换向过程中换向片 L1 和 L2 短路

不充分的换向将会造成损耗的增大，换向器和电刷的损坏，可能导致环火并对电机造成永久的破坏。也正是因为这个原因，换向过程中被短路的绕组（如图 11.18 所示 P1 – P6 和 P2 – P5）中的感应电动势为零时是非常重要的。在图中的位置，相应的短路导体都处在电枢上的几何中心线附近或者称之为中性区（图 11.17 中标记为 NZ 的区域）。中性区处在转子圆柱面的上侧，与电刷相隔 π/2，中性区与定转子磁路相隔很远。

磁感应强度的径向方向有很大的磁阻。同时，定子磁动势不产生中性区径向磁场。因此，中性区的径向磁场分量很小，中性区转子导体中的感应电动势也很小。因此，换向过程中被短路线圈的感应电动势是可以被忽略的。

图 11.19 给出了电机沿磁场方向的截面图。磁力线从 N 极流出，经过转子磁路，最后汇入 S 极。设想有一部分磁力线穿过中心区中导体。磁力线方向与中性区导体移动的线速度方向相同。电场的方向由速度向量和磁场方向共同决定。速度向量和磁场方向共线，则它们所产生的向量是零向量，电场为零，从而导体中的感应电动势为零。因此，与导体移动方向平行的磁场分量不会在换向期间短路的绕组中产生感应电动势。

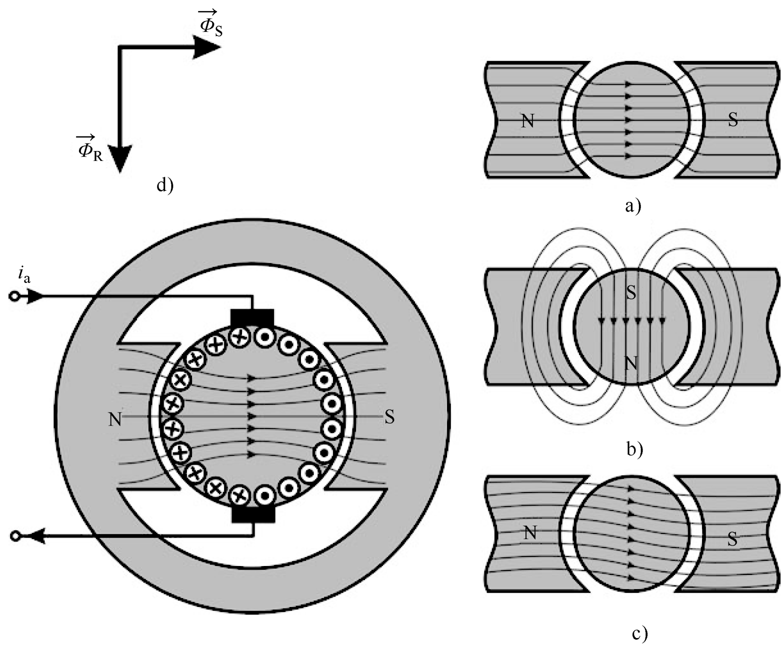


图 11.19 电枢反应和总磁通

导体 P3，P4，P7 和 P8 位于磁极下的区域，区域中磁感应强度径向分量非常大。因此，这些导体的感应电动势与转速、磁感应强度和导体长度成正比。线圈 P3 – P8 中，两根导体并不位于同一个磁极下，因此，两根导体中产生的感应电动势方向相反，因为导体是串联连接，所以电动势相互叠加。忽略电阻的压降，在换向片上 L2 和 L3 上产生的电压是导体中电动势的两倍。

要使换向过程中没有短路电流和火花，需要直流电机有相对较大的中性区，在中性区中，定子磁极产生的磁场不能在转子导体中产生感应电动势。转子导体的连接方式必须保证与被电刷短路的换向片相连的转子导体必须在中性区。当电刷接触两片换向片时造成导体短路。因此，磁极下的面积必须小于 π，这样才能在磁极两边留出中性区的空

间。因此，总是有一部分导体处于中性区。增加中性区的宽度能够使换向更加容易。同时，这将会减少磁极下导体的数量，磁极下的导体才能够实现机电能量转换和产生转矩。

问题（11.1）在图 11.18 中，短路线圈 P2-P5 和 P1-P6 包含位于中性区边缘的导体，这些导体同时也在磁极的边缘。分析短路绕组中因为磁极边缘产生感应电动势的风险。

解答（11.1）图 11.18 中，导体 P1，P2，P5 和 P6 在中性区的边缘，在磁极的附近。在这些导体所处的位置，磁感应强度的径向分量比中性区的中心要大。导体 P2 和 P5 组成了被电刷 B 短路的线圈。它们都处在 N 极的边缘，磁极边缘的磁感应强度要大于中心区的磁感应强度。由于 P2 和 P5 对称，P2 和 P5 处的磁感应强度的径向分量相同。因此，P2 和 P5 中感应电动势同方向，同大小。P2 和 P5 是串联连接，它们的电动势相互抵消。因此，线圈中的电动势大小为零。P2 和 P5 是关于 N 极对称的。短路线圈中的导体在任何情况下都是关于磁极对称的。在这样的对称导体中产生的感应电动势大小相等，方向相同，串接之后电动势相互抵消。同理，导体 P1 和 P6 串联连接之后电动势也为零。

11.11　转子磁场

转子磁动势使得中性区的磁感应强度增加。如图 11.19 中所示，图 11.19a 中绘制出了定子磁场，水平方向，图 11.19b 中绘制出了转子磁场方向，竖直方向。从图中可以看出，转子电流产生一个竖直方向上的磁通，磁极位于中性区——换向时该区域内的转子导体被电刷短路。

直流电机的转子也被称为电枢，得名于图 11.5b 中的转子导体外观。在相关的外文文献中，直流电机转子也被称为感应器。在转子导体中，电动势由转速和定子磁通诱导产生，且与转速和磁通成比例，因此称直流电机转子为感应器。流经电刷的电流I_a被称为电枢电路，电刷 A 和 B 之间的电压U_a被称为电枢电压。转子电流产生的磁动势和磁通被称为诱导反应或电枢反应。反应的意思是转子的电动势是由定子磁通激发产生的。同时，转子的电流受电动势的影响。因此，转子电流产生的磁动势被看成是对定子励磁的反应。定子磁通感应出转子导体中的电动势并影响转子电流的大小。因此，定子也被称为诱导器。

转子磁通相对较小。转子磁路发出的磁力线穿过中性区很长的气隙。因此，转子磁通通过的区域磁导率（μ_0）很小。因此中性区的磁感应强度很小，但是，即使是很小的磁感应强度也会对换向造成坏的影响。中性区的磁感应强度将会在换向过程中短路的导体中产生感应电动势。这些导体通过换向片和电刷短接。感应电动势将会在线圈中产生电流，短路电流会在电刷和换向片之间形成电弧。直流电机会用附加的元件去减小中性区的磁感应强度。直流电机中的补偿绕组和（辅助极）换向极用于抑制电枢反应。它们会使中性区的磁感应强度减小，确保换向时没有火花和电弧产生。

11.12 电路和磁路

电机的结构通常可以分为磁路和电路，后面将会把电路称为绕组。通常可以把电机的结构分为以下 4 部分：

1）定子磁路；

2）转子磁路；

3）定子电路；

4）转子电路。

图 11.20 是包含直流电机主要元件的截面图。图中没有绘制出先前章节已经详细介绍的换向装置。转子磁路 A 包括转子磁轭和转子齿。定子磁路包括磁极 B 和定子磁轭 C 和换向极 D。转子电路 F 包含转子槽中的导体。它们按照前面章节介绍的方法连接在一起。定子电路包括励磁绕组 G，补偿绕组 E，换向极绕组 H，这些元件的详细介绍和功能将在后面的章节讲述。

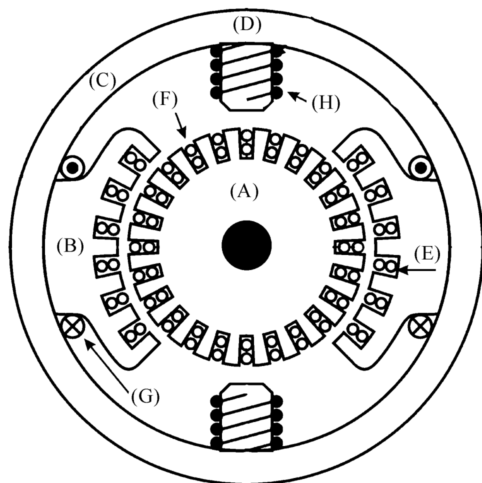


图 11.20 直流电机的结构

11.13 磁路

定子磁路包括主磁极、换向极和定子磁轭。主磁极产生定子磁通，或者称为励磁磁通。磁通从 N 极流出，穿过气隙，然后穿过转子，通过气隙进入 S 极后，通过定子磁轭回到 N 极。在定子磁极中，磁通不会改变路径和方向，因此，定子铁心中的磁感应强度是恒定的。因此，在铁心中没有损耗。定子磁路不需要用叠片构成，即没必要用叠压硅钢片。直流电机的铁心可以是实心结构。被用于减小中性区磁感应强度的换向极将在后面介绍。

转子磁路是一个圆柱形。转子磁通与定子是相对静止的。转子在定转子绕组共同产生的磁场中旋转。因此，转子磁场的方向与转子是相对旋转的。也就是说，在与转子同步旋转的观察者眼中，转子磁场的方向也是在旋转的。随着转子磁场的变化，转子中会产生涡流和铁损，磁场脉动的频率由转子的转速决定。磁场的变化在转子中产生磁滞损耗和涡流损耗，为了减小损耗，转子将由硅钢片叠压而成。转子叠片的形状如图 11.20 所示，在转子叠片的中心有一个圆洞，目的是为了使转轴从中穿过。圆柱形的转子有大量的叠片组成，每层叠片的厚度小于 1mm。

11.14　电路

定子电路包括励磁绕组、补偿绕组和换向极绕组。励磁绕组有N_f匝线圈。励磁电流产生励磁磁动势$F_f = N_f I_f$，所有与励磁绕组相关的参数下标为f，f代表磁场。励磁绕组产生直流电机的磁场。磁动势除以磁路的磁阻得到定子磁通Φ_f，称为励磁磁通。这个磁通等于磁感应强度在磁极表面的面积分。在图 11.19 和图 11.20 中，励磁磁场从左向右两次通过气隙，气隙宽度为δ。忽略H_{Fe}和在铁心中的磁压降，估算出主磁极下磁感应强度的大小。

$$B = \mu_0 N_f I_f (2\delta)$$

因此，通过改变励磁电流的大小可以改变励磁磁通的大小。除了励磁绕组，定子上还安装有补偿绕组和换向极绕组。

补偿绕组由安置在磁极内侧槽中的导体组成。补偿绕组按照导体中通过电流$I_f/2$的方式连接，转子导体中也存在相同大小的电流。补偿绕组的导体中的电流方向与转子电流方向相反。转子导体和补偿绕组的电流非常接近，它们产生的电动势相互抵消。因此，补偿绕组的电流补偿和抵消了转子电流的磁动势。这样做就可以减小中性区的感应电动势，从而减小换向过程中短路的转子绕组中短路电流。补偿绕组抵消了所有在磁极下转子导体产生的磁动势，并没有补偿在中性区中转子导体产生的磁动势。因此，换向极被安装在中性区的位置，目的是为了限制中性区的磁感应强度。换向极上安装有相关的绕组。

换向极上的绕组安装在换向极上，如图 11.20 所示。换向极下的气隙比主磁极下的气隙大很多。这样做是为了增大电枢反应磁路中的磁阻。换向极中的绕组电路与转子电流成比例。确定换向绕组的匝数和电流的方向，使换向极产生的磁场能够将未被补偿绕组抵消掉的电枢反应磁场抵消掉。通过补偿绕组和换向极的共同作用，就能够控制和减小中性区的磁感应强度。最终，中性区的磁感应强度将会被消减为零。关于换向过程详细的分析将不在本书中展开。更进一步的研究表明，线性换向能够减少电刷和换向片的应力和磨损。线性换向的意思是短路绕组中的电流在换向过程中在$+I_a$到$-I_a$的范围内线性变化。线性换向的先决条件是中性区的磁感应强度与I_a呈比例变化。换向过程的详细分析和设计补偿绕组和换向磁极绕组的方法超出了本书的研究范围。

转子绕组由转子槽中的导体和换向片相连组成，连接方式在先前的章节已经介绍。N_r根转子导体连接到换向片，在每一个时刻，电刷 A 和 B 之间有两条支路，每条支路由N_r根导体组成。转子绕组也被称为电枢绕组，通过电刷通入的外电源电流I_a称为电枢电流。术语诱导器代表定子，感应器代表转子。因为转子中的电动势是定子磁通诱导产生的。因此，励磁电流I_f也被称为诱导电流，电枢电流也被称为感应电流。在图 11.19d 中，转子磁动势和转子磁通被竖直方向的向量表示，转子磁动势可以被称为感应磁动势或者感应反应，转子磁通可以被称为感应磁通或者电枢反应。举一个直流发电机的例子用来说明专业术语电枢反应。电刷 A 和 B 与负载相连。电枢电流的大小等于转子电动

势的大小除以电路的等效阻抗。因此，电枢电流与感应电动势成比例。因此，转子电流、磁动势和磁通与定子励磁成比例。转子电流和磁通是定子励磁的显然反应，所以称为电枢反应。

问题（11.2）求解直流电机励磁磁通Φ_f。励磁电流为I_f，励磁绕组额匝数为N_f，电机的轴向长度为 L，转子半径 R，主磁极所占角度为 α，磁极下的气隙为 δ。

解答（11.2）励磁电流产生励磁电动势$F_f = N_f I_f$。励磁磁通穿过磁极、磁轭、转子，并两次穿过气隙。转子绕组中的磁场强度很小，因为铁的磁导率很高。可以假设只有在气隙中存在较大的磁场强度 H。因此，气隙中磁场的径向分量为 $H = N_f I_f/(2\delta)$。磁感应强度的径向分量为 $B = \mu_0 N_f I_f/(2\delta)$。磁感应强度是恒定值，因此，磁通就等于磁感应强度乘以面积。主磁极的面极为 $S = \alpha R \cdot L$，磁通$\Phi_f = \alpha R \cdot L \cdot \mu_0 \cdot N_f I_f/(2\delta)$。

问题（11.3）在先前介绍的电机中，转子导体中的电流为$I_a/2$。S 极和 N 极下都有 10 根导体，计算电机的转矩。

解答（11.3）磁感应强度在半径方向，与导体正交。电磁力与磁感应强度 B 和导体长度 l 成正比。因此，作用力在切向方向。每一根导体上里大小为 $F = LB\,I_a/2$。每根导体上的转矩为$T_1 = RF = RLB\,I_a/2$。只有磁极下的导体才会产生电磁力。中性区的导体不会产生电磁力，因为磁感应强度很小。因此，转子上的总电磁转矩为$T = 20T_1 = 20RF = 20 \cdot R \cdot L \cdot B \cdot I_a/2$。

问题（11.4）先前介绍的电机以Ω_m的角速度旋转。电刷不与外电路的电源相连，而是与电压表相连。转子的绕组有两条支路，计算电压表的读数。

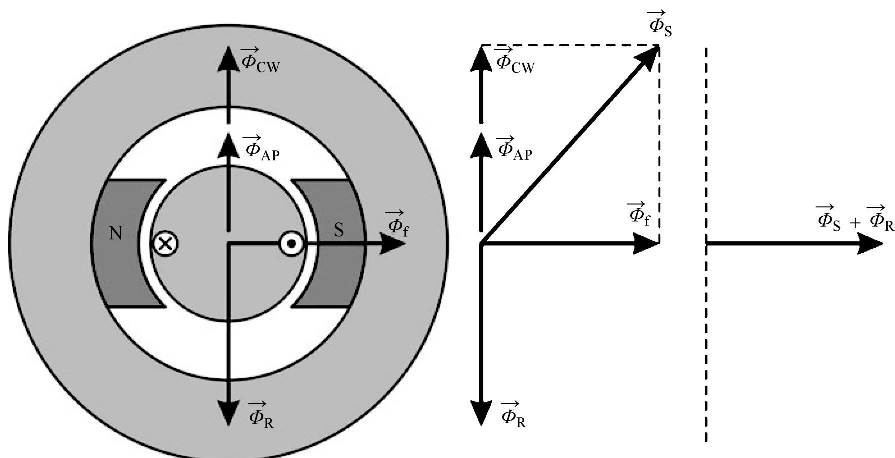
解答（11.4）导体的线速度为 $v = R\,\Omega_m$，主磁极下的每一根转子导体的感应电动势为$E_1 = L \cdot v \cdot B$。在中性区的导体中的磁感应强度可以忽略，因此，中性区中导体的感应电动势很小，可以被忽略。转子导体串联在一起，所以感应电动势相互叠加。在图 11.15，所有的导体串联成两条支路。P1，P6，P3，P8 串联在一起，端部和电刷串联。同时，P4，P7，P2，P5 串联在一起，端部和电刷串联。每条支流将按照将导体中电动势叠加的方式串联在一起。问题中，有 20 根导体的感应电动势为E_1，即，$10 \cdot L \cdot v \cdot \Omega_m \cdot B$。

11.15　直轴和交轴

定子磁通被称为励磁磁通或者诱导磁通。励磁绕组的轴线被称为直轴。在先前的图中，直轴是水平方向。直轴由主磁极的位置确定。在图 11.19 和图 11.20 中，电枢反应的方向为竖直方向。转子电流按左半部分的电流流入，右半部分的电流流出的方式分布。因此，转子的磁动势或者磁通在竖直方向。电枢反应的轴线被称为交轴。

定子换向极安装在交轴上，补偿电枢反应。同时，还有补偿绕组安装在磁极边并通入与转子导体反向的电流用于产生磁动势补偿电枢反应。换向极和补偿绕组的作用就是为了使中性区的交轴上的磁感应强度减小到零。补偿绕组抵消了主磁极下导体的磁动势，换向极抵消了中性区导体的磁动势。通过补偿绕组和换向极的共同作用，中性区的

磁感应强度很小。图 11.21 绘制出了定转子的磁通向量。转子交轴上的磁通被定子的磁通抵消。



a) 一匝线圈产生的磁通势向量的位置　b) 定、转子合成磁势向量　c) 电机的总磁通向量

图 11.21　定转子磁通向量的表达式

11.15.1　矢量表示

转子磁通也被称为电枢反应，在图 11.21 中用Φ_R表示。在交轴上，换向极的磁通用Φ_{AP}表示，补偿绕组的磁通用Φ_{CW}表示。电机的直轴处于水平方向，交轴处于竖直方向。Φ_{AP}，Φ_{CW}的方向与转子磁通Φ_R的方向相反。这是为了减小中性区的磁感应强度，有利于换向。换句话说，减小交轴方向的磁通是有必要的。最理想的情况是补偿绕组和换向极的磁通相互抵消。前面已经讲过，补偿绕组的导体在磁极的边缘并与转子导体间隔着一层气隙，补偿绕组的导体中通入与转子导体同大小且反向的电流，因此，补偿绕组能有效地抵消磁极下转子导体的感应电动势。换向极可以抵消中性区中导体产生的磁动势。

11.15.2　定子总磁通

图 11.21a 绘制出了代表定转子绕组产生的磁通。图 11.21b 绘制出了合成磁通。转子只有一匝线圈。因此，合成转子磁通与电枢反应相同，为Φ_R。转子有三种绕组：励磁绕组、补偿绕组、换向极绕组。定子的总磁通Φ_S是上述绕组产生磁通的矢量和。

11.15.3　电机中的总磁通

电机的总磁通等于电机中所有绕组产生的磁通的矢量和。因此，总磁通等于定转子

磁通的矢量和。当Φ_{AP}，Φ_{CW}补偿掉了电枢反应，交轴的总磁通为零，直轴的总磁通为Φ_f，如图 11.21c 所示。

问题（11.5）：图 11.21 表明换向极磁通和辅助绕组的磁通与转子磁通Φ_R完全抵消。因为换向极磁通和辅助绕组的合成磁通$\Phi_{AP}+\Phi_{CW}$在转子磁通Φ_R的反方向且幅值相等。因此，总磁通在交轴方向的分量为零。在先前的章节，电磁转矩是定转子磁通向量的产物。交轴方向上总磁通分量为零会导致转矩为零吗？

解答（11.5）：转矩的大小由定转子磁通向量的乘积决定。转子磁通Φ_R代表电机转子绕组产生的磁通。Φ_S代表定子绕组产生的磁通。在转子绕组只有一匝的电机中，转子磁通Φ_R等于电枢反应磁通。定子有三种绕组，因此，定子的总磁通Φ_S是三种绕组产生磁通的矢量和。换向极和辅助绕组中的电流产生了定子磁通的交轴分量，大小与转子磁通相同，方向相反。换向极和辅助绕组中的合成磁通是$-\Phi_R$。因此，电机的交轴合成磁通为零。值得注意的是电机的总磁通是电机定转子所有绕组产生磁通的矢量和。即使总磁通的交轴分量为零，转子绕组产生的磁通也是存在的。电机仍然能够产生电磁转矩。转矩的大小由定转子磁通向量决定，Φ_R和Φ_S，如图 11.21b 所示。这两个向量的夹角不再是 $\pi/2$，但是夹角的正弦值不为零，因此，考虑这个情况，转矩假设为非零。转矩可以看成定子磁链直轴分量Φ_f和转子磁通Φ_R的产物。因此，总磁通的交轴分量为零，电磁转矩也不为零。

11.16 电动势和电磁转矩

更深的研究需要我们根据电机磁通、电流和速度计算出电机的电动力和电磁转矩。为了推导直流电机的稳态等效电路和机械特性，推导出转矩和电动力的表达式是必不可少的。电动势E_a表示电枢绕组的电动势或者称为转子电动势，当电枢I_a为零时，用直流电压表在电刷之间测得电压就是电动势E_a。电动力和电磁转矩可以由绕组电流、励磁磁通、角速度、转子速度和其他电机参数表示。

11.16.1 电枢绕组中的电动势

主磁极下，每一根导体中的电动势$E_1=R\cdot\Omega_m\cdot B\cdot L$表示，其中$\Omega_m$表示角速度，$R$是转子半径，$L$是转子的轴向长度，$B$是主磁极下径向磁感应强度。在中性区，磁感应强度很小，因此电动势为零。

南北极下导体中电动势方向相反，因此，随着电机的旋转，单根导体中的电动势会周期性变化。电动势变化的频率由转子转速决定。如图 11.12b 中所示，转子导体中的电动势波形类似方波，方波的幅值为E_1，当转子从北极移动到南极或者从南极移动到北极时电动势改变方向。后面将会介绍转子的相互连接以及换向片如何将电动势叠加在电刷 A 与 B 之间。机械换向器将单根导体中的交变磁动势转换为电刷之间的直流电压。

转子导体被分为两个支路，每一条直流都并联在电刷之间。随着转子移动，转子导体在主磁极下移动。同时，导体从一条支路移动到另一条支路，即，导体在超过半个周期的

时间内不可能在同一支路。在下半周期，同样的导体出现在另一条支路。图 11.23a绘制出了图 11.22 中转子的导体连接图，电刷与换向片 L1 相连。电刷 A 和 B 之间存在两条支路 P1 – P6 – P3 – P8 和 P4 – P7 – P2 – P5。每条支路的合成电动势大小为E_a，即电枢电动势。当电枢电流$I_a=0$时，电刷之间的电压U_a与E_a相等。在图 11.22 和图 11.23 所示的位置中，同处在北极下的导体 P1，P2，P3，P4 电动势同向。处于南极下的导体 P5，P6，P7，P8 中的电动势与前面导体电动势方向相反。对于图 11.22 和图 11.23 中的支路 P1 – P6 – P3 – P8，导体的电动势相互叠加，总电动势为 $E_a=4E_1$。

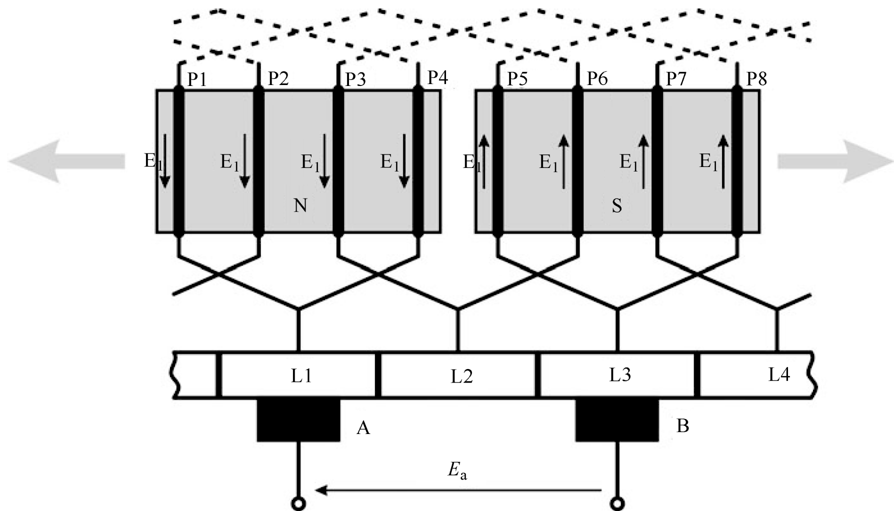
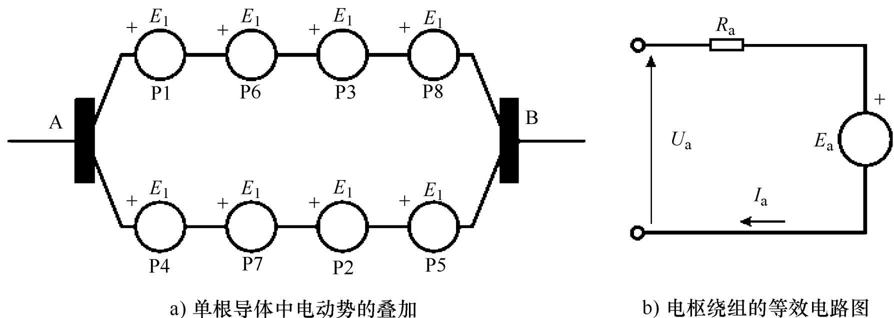


图 11.22　电动势E_a的计算



a) 单根导体中电动势的叠加　　b) 电枢绕组的等效电路图

图　11.23

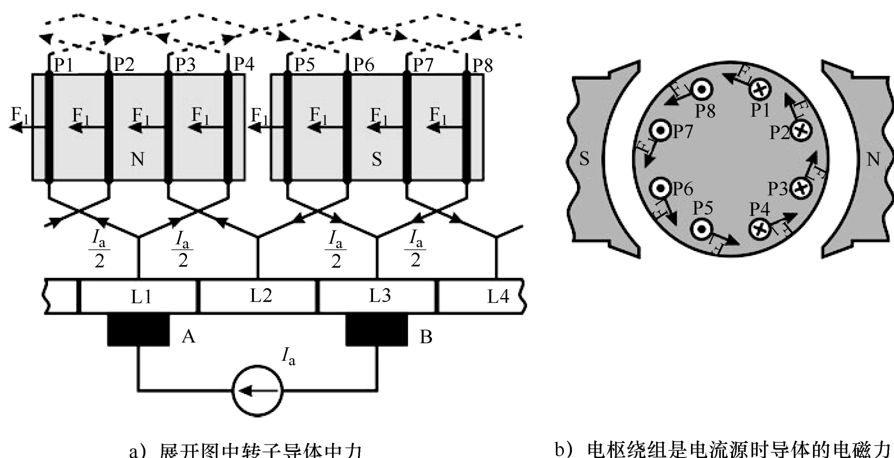
值得注意的是E_a是一个直流量，电机的旋转不会导致E_a方向的改变。当转子相较于图 11.22 中的位置旋转 π/4 时，电刷 A 和 B 会与换向片 L2 和 L4 连接，如图 11.16 所示。在新的位置下，处于北极下的导体 P3，P4，P5，P6 中产生的感应电动势同方向。

处于南极下的导体 P7，P8，P1，P2 中产生的感应电动势与导体 P3，P4，P5，P6 中产生的电动势方向相反。同时，转子回路发生变化。如图 11. 16，导体 P3，P8，P5，P2 组成一条支路，导体 P6，P1，P4，P7 组成另一条支路。图中表明导体的连接方式使得电动势相互叠加，因此电动势$E_a = 4E_1$保持不变，A 的电势比 B 高。换句话说，即使转子旋转，电刷 A 与 B 之间的电压不变。这表明机械换向器起到了整流器的作用，将交流电动势转变为直流电动势E_a。E_a被称为转子或电枢电动势。

电刷 A 和 B 与外界的电阻或者其他的直流用电器相连，图 11. 23 中的电机作发电机运行，向外界提供电能。转子的旋转需要外部转矩的驱动，该转矩可由水轮机、汽轮机、内燃机旋转产生。电枢绕组端电压为U_a。等效电路图如图 11. 23b 所示。空载时，电刷电压等于电动势$E_a = 4E_1 = 4R\Omega_m BL$。等效电压源的内电阻$R_a$包括电刷 A 与 B 之间的内阻，转子导体电阻，和一个相对较小的换向片电阻。当转子转速为零，内阻R_a可以由电刷两端测得。此时电动势等于零，等效电压源电压降低为内阻 R_a 上的电压。在有 8 根转子导体的电机中，转子可分为两条支路，每条支路 4 根导体。电阻$R_a = 2R_1 + \Delta R$，R_1为每根导体的电阻，ΔR 为电刷与换向片的等效电阻。因此，电枢的电压可以由一个由空载电动势 E_a 和内阻 R_a 组成的电压源等效。

11. 16. 2 转矩的合成

这一章节需要确定电磁转矩、励磁磁通、电枢电流之间的关系。励磁磁通通过气隙进入转子磁路。主磁极的与气隙接触的表面是一个扇形曲面。表面积 $S = WL$，L 是电机轴向长度，$W = \alpha R$ 是磁极面积。磁感应强度 B 的大小等于励磁磁通Φ_f和表面积的比值。转子导体的电流为$I_a/2$，I_a是电枢电流，外电路提供，由电刷流经转子。图 11. 24a 给出了转子绕组的展开图和导体上的电磁力。图 11. 24b 给出了从电机的前部观察电流的方向。在给定的转子位置，导体 P1，P2，P3，P4 在北极下，电流方向为⊗，磁力线从磁



a）展开图中转子导体中力

b）电枢绕组是电流源时导体的电磁力

图 11. 24

极发出，指向转子磁路。在北极下，磁感应强度的径向分量与电流方向⊗垂直，按照左手定则，它们将产生一个切向力F_1。在南极下，导体中电流的方向改变。同时，磁场方向变化，因此，电动力的方向不变。南北极下的导体中的切向力F_1都是逆时针方向。

各电磁力合成电磁转矩。每个力臂为 R，每一根导体中的电磁转矩为$T_1 = R F_1 = RLB I_a/2$，总导体数为 8，总的电磁转矩为$T = 8T_1 = 8RF_1 = 8RLBI_a/2 = 2DL I_a \Phi_f/S$，$D$ 为转子直径，L 为电机轴向长度，I_a为电枢电流，Φ_f励磁磁通，S 为主磁通下面积。

11.16.3　转矩和电动势的表达式

在这一章，转子感应电动势E_a由转速和励磁磁通表示。电磁转矩T_{em}由励磁磁通和电枢电流表示。首先，我们要推导出气隙中磁场强度和励磁电流、励磁磁通的关系。

图 11.25 绘制出了主磁极的几何外形图。导体中的电动势取决于导体的位置。转子导体安装在转子磁路的外表面。因此需首先计算出气隙中磁感应强度。气隙的宽度 δ 远远小于转子的半径 R。利用磁场的边界条件划分铁磁材料与气隙。根据磁场的边界条件，气隙侧的表面磁感应强度的方向为径向。主磁极的磁通面积为 $S = WL$，$W = \alpha D/2$ 为主磁板宽度，α 是从转子轴向观察磁极所占的角度。励磁磁通通过定转子磁路，H_{Fe}很小 。励磁磁通两次通过气隙，因此

$$F = N_f I_f = 2\delta H_f \tag{11.2}$$

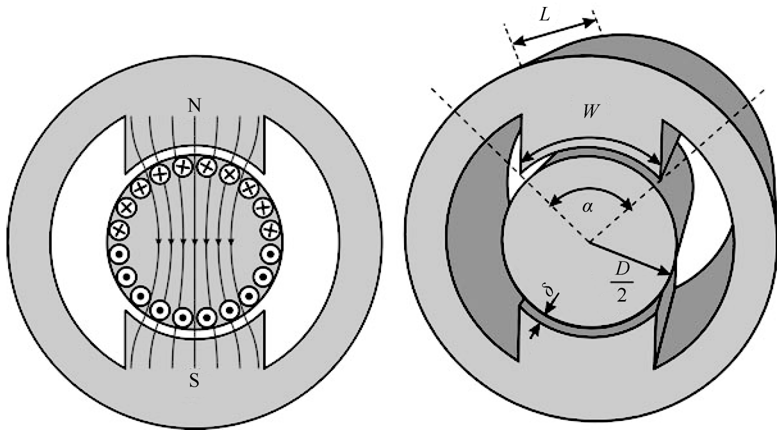


图 11.25　主磁极的几何外形

其中 $F = N_f I_f$ 是励磁绕组的磁动势，H_f 是主磁极下磁场强度。气隙中磁感应强度 B_f 可以通过下面的等式计算。

$$B_f = \mu_0 H_f = \mu_0 \frac{N_f I_f}{2\delta} \tag{11.3}$$

主磁极下的气隙中磁感应强度处处相等，因此，励磁磁通等于磁感应强度的面积分。

$$\Phi_{f} = SB_{f} = LW\mu_{0}H_{f} = \mu_{0} \cdot \frac{LWN_{f}I_{f}}{2\delta} \tag{11.4}$$

$W = \alpha D/2$ 为主磁极的宽度，励磁磁通经过的磁路的磁阻 R_{μ} 等于励磁磁动势 F_{f}与磁通 Φ_{f} 的比值。

$$R_{\mu} = \frac{F_{f}}{\Phi_{f}} = \frac{2\delta}{\mu_{0}LW} \tag{11.5}$$

总励磁磁通为 $\Psi_{f} = N_{f}\Phi_{f}$，励磁绕组的阻抗 L_{f} 是总磁通 Ψ_{f} 与励磁电流 I_{f} 的比值，可以由下面的表达式决定。

$$L_{f} = \frac{\Psi_{f}}{I_{f}} = \mu_{0}\frac{LWN_{f}^{2}}{2\delta} = \frac{N_{f}^{2}}{R_{\mu}} \tag{11.6}$$

单匝线圈中的磁通与励磁电流的比值为

$$L_{f}' = \frac{\Phi_{f}}{I_{f}} = \mu_{0}\frac{LWN_{f}}{2\delta} = \frac{L_{f}}{N_{f}} \tag{11.7}$$

转子导体的总数为 N_{R}，但是，不是所有的绕组都在主磁极下，它们有一部分位于中性区中。在主磁极下的导体所处磁场的磁感应强度为 B_{f}。在中性区中，导体不会产生任何电动势和电磁力。转子导体沿着转子外圈排列，在北极的磁极的面积为 W，有 $N_{R}W/(\pi D)$根导体。南极下导体数量相同。

11.16.4 电动势 E_{a}的计算

在定子磁极下的转子中的感应磁动势 E_{1} 为：

$$E_{1} = B_{f}Lv = B_{f}LR\Omega_{m} \tag{11.8}$$

v 是转子转速，Ω_{m} 是转子角速度，R 是转子半径。转子导体按照转子电动势叠加的方式串联连接。位于南北极下的导体总数为 $2N_{R}W/(\pi D)$。所有的导体分为两条并联支路，支路的端口与电刷相连。电动势 E_{a} 等于支路中电动势的总和。因此，E_{a} 可以由每根导体中电动势 E_{1} 和每极下转子导体数计算得出。

$$E_{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{2N_{R}W}{\pi D}\right)E_{1} = \frac{N_{R}W}{2\pi R}B_{f}LR\Omega_{m} = \frac{N_{R}}{2\pi}(LWB_{f})\Omega_{m} \tag{11.9}$$

利用等式（11.4），E_{a} 可以表示为

$$E_{a} = \frac{N_{R}}{2\pi}\Phi_{f}\Omega_{m} = k_{e}\Phi_{f}\Omega_{m} \tag{11.10}$$

其中 $k_{e} = N_{R}/2\pi$ 由转子导体数决定，被称为电动势常数。

11.16.5 转矩的计算

在主磁极下每一根导体中电磁力为如下

$$F_{1} = L\frac{I_{a}}{2}B_{f} = \frac{\Phi_{f}}{WL} \cdot \frac{I_{a}}{2} \cdot L = \frac{\Phi_{f}}{W} \cdot \frac{I_{a}}{2} \tag{11.11}$$

力臂的大小为 $R = D/2$，主磁极下每一根导体中的转矩为$T_{1} = F_{1}D/2$。由于只有主

磁极下的导体会产生力 F_1，这些导体的总数为 $2N_RW/(\pi D)$。则总电磁转矩如下

$$T_{em} = \left(\frac{2N_RW}{\pi D}\right)T_1 = \frac{2N_RW}{\pi D} \times \frac{D}{2} \times \frac{\Phi_f}{W} \times \frac{I_a}{2}$$
$$= \frac{N_R}{2\pi}\Phi_f I_A = k_m \Phi_f I_A \tag{11.12}$$

其中 $k_m = N_R/2\pi$ 是电机的转矩系数。

方程（11.10）表明电枢绕组的电动力由励磁磁通和转子转速决定。方程（11.12）表明电磁转矩由励磁磁通和电枢电流决定。

第 12 章　直流电机的建模与应用

本章将介绍并给出电励磁和永磁体励磁的直流电机数学模型、转矩控制的控制框图以及电枢和励磁绕组的稳态等效电路。这些电路用于介绍和分析他励直流电机的特性和稳态的转子速度。本章介绍了控制电机转速的基本条件以及直流发电机的稳态运行和基本输出特性。根据直流电机的转速和转矩特性可将其应用领域划分为 $T_{em}-\Omega_m$ 的四个象限。在四象限图中，最基本的要求是区分电枢绕组能量的来源。简单介绍了开关电源转换器中的 H 桥电路和脉宽调制的基本概念。我们将研究电枢电流的脉动来研究开关电源对于电机运行的影响。本章将全面介绍最常用的开关电源转换器结构。

基于电机的数学模型分析电机的电气和机械特性。该模型包含了电机暂态过程的微分方程和代数关系。在直流电机中，励磁磁通在直轴方向，转子磁链在交轴方向。直轴和交轴正交，励磁绕组和电枢绕组的互感为零㊀。也就是说励磁绕组的电流不会直接影响转子磁链。同时，转子电流的变化不会影响励磁磁通。直轴和交轴之间不存在相互影响使得直轴和交轴的电磁暂态现象相互解耦。电枢绕组的暂态变化不会影响㊁励磁绕组。因此，描述励磁磁通和励磁电流之间关系的微分方程中没有转子磁通和电流。因此，直流电机的数学模型相当的简洁明了。磁通控制环路与转矩控制环路没有耦合，设计和应用更加直接。

建立模型的电机外电压为u_a，提供给电枢绕组，励磁绕组的电压为u_f。直流电机与外电源和负载的连接如图 12. 1 所示。u_a和u_f表示绕组电压的瞬时值。在稳态，这些量用

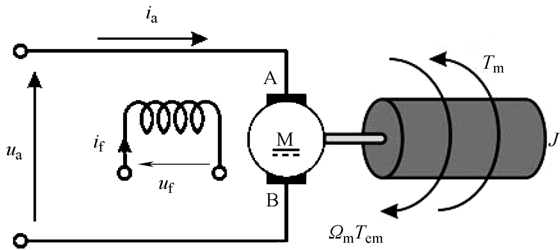


图 12. 1　直流电机与电源和负载的连接

㊀ 磁路线性时，正交绕组的互感为零。磁路线性就是磁路不饱和。两个正交轴的一个轴上的磁通会影响铁磁材料的非线性磁化曲线上的工作点（B，H），从而影响另一个轴的磁阻和磁通。励磁磁力线和转子磁力线经过同一个磁路。正交的磁通通过转子和定子的同样的铁磁材料。正交磁通中的磁通会改变铁磁材料的饱和程度，间接的影响其他磁通。公共磁路的非线性使得正交轴上磁通耦合在一起。

㊁ 由于铁磁材料的非线性，磁路会饱和。电枢电流引起的磁路的饱和会改变励磁磁路的磁阻。通过这种间接影响（称为交叉饱和），电枢电压会影响励磁磁通。

U_a和U_f表示。电机旋转的角速度为Ω_m，转动惯量为 J，它被电磁转矩T_{em}和负载转矩T_m加速或者减速。电磁转矩和负载转矩反向，它们在图中标出。

直流电机的暂态现象可以用一系列的微分方程表示，微分方程构成了数学模型。由前面的结论可知，数学模型包括：

1）绕组的电压平衡方程；

2）描述转动惯量变化的微分方程（牛顿方程）；

3）磁通和电流的代数方程组；

4）电磁转矩的表达式。

除了特殊说明，本书中的模型做了 4 点假设：

1）忽略寄生电容，忽略电场的能量。

2）忽略磁场的空间分布。假设磁场集中在分立的元件中，例如阻抗。因此，等效电路是集中参数网络。

3）忽略磁路的损耗（例如铁耗）。

4）忽略磁路的非线性，即磁路不饱和。

12.1　励磁绕组的电压平衡方程

交轴上的转子磁动势由转子导体产生。励磁磁动势不会影响励磁磁通。因此，励磁绕组磁通瞬时值 $\Psi_f = N_f\Phi_f = L_f i_f$。利用电流、磁通和电压进行进一步研究。$i_f$ 表示励磁绕组中的电流，其瞬时值为 $i_f(t)$。为了书写简洁，$i_f(t)$简写为 i_f，小写表示的量为时变量。

方程（11.6）给出了励磁绕组的自感系数。励磁绕组电阻 R_f，励磁绕组的电压平衡方程如下：

$$\mu_f = R_f i_f + \frac{d\Psi_f}{dt} = R_f i_f + L_f\frac{di_f}{dt} \tag{12.1}$$

励磁磁通 Φ_f 为主极磁通。同时，Φ_f 是流过一匝绕组的磁通。励磁磁通与励磁电流成比例。由方程（11.7），励磁磁通可以表示为：

$$\Phi_f = L'_f i_f = \left(\frac{L_f}{N_f}\right) i_f \tag{12.2}$$

因此，励磁绕组能够由 $R-L$ 电路表示，如图 12.2 左图所示。当直流电压 U_f 施加在励磁绕组的两端，励磁绕组电流按指数规律上升到稳态时，$i_f(\infty) = I_f = U_f/R_f$。励磁电流初值为 $i_f(0)$，励磁电压为 $u_f(t) = U_f(t>0)$时，励磁电流的瞬时值为

$$i_f = i_f(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + i_f(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{U_f}{R_f}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{12.3}$$

其中，$\tau = L_f/R_f$ 是励磁绕组的时间常数。在稳态时，励磁磁通和励磁绕组中电压的关系如下：

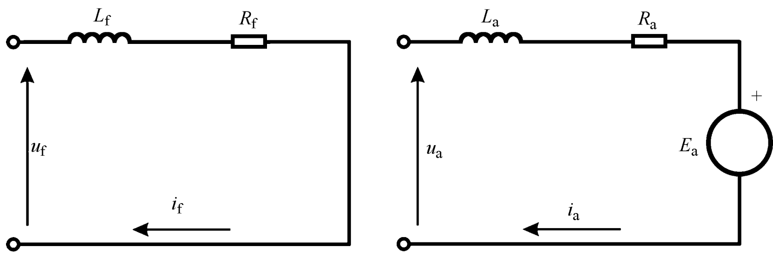


图 12.2　励磁绕组的电压平衡（左）和电枢绕组的电压平衡（右）

$$\Phi_f = L'_f I_f = L'_f \frac{U_f}{R_f} \tag{12.4}$$

问题（12.1）：求出直流电机励磁绕组的时间常数。已知磁极面积 $S=0.01\text{m}^2$，气隙宽度 $\delta=1\text{mm}$，$N_f=4\ 000$，励磁绕组的电阻 $R_f=400\Omega$。

解答（12.1）：

励磁磁通的磁阻等于

$$R_\mu = \frac{2\delta}{\mu_0 S} = 159155\text{H}^{-1}$$

励磁绕组的阻抗等于

$$L_f = \frac{N_f^2}{R_\mu} = 1005\text{H}$$

励磁绕组的时间常数等于

$$\tau = \frac{L_f}{R_f} = 0.251\text{s}$$

12.2　电枢绕组的电压平衡方程

在电刷 A 与 B 之间有两条支路 。电枢绕组的等效电阻为 $R_a = N_R R_1/4 + \Delta R$，能在电机静止状态下从电刷两端测出。转子导体总数为 N_R，单根导体的电阻为 R_1。换向装置（包括电刷和换向器）的等效电阻为 ΔR。转子绕组的自感为 L_a。转子导体中的电流产生转子磁动势称为电枢反应。因此，转子磁通等于转子磁动势除以磁阻 R_μ。由于转子磁通通过的中性区的气隙很大，所以转子磁路磁阻很大。电枢电感等于转子线圈匝数的平方与磁阻的比值。转子磁通的磁阻要比励磁磁通的磁阻大很多。如果励磁磁路中的气隙 δ 小，则转子磁路经过换向极下的气隙大。由于小电机没有换向极，因此，小电机的转子磁路的在交轴方向上的磁阻非常大。在大部分电机中，励磁绕组的匝数要比转子绕组的匝数多，因此，电枢电感 L_a 比励磁电感 L_f 要小 2 到 3 个数量级。在导体中 ，电流变化率$\frac{\text{d}i}{\text{d}t} \sim \frac{u}{L}$，与电压成正比，与电感成反比。因此，电枢电流的变化率比励磁电流

的变化率高 2 到 3 个数量级。

问题（12.2）：求出等效电阻 R_a，已知导体匝数为 $N_R=40$，每根导体的电阻为 0.1Ω，机械换向器和电刷之间的等效电阻为 $\Delta R=0.2\Omega$。求出转子绕组的自感 L_a，已知转子磁通通过的面积为 $S=0.1\mathrm{m}^2$，转子和定子在中性区的气隙宽度为 $d=20\mathrm{mm}$。求出电枢绕组的时间常数。

解答（12.2）：

电枢绕组的电阻 $R_a=0.1\Omega\cdot 40/4+0.2\Omega=1.2\Omega$

转子磁通通过的磁路磁阻 $R_\mu=\dfrac{2d}{\mu_0 S}=318310\mathrm{H}^{-1}$

电枢绕组有 20 匝线圈，电枢绕组的电感 $L_a=\dfrac{20^2}{R_\mu}=1.256\mathrm{mH}$

励磁绕组的时间常数 $\tau_a=\dfrac{L_a}{R_a}=1.047\mathrm{ms}$

考虑电阻 R_a 和电感 L_a 上的压降，转子上的感应电动势为 E_a，与转子速度 Ω_m 和励磁磁通 Φ_f 成比例。电枢绕组的电压平衡方程如下：

$$u_a=R_a i_a+L_a\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t}+E_a=R_a i_a+L_a\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t}+k_e\Phi_f\Omega_m \tag{12.5}$$

电枢绕组的等效电路在图 12.2 右图中给出。在稳态时，电流不会变化。电流的导数为零。从（12.5）中推导出：

$$U_a=R_a I_a+E_a=R_a i_a+k_e\Phi_f\Omega_m \tag{12.6}$$

电机的模型还包括前面章节中推导出的电动势和电磁转矩的表达式：

$$E_a=k_e\Phi_f\Omega_m,T_{em}=k_m\Phi_f i_A \tag{12.7}$$
$$k_m=N_R/2\pi,k_e=N_R/2\pi$$

12.3　转子速度的变化

除了建立绕组的暂态模型（它表示电气子系统），对电机的机械子系统建模和推导出描述转速变化的微分方程是必要的。转子通过轴把工作机和驱动机耦合在一起。所有旋转部分的转动惯量用 J 表示。它包括转子、轴、工作机、连接部件、传动元件和所有随转子运动的元件。转子的转速由以下几点决定：

1）电磁转矩 T_{em}；

2）摩擦转矩 $k_F\Omega_m$；

3）负载转矩 T_m；

4）惯性转矩 $J\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$。

根据图 12.1 中的标示，电磁转矩的参考方向为正，即电磁转矩的作用是增加电机的转速。负载转矩代表阻碍电机转动的机械负载，参考方向为负，作用是减小电机转速。摩擦转矩阻碍电机的转动，参考方向为负。惯性转矩 $J\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$ 代表转速改变和提供

加速度 $\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{m}}/\mathrm{d}t$ 需要的转矩。方程（12.8）表述了上述转矩分量的平衡。方程（12.8）是牛顿第二定律在旋转运动中的应用。摩擦转矩是电磁转矩和负载转矩的二阶无穷小量，通常被忽略：

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=T_{\mathrm{em}}-T_{\mathrm{em}}-k_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathrm{m}} \tag{12.8}$$

12.4 数学模型

前面推导的方程组成了电机的数学模型。这个模型为动态模型，可以用于分析电机的暂态过程和稳态过程。

励磁绕组的电压平衡方程：

$$\mu_{\mathrm{f}}=R_{\mathrm{f}}i_{\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}t}=R_{\mathrm{f}}i_{\mathrm{f}}+L_{\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}t}$$

电枢绕组的电压平衡方程：

$$u_{\mathrm{a}}=R_{\mathrm{a}}i_{\mathrm{a}}+L_{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}+E_{\mathrm{a}}$$

电动力和转矩的表达式：

$$E_{\mathrm{a}}=k_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{f}}\Omega_{\mathrm{m}},T_{\mathrm{em}}=k_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{f}}i_{\mathrm{a}}$$

励磁电流和励磁磁通的关系：

$$\Phi_{\mathrm{f}}=L_{\mathrm{f}}'i_{\mathrm{f}}$$

牛顿方程：

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=T_{\mathrm{em}}-T_{\mathrm{m}}-k_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathrm{m}}$$

12.5 永磁直流电机

图 11.1 所示为励磁绕组直线电机和永磁电机的截面图。励磁磁通是由励磁电流引起的磁动势产生，方向为直轴方向。电机可以没有励磁绕组，而由永磁体提供励磁。采用永磁体励磁的优点是不需要励磁绕组，也不需要对直流电机单独励磁，同时，由于没有励磁绕组的铜耗，电机的效率也会更高。永磁直流电机的缺点是励磁磁通不能调节。磁通由磁体的 $B(H)$ 特性和磁路的磁阻决定。磁通与永磁体的剩余磁感应强度紧密相关。因此，永磁直流电机不适合改变磁通的场合。在可以改变励磁磁通的场合，励磁磁通随着励磁线圈中的电压和电流变化。

永磁直流电机的数学模型中将没有前面推导的直流电机数学模型中的一组微分方程，因为磁通 Φ_{f} 是常数，由磁体的特点决定。直流永磁电机中没有励磁绕组，因此，励磁绕组的电压平衡方程将不存在。

12.6　模型的框图

直流电机的数学模型可以由方框图表示，如图 12.3 所示。图中单独的模块是通过微分方程拉普拉斯变换之后获得的。例如，励磁绕组的电压平衡方程的时域表达式：

$$\mu_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

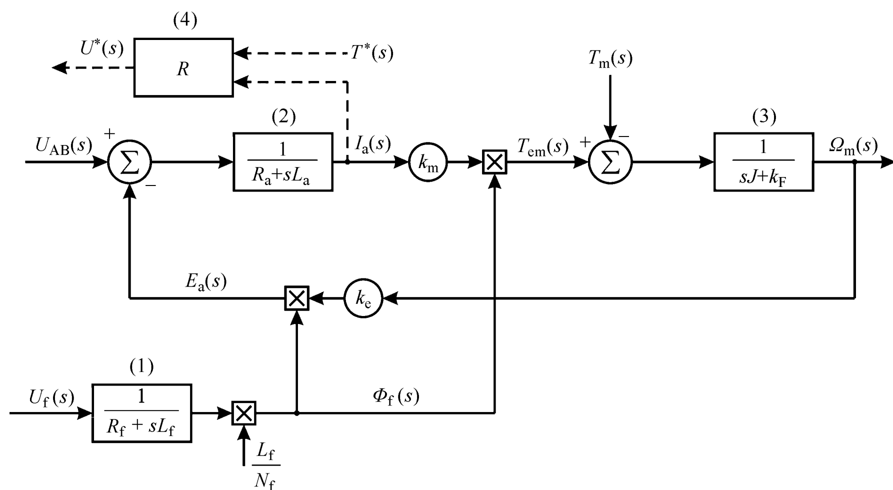


图 12.3　直流电机的框图

对微分方程应用拉普拉斯变换可以得到包含励磁电压复变量和励磁电流复变量的代数方程：

$$U_f(s) = R_f I_f(s) + sL_f I_f(s) - i_f(0)$$

s 是拉普拉斯算子，$U_f(s)$ 和 $I_f(s)$ 是原始 $\mu_f(t)$ 和 $i_f(t)$ 的复变量。假定励磁电流的初始电流 $i_f(0) = 0$，等式变为

$$U_f(s) = (R_f + sL_f) I_f(s) \tag{12.9}$$

励磁绕组是一个输入为励磁电压的子系统。励磁电压是一个控制量，决定励磁电流的大小。励磁电流是励磁电压的结果和反应。因此，电压是控制输入，电流是输出。在前面等式的基础上，图 12.3 中的方框（1）的传递函数为 $I_f(s)/U_f(s) = 1/(R_f + sL_f)$，方框（2）代表电枢的传递函数，方框（3）代表牛顿微分方程。

直流电机的转矩和磁通取决于励磁电压和电枢电压，如左边的框图所示。励磁电流和磁通取决于励磁电压，按照传递函数 $I_f(s)/U_f(s) = 1/(R_f + sL_f)$ 变化。电气时间常数 $\tau_f = L_f/R_f$ 的范围在 200ms 和 10s 之间。电流的变化取决于外电压与感应电势的差值 $(U_a - E_a)$。当 $U_a - E_a - R_a i_a(t) > 0$，电流的变化 $di_a(t)/dt$ 为正；否则，电流的变化为

负。电枢绕组的时间常数 $\tau_a = L_a / R_a$ 在 1ms 和 100ms 之间。

励磁电压和电枢电压是系统的输入。它们是影响直流电机状态的控制变量。电枢电流、励磁电流和转子转速是研究动力系统的状态量。状态量是对外部控制变量的反应。电枢电流、励磁磁通、电磁转矩和转子转速是系统的输出。

电磁转矩 T_{em}是励磁磁通、电枢电流与常数 k_m 的乘积。转矩 T_{em}是机械子系统的输入，决定转速变化。当电磁转矩超过了所有的制动转矩时，转速上升。当电磁转矩与所有制动转矩 $T_{em} + k_F\Omega_m$ 的大小相等时，转子速度保持恒定。当电磁转矩小于所有制动转矩，转子减速。值得注意的是，方框（3）代表摩擦转矩 $k_F\Omega_m$。摩擦转矩通常比额定转矩小两个数量级。因此，摩擦通常被忽略，传递函数表示为 $1/(Js)$。

12.7 转矩控制

图 12.3 中方框（4）标记为 R，它不属于直流电机的数学模型。这个方框的连接用虚线表示。这个模块表示控制直流电机转矩的可能性。直流电机通常用于运动控制领域，它提供了自动生产线中控制转速和位置的工具。它们通常用于带动电梯、输送机等类似的设备。在控制任务中，电机通常要提供可变的转矩值 T_{em}，这个转矩值与运动控制器（图中未画出）给定的参考值 T^* 相等。转矩的参考值确保电机克服阻力和保持响应的转速和位置。它的改变取决于转速变化、出力大小、制动转矩。转矩 T_{em}尽可能与 T^* 相等。当转矩参考值变化时，电磁转矩尽可能跟踪转矩给定值。转矩控制就是用一系列的措施使电磁转矩与转矩给定值相等。当转矩值参考值变化时，控制转矩变量应该跟踪转矩值参考值的变化。转矩 T_{em}与电枢电流和磁通成比例。从表面上看，转矩控制能够通过改变磁通和电枢电流实现。但是必须改变电枢电流。这是因为磁通的改变相对比较慢。而且，磁通改变不适用于永磁电机。在电励磁直流电机中，电枢绕组的时间常数要小于励磁绕组的时间常数。磁通只能在很小的范围内改变，电流改变更加快。因此，通过调节电枢电流实现调节转矩。转矩的响应速度由电枢电流的响应速度决定。从电枢绕组的电压平衡方程得出，电流的变化：

$$\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L_a}(u_a - R_a i_a - E_a) \tag{12.10}$$

因此，调节电枢电流能通过调节电枢电压实现。也正是因为这样，直流电机由静止功率转换器供电，转换器提供可变的电枢电压。为了控制电枢电流，将测量的电流与参考电流相比较，最后通过电流控制消除误差 $\Delta i_a = i^* - i_a$。如果电枢电流小于参考值（$\Delta i_a > 0$），则电枢电压应该增加使得 $\mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t > 0$。从（12.10）中得出，电枢电压增大会使得电枢电流增大，因此，误差 Δi_a 会减小。通过误差 Δi_a 计算出电压参考值 u^* 的算法被称为控制算法。控制器也可以用传递函数表示。误差 Δi_a 是输入，控制变量 u^* 是输出。控制算法影响电机的转速和系统的动态特性。图 12.3 中的方框（4）给出了控制器的连接方法。控制器输出 u^* 代表期望的电枢电压，这个参考电压信号提供给电能转化器，电能转换器提供相应的电压给电枢绕组。控制问题的详细细节分析超出了本书的

范围。因此，控制器的结构和参数的设定将不在本书中介绍。

设计调节器和控制器需要了解电机的暂态过程和数学模型，本书将介绍这些模型和暂态过程。

12.8　稳态等效电路

分析直流电机的稳态特性是有意义的，在稳态时，转子的转速和转子绕组的电流没有变化。在暂态时，电流的瞬时值表示为 $i(t)$，在稳态时，电流的瞬时值表示为 I。稳态时，励磁绕组电压由方程$U_f = R_f I_f$描述。图 12.4 中的左图为等效电路。电枢绕组的电压平衡方程如下：

$$U_a = R_a \cdot I_a + k_e \cdot \Phi_f \cdot \Omega_m$$

因此，电枢电流的稳态电流$I_a = (U_a - E_a)/R_a$，U_a是电刷之间的电压。这个方程由图 12.4 中的右边部分表示。这个等效电路能够用于计算直流电机的电流、转矩和功率。已知转子转速和励磁磁通，可以计算出电动势，从而计算出$U_a - E_a$和I_a，得到转矩和功率。在电压和电流已知的情况下，等效电路能够用于计算电动势和转子转速（根据公式$\Omega_m = E_a/(k_e \Phi_f)$）。

图 12.4 中，电刷 A 和 B 之间的电压$U_a = R_a I_a - E_a$。当直流电机作电动机运行时，它由外电源供电。如图 12.4 所示，空载电压为U_m，内电阻为R_m。当内电阻$R_m \approx 0$，电枢电压U_a与U_m近似相等。如果电枢电压由外电源U_m提供，则$U_a = U_m$。

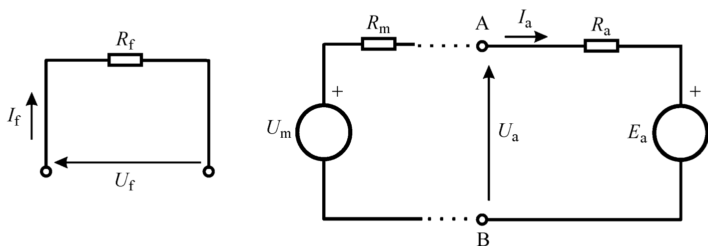


图 12.4　励磁绕组和电枢绕组的等效电路

问题（12.3）：已知直流电机，$k_e \Phi_f = k_m \Phi_f = N_R \Phi_f/(2\pi) = 1\text{Wb}$。转子转轴与工作机耦合，工作机阻碍电机旋转，产生负载转矩T_m。电机工作在稳态时，电磁转矩T_{em}与负载转矩T_m相等。转子转速恒定为$\Omega_m = 100\text{rad/s}$。电枢绕组电压$U_a = 100\text{V}$。电枢绕组的等效电阻$R_a = 1\Omega$。（1）计算电磁转矩，电源发出的功率，机电能量转换过程中的功率。（2）转子转轴与工作机解耦，电机到达一个新的稳态，求出电机转速。（3）假设转子转轴与工作机相连，工作机维持转速$\Omega_m = 100\text{rad/s}$，电磁转矩$T_{em}$是否变化。如果电源电压减小到 90V，在新的稳态条件下，求出电磁转矩和机电转换功率。

解答（12.3）：

（1）$I_a = 10A, T_{em} = 10Nm, P_{source} = 1\ 100W, P_{em} = 1\ 000W$ 。
（2）$T_{em} = 0 \rightarrow I_a = 0 \rightarrow U_a = E_a \rightarrow \omega_m = 110rad/s$。
（3）$I_a = -10A, T_{em} = -10Nm, P_{em} = -1\ 000W$；电机工作在发电状态。

12.9　机械特性

直流电机的机械特性在$T_{em} - \Omega_m$平面上是一条曲线，它反映稳态时转矩和速度的关系（在负载转矩T_m、电枢电压U_a、励磁电压U_f保持恒定条件下）。机械特性能够表示为$T_{em}(\Omega_m)$或者$\Omega_m(T_{em})$。

下面的分析假设直流电机运行在稳态。它有恒定的励磁磁通和恒定的电压（电枢绕组两端）。在图 12.5 中，外电源U_m与电刷相连，提供所需的电枢电压。电压平衡方程式为$U_m = U_a = R_a I_a + k_e \Phi_f \Omega_m$。当电枢电流为零时，电动势与外电压相等。因此，当$I_a = 0$，转子角速度$\Omega_0 = U_m/(k_e \Phi_f)$。在这种条件下，电磁转矩$T_{em}$为零。转速$\Omega_0$为空载转速。当外电源电压$U_m$恒定，$E_a = k_e \Phi_f \Omega_m = U_m - R_a I_a$，电枢电流的增大会使电动势减小。当磁通恒定时，电动势与转速成正比。因此，电枢电流减小将会使转子转速减小。另一方面，电磁转矩T_{em}与电枢电流成正比。在稳态条件下，$T_{em} = T_m = k_m \Phi_f I_a$。因此，负载转矩的增加将会使转子转速减小。

下面的分析假设直流电机工作在稳态。因此，转子速度恒定，$J \cdot d\Omega_m/dt = 0$。摩擦转矩可以忽略，负载转矩与电磁转矩相等。牛顿方程简化为$T_{em} = T_m + k_F \Omega_m \approx T_m$。电枢电流$I_a = T_{em}/(k_m \Phi_f)$与负载转矩成正比，负载转矩$T_m$的增大将会使电枢电流增大，使转速减小。

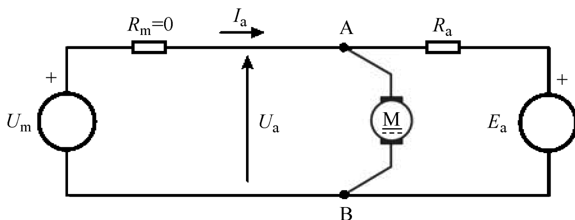


图 12.5　静态电源给电枢电压供电

前面的分析是在稳态时直流电机的供电电压和负载转矩恒定的情况下得出的。转子转速随负载转矩的增加而减小。稳态时的速度和转矩关系称为机械特性，由$T_{em} - \Omega_m$或者$\Omega_m - T_{em}$平面的曲线表示。稳态等效电路与电气端口的电压和电流相关，机械特性与转子转轴上的转速和转矩相关。机械特取决于供电电压和直流电机的参数。电枢电压U_a的变化影响空载转速和机械特性$T_{em}(\Omega_m)$。励磁电压的变化会引起励磁电流和磁通的改变，从而改变机械特性。

机械特性可以由电枢绕组的电压平衡方程（12.6）中得出，由函数关系

$T_{em}=k_m\Phi_f I_a$表示。通过电压平衡方程$U_a=R_aI_a+k_e\Phi_f\Omega_m$，电枢电流可以用转子转速表示为

$$I_a=\frac{U_m-E_a}{R_a}=\frac{U_m-k_e\Phi_f\Omega_m}{R_a}$$

电磁转矩的表达式为

$$T_{em}=k_m\Phi_f\frac{U_m-k_e\Phi_f\Omega_m}{R_a}=k_m\Phi_f\frac{U_m}{R_a}-\frac{k_mk_e\Phi_f^2}{R_a}\Omega_m=T_0-S\,\Omega_m \tag{12.11}$$

式（12.11）中，转矩$T_0=k_m\Phi_f U_m/R_a$是起动转矩，即电机在转子静止时产生的电磁转矩。如果转子的速度为零，感应电动势为零，电枢绕组的起动电流为$I_0=U_m/R_a$。后面将会介绍如果起动电流较大，会损害电机和电源。为了限制起动电流的大小，在低速时，有必要减小电枢电压。可以通过调节供电电压U_m来限制电流。在供电电源无法调节的情况下，可以在电枢电路中串接电路来增大$\sum R$，从而限制电流的大小。表达式（12.11）中参数S是斜率或者机械特性的刚度。机械特性的斜率S代表转矩增量ΔT_{em}和速度增量$\Delta\Omega_m$之间的比值。刚度大，代表转速的微小变化将会造成转矩的大幅度变化。

不同的电机有不同的机械特性$T_{em}(\Omega_m)$，与转子转轴相连的工作机也有不同的机械特性$T_m(\Omega_m)$，工作机的机械特性决定负载转矩随转速的变化。特性$T_m(\Omega_m)$被称为负载特性。在稳态时$T_m=T_{em}$，在$T-\Omega_m$平面中，稳态工作点位于两条机械特性曲线的交点，两条机械特性曲线分别为电机的机械特性曲线和工作机的机械特性曲线。在图12.6中，负载的机械特性曲线用直线L表示。图中有两条直流电机的机械特性曲线K_1和K_2。机械特性K_1和K_2是在电枢电压取不同值时获得的。如果电机的机械特性曲线为K_1，则稳态工作点为$(T_1,\ \Omega_1)$。如果电机的机械特性曲线为K_2，则稳态工作点为(T_2,Ω_2)。因此，通过调节电枢电压$U_m=U_a$，就能够改变电机的机械特性，从而改变稳态时的转速和转矩。

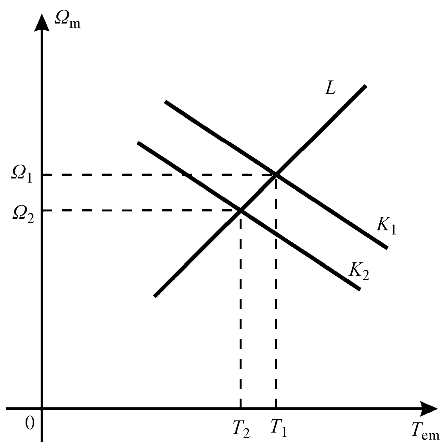


图 12.6　稳态时机械特性曲线与负载特性的交点

稳态平衡

在两条机械特性曲线的交点处达到的平衡状态可能是稳定或者不稳定的。在外界的干扰下，当工作点偏离稳定的平衡状态，经历一系列的暂态过程，又重新回到原来的工作点。不稳定的平衡状态只能在没有外界干扰的情况下保持。当工作点偏离不稳定平衡的状态，将不会回到原来的工作点。以山顶的球为例介绍不稳定平衡的情况。将它放置在山峰顶部，一些外界干扰将会使球离开山顶并沿山坡滚落。

稳态工作点的稳定性取决于两条机械特性的刚度。从直流电机的机械特性$T_{em}=T_0-S_{em}\Omega_m$和负载特性$T_m=T_{0m}-S_m\Omega_m$得出，转速变化$\Delta\Omega_m$将会造成电磁转矩变化$\Delta T_{em}=-S_{em}\Delta\Omega_m$和负载转矩变化$\Delta T_m=-S_m\Delta\Omega_m$以下。研究参数$S_{em}$和$S_m$对直流电机和工作机的动态行为的影响，直流电机转速为Ω_1，电磁转矩T_1，负载转矩$T_m=T_1$。在稳态时，速度不会改变，牛顿方程表示为

$$J\frac{d\Omega_m}{dt}=T_{em}-T_m=T_1-T_1=0$$

系统容易受到外界干扰的影响产生转矩和速度的细小变化。转子转速变化$\Delta\Omega_m$，转子转速变为$\Omega_1+\Delta\Omega_m$，电磁转矩变为$T_1-S_{em}\Delta\Omega_m$。同时，负载转矩变为$T_1-S_m\Delta\Omega_m$。Ω_1是常数，牛顿方程变为

$$J\frac{d(\Omega_1+\Delta\Omega_m)}{dt}=J\frac{d\Delta\Omega_m}{dt}=T_{em}-T_m=T_1-S_{em}\Delta\Omega_m-T_1+S_m\Delta\Omega_m$$
$$=(S_m-S_{em})\Delta\Omega_m \tag{12.12}$$

当$S_m-S_{em}>0$，当$\Delta\Omega_m$为正值时，$d(\Delta\Omega_m)/dt$为正值。因此，干扰$\Delta\Omega_m$会增加。当$\Delta\Omega_m$为负值，$d(\Delta\Omega_m)/dt$为负值，干扰的幅度也会变大。因此，在$S_m-S_{em}>0$时，稳态工作点是不稳定的，任何干扰，无论大小，都会使系统不稳定。

当$S_m-S_{em}<0$，当$\Delta\Omega_m$为正值时，$d(\Delta\Omega_m)/dt$为负值。因此，干扰$\Delta\Omega_m$会减小。干扰$\Delta\Omega_m$会减小，逐渐减小为0，使系统回到初始的稳态工作点。这种系统处于稳定状态，因为在系统受到扰动后还能回到初始的稳态工作点。反之，系统离开初始工作状态后不能回到初始工作点，这种系统不稳定。

问题（12.4）：从（12.12）开始计算，已知机械特性的刚度和转矩，$\Delta\Omega_m(0)=A$，求出$\Delta\Omega_m(t)$变化。

解答（12.4）：微分方程$dy/dt=ay$的解为$y(x)=y(0)\cdot e^{ax}$。在等式（12.12）中，$y=\Delta\Omega_m$，$y(0)=A$，$x=t$，$a=(S_m-S_{em})/J$。因此，$\Delta\Omega_m$可以表示为

$$\Delta\Omega_m(t)=\Delta\Omega_m(0)\Delta e^{\frac{S_m-S_{em}}{J}t}$$

12.10　机械特性的性能

图12.7绘出了直流电机的机械特性，包括机械特性与横轴与纵轴的交点。机械特性曲线与纵轴的交点代表空载转速Ω_0。空载转速在电磁转矩为零时取得。转矩为零，则电枢电流为零。电压降落R_aI_a为零，电动势$k_e\Phi_f\Omega_m$等于电枢电压。在式（12.11）基础上，空载转速为

$$\Omega_0=\frac{T_0}{S}=\frac{U_m}{k_e\Phi_f} \tag{12.13}$$

机械特性与横轴的交点代表初始转矩T_0，即转子静止时的转矩。初始转矩等于

$$T_0 = k_m \Phi_f \frac{U_m}{R_a} \tag{12.14}$$

机械特性的斜率取决于 ΔT_{em} 和 ΔT_m 之间的比值，如图 12.7 所示，机械特性由函数$T_{em}(\Omega_m) = T_0 - S\Omega_m$。如果转矩减小时，速度增加，则刚度 S 为正。因此，斜率由下面的表达式决定

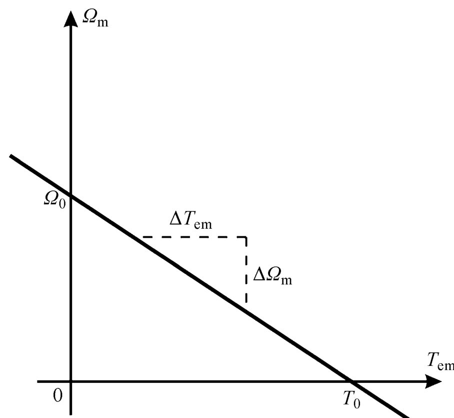


图 12.7　空载转速和初始转矩

$$S = -\frac{\Delta T_{em}}{\Delta \Omega_m} \tag{12.15}$$

由图 12.5 中电源供电的直线电机的机械特性曲线的斜率等于

$$S = \frac{k_m k_e \Phi_f^2}{R_a} \tag{12.16}$$

机械特性也能够被函数$\Omega_m = f(T_{em})$表示，等式（12.11）也能够表示为

$$\Omega_m = \Omega_0 - \frac{1}{S} T_{em} \tag{12.17}$$

电枢绕组的供电电源有一个有限的外电阻，导体与电刷之间也存在接触电阻。另外，电枢绕组中串接了一个用于限制起动电流和转矩的电阻。同时，串联电阻能够用于调节机械特性和转子转速。在实际中，电枢电路中的总电阻大于电枢绕组的电阻。因此，式（12.11），式（12.14）中的电阻R_a应该用总电阻$\sum R$ 表示。$\sum R$ 代表电枢绕组的总电阻，即，外电源的内电阻，连线与连接的电阻，串联的电阻，电枢绕组的等效电阻，换向器和电刷的电阻总和。

12.11　转速控制

在没有串联电阻的情况下，电枢电路的总电阻$\sum R$ 非常小。在实际中，直流电机的电阻R_a在通入电枢电流I_a造成的电压降$R_a I_a$，这个电压降落只有$U_a/1000 \sim U_a/100$，U_a是电枢电压。因此电阻R_a在$(U_a/I_a)/1000$ 和$(U_a/I_a)/100$ 之间。机械特性的斜率非常大。这意味着转矩变化时，转速的变化并不大。从式（12.17）得出，机械特性的斜率 S 非常高，意味着电机的转速与空载转速相差不大。根据式（12.13），空载转速由电枢电压$U_a = U_m$决定。因此，通过调节电枢电压能够改变电机的转速。

在转速需要改变但是电源的电枢电压不能改变的情况，电枢电压和转速的改变通过电枢电路中串接电阻R_{ext}实现。电枢电压为$U_a = U_m - R_{ext} I_a$，转子转速也会减小。串联电阻是非常简单但是效率较低。（根据焦耳定律，功率损耗为串联电阻乘以电枢电流的平方），更加有效率的调速方式是通过调压电源。利用半导体功率器件构成的静态功率变换器可以实现电枢电压的无损耗连续调节。

在$R_{ext}=0$时，供电电压U_m变化会导致空载转速的变化，机械特性的斜率不变。由式（12.16）可知U_m的变化不会影响机械特性的斜率S。另一方面，空载转速Ω_0与供电电压成正比（12.13）。通过改变供电电压U_m，可以获得一组斜率相同的机械特性曲线。如图12.8所示，供电电压U_m决定机械特性曲线与Ω_m轴交点。供电电压的变化使机械特性曲线沿Ω_m轴平移。机械特性的平移能够用于改变机械特性与负载特性之间的交点，因此，能够在给定的负载下改变运行转速。换句话说，转子转速的改变能够通过改变电枢供电电压实现。在图12.8中，机械特性曲线K_1，K_2，K_3，K_4，每一条机械特性曲线的电枢电压都不同。特性K_4是电枢电压为零时的电机机械特性曲线，这条机械特性曲线通过原点。

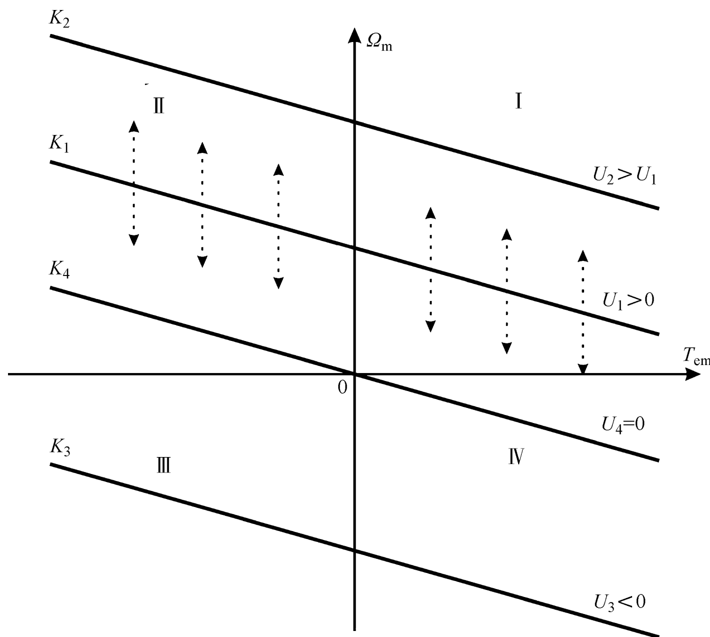


图12.8 电枢电压对机械特性的影响

图12.8中图分为四个象限。在第一象限，转子转速和电磁转矩均为正，机械功率转换为电功率。电机工作在电动机状态。在第二和第四象限，电磁转矩和转速的方向相反。功率为负，电机工作在发电机状态。在发电机状态下，电机产生电磁转矩与转子转速方向相反，为了维持电机旋转，发电机需要水轮机、汽轮机和其他类似的设备提供驱动转矩。在第三象限，电机工作在电机状态，与第一象限相似。不同之处在于转矩和转速在第三象限都为负值。

直流电机工作的象限取决于机械负载或者实际应用的工作机。直流电机能够用于驱动鼓风机的风扇。由于风向不变，因此，直流电机旋转方向不变，不需要更改转子转

速。空气阻力与转子转速相反。因此，转矩的方向$T_m = T_{em}$也不会改变，直流电机用于鼓风机的场合工作在第一象限。

一些电机用于控制变动部件、工具、物体、载具在两个方向移动。每一个运动周期开始于一个加速过程，结束于转速减小到零（见图 12.10）。在加速过程中，转矩与转速有相同的方向，在刹车过程中，转矩与转速有相反的方向。因此，一个位置移动到下一个位置的过程中，转矩变化了方向，转速没有改变方向。回到原始位置（12.10）时，电机的转速与之前的旋转方向相反。前进和后退运动需要转矩和转速的方向存在四种组合形式（$T_{em}>0$，$\Omega_m>0$），（$T_{em}<0$，$\Omega_m>0$），（$T_{em}>0$，$\Omega_m<0$），（$T_{em}<0$，$\Omega_m<0$）。换句话说电机需要完成四象限操作。

问题（12.5）：工作机的负载转矩$T_m = 0.001\ \Omega^2$。对于独立励磁的直流电机，励磁磁通稳定，其他参数如下：$R_a = 0.1\Omega$，$k_m\Phi_f = 1\text{Wb}$，$U_a = 100\text{V}$，求出稳定状态时的转速。

解答（12.5）：稳态时，电磁转矩T_{em}和负载转矩T_m相等。稳态时工作点是机械特性和负载特性的交点。根据式（12.11），电磁转矩$T_{em} = T_0 - S\,\Omega_m$。对于给定的参数，$T_0 = (1 \cdot 100/0.1)\text{Nm} = 1000\text{Nm}$，$S = (1 \cdot 1/0.1)\text{Nm} \cdot \text{s/rad}$。等式$T_{em}(\Omega_m) = T_m(\Omega_m)$将会推导出一个关于$\Omega_m$的二次方程。二次方程的正解为 99.02rad/s，即系统稳态时的转速。

12.12　直流发电机

直流电机能够工作在发电机状态。发电机的转子由汽轮机和水轮机带动的，将机械能转化为电能。提供给转轴的机械能产生转子转速，汽轮机转矩T_T维持转子的运动和转速。转子旋转时，电枢绕组感应电动势$E_a = k_e\Phi_f\Omega_m$，作用于电刷两端，电压U_a能够用于给直流负载如电灯和加热器等用电器供电。直流发电机的电枢电压被称为U_G。当电刷之间连接电阻性的负载时，产生负载电流I_a。电枢电流的参考方向为负，因此，分析直流发电机时电流的参考方向与分析电动机的参考方向不同。在图 12.9 中，等效电路包括电流$I_G = -I_a$，从电刷 B 流向电刷 A，电刷 A 代表电压的正极。从如下等式开始

$$U_G = U_a = R_aI_a + k_e\Phi_f\Omega_m$$

代入$I_G = -I_a$，得到

$$U_G = k_e\Phi_f\Omega_m - R_aI_G = E_a - R_aI_G \tag{12.18}$$

等式（12.18）将发电机电压表示为用电电流I_G的函数。从式（12.18）开始，得出电流－电压的特性。空载电压等于E_0。斜率 $\Delta U/\Delta I$ 代表用电器消耗的电压降落。电压降落 ΔU 与用电电流成正比。斜率 $\Delta U/\Delta I$ 等于电枢电阻R_a。电气负载与发电机之间的电路太长，电路的电阻不能忽略，斜率 $\Delta U/\Delta I$ 等于电枢电阻和连接线电阻的和。

当供电和负载都通过直流电流，保持供电电压恒定是很重要的。因为有限电枢绕组

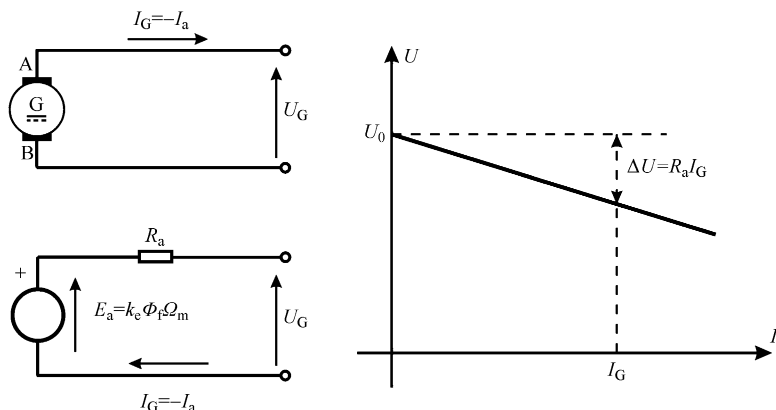


图 12.9　直流电机的电压电流特性

电阻产生的电压降 ΔU，供电电压由负载电流决定。为了在电流变化的情况下保持供电电压U_G不变，需要增大电动势，从而维持电压$E_a-R_aI_G$。在实际应用中，测量电压U_G是必要的，比较测量值和预期的电压值，通过调节励磁磁通，从而产生相应的电动势。通过调节电动势E_a，调节负载电压$U_G=E_a-R_aI_G$保持恒定。通过上述的方式能够调节直流发电机的电压。

当直流发电机给电阻性的负载供电，负载吸收电流$I_G>0$，此时电枢电流$I_a=-I_G<0$。因为电枢电流I_a是负方向的，电磁转矩T_{em}也是负方向的。当$T_{em}<0$，电磁转矩阻碍运动，与电机旋转方向相反。换句话说，直流电机提供制动转矩。因此，机电能量转换的功率$P_{em}=T_{em}\Omega_m$也为负值。这意味着机械能被转化为电能。发电机通过转轴吸收驱动电机的机械能。驱动轮机的驱动转矩和转速的乘积代表输送给电机的机械能。转矩T_T的方向与先前负载转矩T_m的参考方向相反。如图 12.1 中的参考方向，发电机模式下，$T_{em}<0$，$T_m<0$。

问题（12.6）：水轮机驱动直流发电机，转速为$\Omega_m=100\text{rad/s}$。参数$R_a=1\Omega$，$k_m\Phi_f=1\text{Wb}$，负载电阻$R_L=4\Omega$，求出负载上电压，转矩$T_T=-T_{em}$，轮机功率$P_T=T_T\omega_m$，负载上功率$P_G=U_aI_G$。为什么$P_T>P_G$？

解答（12.6）：发电机的电动势$E_a=100\text{V}$。发电机电流$I_G=-I_a=100\text{V}/(1\Omega+4\Omega)=20\text{A}$。供电电压为 80V。电磁转矩 $-1\cdot 20\text{Nm}=-20\text{Nm}$。轮机转矩$T_T=-T_{em}=20\text{Nm}$。轮机功率$P_T=2000\text{W}$。发电机供电功率$P_G=1600\text{W}$。功率的差值为$R_aI_a^2=400\text{W}$，代表消耗在转子绕组的热量。

12.13　直流电机供电的拓扑结构

无论是直流电机用作电动机或者发电机，直流电机经常与静态电源转换器相连。变

速引用场合需要电枢电压能够连续的变化。另一方面，通过直流网络或者电池获得的直流电压通常为常数值。在需要调节电机电压的场合，直流电机通常与恒定电压源相连。在这种场合，利用 DC/DC 静态变换器按照需要调整电枢电压。直流电机通常利用交流主电源供电。在这些场合，利用静态功率变换器使恒定交流电变为可变的直流电。大部分常用的静态功率转换器和直流电机的应用将在后面的内容讨论。

12.13.1　电枢功率供应要求

直流电动机将电源提供的电能转换为输出轴的机械能。电机通过转轴将转矩传递给工作机转子轴并与工作机耦合在一起。传递的机械功率大小是驱动转矩和转速的乘积。

按照提供给电枢供电的电源电压的要求分类。直流电机通常用于控制工具、工作件、包装机、操作器、载具。一个典型的运动周期包括从起始位置移动到目标位置，到达目标位置并停在目标位置，回到初始位置。图 12.10 中绘制出了移动周期中位置θ_m、转速Ω_m、转矩T_{em}的变化情况。为了更进一步的分析电枢电源供应，分析运动过程中的转矩和转速变化。

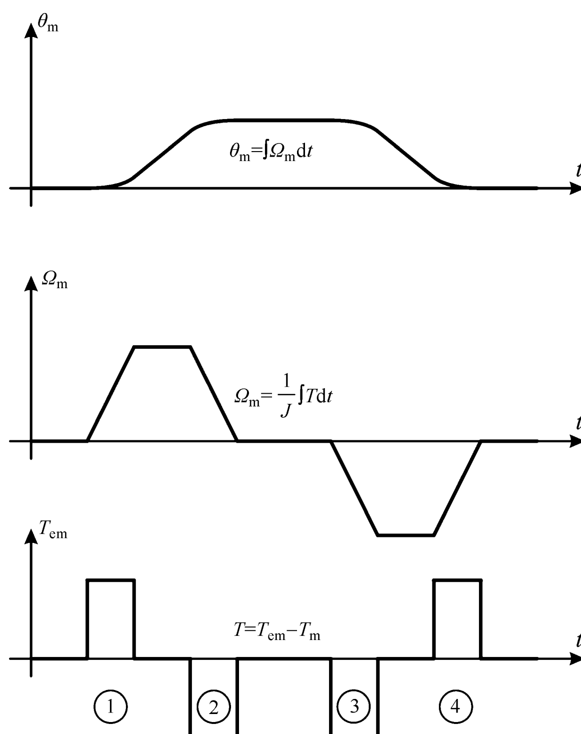


图 12.10　在一个周期中位置，转速，转矩的变化

移动周期的四个特点象限被标记为 1 到 4。在象限 1，转矩为正值，它加速电机，使电机的转速上升，并使电机向目标位置移动。从图 12.10 中观察到目标速度迅速达到了，当转速恒定后，在象限 1 和 2 之间的间隙，转速恒定，转矩值很小。转速恒定时，没有必要提供加速转矩 $J\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$，转矩减小为很小摩擦转矩，可以认为等于零。在象限 2，位置θ_m与目标位置接近。因此，有必要制动和减小速度。负向转矩使转速减小为零，并停在目标位置。为了回到初始位置，象限 3 和 4 的转速和转矩与象限 1 和 2 的转速和转矩相反。在一个运动周期中，转速和转矩的组合如下：

1）$T_{em}>0$，$\Omega_m>0$（象限 1）；

2）$T_{em}<0$，$\Omega_m>0$（象限 2）；

3）$T_{em}<0$，$\Omega_m<0$（象限 3）；

4）$T_{em}>0$，$\Omega_m<0$（象限 4）。

在第一和第三象限，电机工作在电动机状态，在第二和第四象限，电机工作在发电机状态。因此，在图 12.10 所示的运动周期中，工作点($T_{em}-\Omega_m$) 不得不穿越转矩速度平面的四个象限。这个能够通过电枢功率供应和电压电流的参考方向区分。转矩$T_{em}=k_m\Phi_f I_a$由电枢电流决定。电磁转矩的方向由电流的方向决定。同时，电压降落R_aI_a通常被忽略，电枢电压 U_a 与电动势$E_a=k_e\Phi_f\Omega_m$相接近。因此，电压U_a的方向由转子的转向决定。$U_a\approx k_e\Phi_f\Omega_m$，$I_a=T_{em}/(k_m\Phi_f)$，$T_{em}-\Omega_m$平面的工作点有助于分析($I_a-U_a$)平面的电压和电流。按照这种方式，电枢绕组的电源特点被分为 4 类。根据先前总结的$T_{em}=k_m\Phi_f I_a$和$U_a\approx E_a=k_e\Phi_f\Omega_m$，如图 12.10 的运动周期中，电压和电流的方向分为如下 4 类：

1）$I_a>0$，$U_a>0$（象限 1）

2）$I_a<0$，$U_a>0$（象限 2）

3）$I_a<0$，$U_a<0$（象限 3）

4）$I_a>0$，$U_a<0$（象限 4）

因此，电源需要提供的电枢电压和电流方向必须是双向的并且有 4 种组合形式。这些要求对于给直流电机供电的功率变换器的拓扑结构提出了严格的要求。

还有很多直流电机的应用场合并不需要转速和转矩改变方向。在这些场合，电枢绕组的供电结构更加简单。在先前提到的鼓风机类负载，电机工作在第一象限，给电刷绕组供电的静态功率变换器有严格的正向电压和电路$I_a>0$，$U_a>0$。

12.13.2　*T*-*Ω* 图和 *U*-*I* 图中的四个象限

如果电机要完成图 12.10 中的运动，在运动的不同象限，经历了 T-Ω 平面的四个象限。如果励磁磁通的方向没有改变，转矩的方向由电枢电流的方向决定。电动势的方向由角速度方向决定。根据转矩电流关系（$T_{em}=k_m\Phi_f I_a$）和电压转速关系（$U_a\approx E_a=k_e\Phi_f\Omega_m$），$T$-$\Omega$ 平面和 U-I 平面的四个象限如图 12.11 所示。

12.13.2.1　第一象限

电机产生正向的转矩并按照参考方向旋转；因此，$T_{em}>0$，$\Omega_m>0$。电枢电压和电

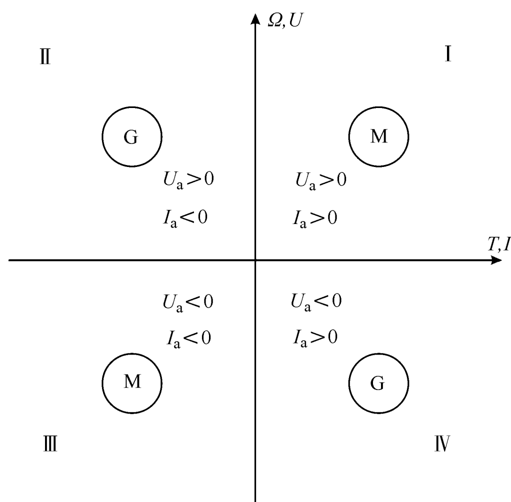


图 12.11　四个象限 T-Ω 平面和 U-I 平面

流都为正，因为$U_a \approx E_a$，$E_a \sim \Omega_m$，$I_a \sim T_{em} > 0$。电源发出的功率为正，$P_i = U_a I_a > 0$。机电能量转换中的功率为正，$P_{em} = T_{em}\Omega_m = E_a I_a > 0$。电机工作在电机状态。

12.13.2.2　第二象限

电机产生负向转矩，转子转速为正，因此，$T_{em} < 0$，$\Omega_m > 0$。电枢电压为正，电枢电流为负。电源发出的功率为负值，因为电压和电流符号相反。电机工作在发电机状态；因此，电磁转矩起到了阻碍运动和制动的目的。

12.13.2.3　第三象限

电机产生负向转矩，转速与参考方向相反；因此，$T_{em} < 0$，$\Omega_m < 0$。电枢电压和电流都是负向的，因为$U_a \approx E_a \sim \Omega_m < 0$，$I_a \sim T_{em} < 0$。电源发出的功率为正，$P_i = U_a I_a > 0$。机电能量转换中的功率为正值，$P_{em} = T_{em}\Omega_m = E_a I_a > 0$，电机工作在电机状态。

12.13.2.4　第四象限

电机产生正向转矩，旋转方向与参考方向相反；因此，$T_{em} > 0$，$\Omega_m < 0$。电枢电流为正值，但是电压为负值。由于电压和电流的参考方向不同，电源发出的功率为负值。机电能量转换过程中的功率也为负值，因为转矩的方向与旋转的方向相反。电机工作在发电机模式。电机起到制动的作用。

12.13.3　电源的四个象限

本章将介绍给直流电机供电并使直流电机按照如图 12.10 的运动的电源的拓扑结构。功率变换器的电路结构在图 12.12 给出。下面将介绍基本要求。功率变换器能够在四个可能的组合方式下给电枢绕组提供可变电压和可变电流。

在图的左侧，E 代表提供给静态功率变换器的直流电压。电压 E 通过电池或者整流

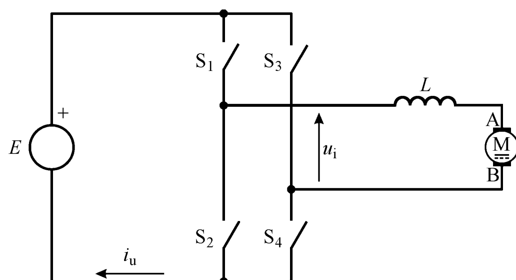


图 12.12　给电枢绕组供电的变换器拓扑结构

器获得。整流器由二极管或者其他半导体器件组成，能够将交流电压和电流转换为直流电流。整流器由单相或者三相电网供电。在整流器的输入端为交流电压和电流，主要的供电整流器由交流电（50Hz 或者 60Hz）供电。整流器实现了 AC/DC 转换，并将电能以直流电的方式输出。二极管整流器输出的直流电压 E 与输入端的交流电的有效值成正比。因此，主供电整流器无法提供可变的电压 E。

获得了电压为 E 的直流电源，下一步需要将直流电源转换为能够提供可变极性和大小。满足此种需要的转换器方案是由四个开关S_1，S_2，S_3，S_4组成的桥式结构。在分析之前，假设开关是理想的。这意味着开关在 OFF（断开）状态下不能通过电流。开关在 ON（闭合）状态下的电压降为零。这也意味着开关都没有开关损耗。即，在开关闭合和开断的过程中没有任何损耗。因此，这种结构不存在换相损耗。开关状态发生改变的暂态过程被称为换相。

12.13.3.1　功率开关

实际中的机械开关和功率半导体一样在开关 OFF 的状态下存在漏电流。另外，在开关 ON 的状态下，机械开关和功率半导体都存在电压降落。因此，实际中的开关存在导通损耗。功率半导体器件的 ON 和 OFF，机械开关的开通和关断的过程中都存在功率损耗。每一换相的功率损失乘以一秒内换相的次数得到了换相损失或者换流损失。

机械开关在接触器接触的时候闭合，在接触器断开的时候断开。关断操作中的能量损失是由开断过程中的电弧造成的。即使接触器被断开，电流还会通过接触器空间中产生的电弧持续小段时间，接触器放电很快，电弧非常短暂。电弧会造成能量损失。机械开关的闭合造成的换相损失是由于电流早于接触器接触之前建立造成的，这也对换相损失有贡献。

当今的静态功率转换器不会用机械开关给电枢绕组供电，而是利用半导体功率器件，例如 BJT（晶体管），MOSFET（金属氧化层半导体场效应晶体管），IGBT（绝缘栅极双极性晶体管）。在半导体开关中，换相损失产生是由于不同的自然特性。在半导体器件的暂态过程中，从 OFF 状态开始变化，特点为 $u=E$ 和 $i\approx 0$，进入 ON 状态，特点为 $u\approx 0$ 和 $i=I_a$，存在短暂的换相间隙 Δt_c，在换相间隙电压和电流同时为可观的值。

BJT，MOSFET，IGBT 的换相时间 Δt_c 各不相同，范围从 100ns 到 1μs。在间歇时间内的积分代表间歇期内的能量损失。无论是机械开关或者半导体功率器件，换相过程的功率损失等于一次换相的损失和一秒内换相的次数的乘积。

通过闭合开关 S_1 和 S_4，电刷 A 和 B 之间建立电压 $+E$。通过闭合开关 S_2 和 S_3，电刷 A 和 B 之间建立电压 $-E$。因此，图 12.12 中的开关桥能够提供两种极性的电压。通过闭合开关的电流等于电枢电流。电枢电流能够两个方向流动，开关也能够使电流双向流动。根据先前的分析，电压和电流的方向取决于电机工作点位于什么象限。

12.13.3.2　开关状态

每一个开关都能够闭合（ON）或者开通（OFF）。假定所有的开关能够被独立控制，所有的开关状态有 $2^4=16$ 种。当开关按照图 12.12 的方式连接，有效的开关状态会减少。

考虑开关 S_1 和 S_2，开关状态 $S_1=S_2=\text{ON}$，这将会导致电源 E 短路。同时，开关 $S_1=S_2=\text{OFF}$，电流不能流通。因此，分支（臂）S_1-S_2 只有两种可用的开关状态，它们为（$S_1=\text{ON}$，$S_2=\text{OFF}$）和（$S_1=\text{OFF}$，$S_2=\text{ON}$）。分支（臂）S_3-S_4 同样也只有两种可用的开关状态。两条分支，每条分支两种开关状态，则开关桥一起有四种开关状态。

同样，可以通过列举法得出开关桥电路可用的四种开关状态。考虑图 12.12 中的开关桥，值得注意的时每一个时刻开关桥中只有两个开关闭合。首先，闭合的开关数目不可以是 3 或者 4，但是如果闭合开关数目为 3，则支路 S_1-S_2 和支路 S_3-S_4 将会使电源 E 短路。电源 E 代表电池或者整流器，它们只有很小的内阻。因此，整条直流的短路将会造成非常大的电流流过电源和开关，很快就能造成永久损失。另外一方面，开关开通的数目也不能小于 2。这是因为开关桥必须提供电枢电路的通路，电枢电流不能够被中断。电枢电流从支路 S_1-S_2 流向电刷 A，支路 S_3-S_4 流向电刷 B。为了给电枢电流提供通路，支路 S_1-S_2 和支路 S_3-S_4 中每一条都必须同时 ON（闭合）一个开关。每一条支路的有一个开关导通，开关桥中有两个开关导通。

图 12.12 中可用的开关状态在表 12.1 列出。对于每一个开关，标示 0 代表 OFF 状态，标示 1 代表 ON 状态。最右侧的列代表电压 u_i 所处的开关状态开关桥式电路获得电压。大部分功率晶体管采用 BJT，MOSFET，IGBT。用于静态功率变换器的晶体管取决于操作电压，操作电流，换相频率，冷却条件，稳定性要求，价格和其他因素。每一种晶体管都有各自的优势和缺点，特定应用范围。最常用的晶体管类型如图 12.13 所示。

表 12.1　开关状态

S_1	S_2	S_3	S_4	u_i
0	1	0	1	0
0	1	1	0	$-E$
1	0	0	1	$+E$
1	0	1	0	0

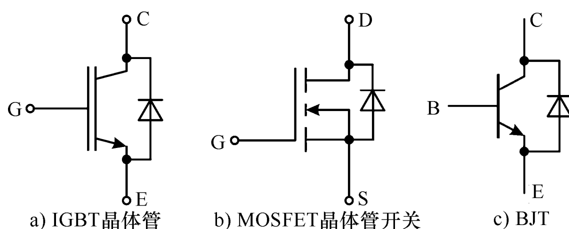


图 12.13 半导体开关的图标

12.13.3.3 MOSFET，BJT，IGBT 晶体管

本章将会简要介绍当今常用的半导体开关器件的实际电压降落，换相特点，控制要求。对功率器件更深一步的了解超出本书的范围。

晶体管的开关状态由晶体管的第三极或者控制极控制。对于 BJT，控制极又被称为基极，正向的电流流入 BJT 将会使 BJT 导通，终止基极电流在基极施加负向电压将会使 BJT 断开。IGBT 和 MOSFET 通过改变控制极或者称为门极的电压可以控制 IGBT 和 MOSFET 的开通或者关断。门极电压 +15V 大于阈值$V_T \in [+4V..+6V]$时，将会使晶体管处于开通状态（ON）。关断晶体管只需要在门极施加 -15V。BJT 基极电流将会造成功率损失，门极控制的 IGBT 和 MOSFET 几乎不会产生功耗。

三种功率晶体管在关断状态只有很小的电流。开通时则各不相同。晶体管的导通电压降非常小，范围从 100mV 到 3V。BJT 导通时，基极电流很大，使得晶体管处于饱和状态，电压$V_{CE} = V_{BE} - V_{BC}$非常小。在饱和状态下，小型 BJT 的V_{CE}只有 200mV。功率 BJT 有内电压降落，V_{CE}在 500mV 和 1V 之间。另一方面，大电流 BJT 只有非常小的增益$\beta = I_C/I_B$，基极的电流很大。因此，大部分利用 BJT 技术研制的功率半导体器件都是采用达林顿结构，开通状态时的电压降$V_{CE} = 2V_{BE} - V_{BC}$，范围在 1.5V 和 3V 之间。

MOSFET 和 IGBT 在门极施加 +15V 电压时导通。MOSFET 在开通状态时类似于一个电阻并有电压降$R_{ON}I_{DS}$，其中R_{ON}是 MOSFET 开通通道的电阻。操作电压小于 100V 的晶体管的R_{ON}只有 1mΩ，电压降也非常小。因此，MOSFET 适合低工作电压的应用场合。因为 MOSFET 晶体管的特性，电阻R_{ON}随着最大承受电压的增大而增大，$R_{ON} \sim U^{2.5}$，晶体管能承受两倍最大承受电压，此时导通的电阻是原电阻的 5.6 倍。正是如此，高压的 MOSFET 很少应用，因为它们的高电压降落。IGBT 功率半导体是 BJT 和 MOSFET 的混合技术产物，综合各自的优点。IGBT 在电压数千伏，电流 1kA 的应用场合得到广泛的应用。

12.13.3.4 续流二极管

电枢绕组的电流的方向变化会产生驱动和制动转矩。因此，每一个开关都需要双向通过电流。图 12.13 中功率开关都是功率晶体管构成的。在开关S_1，S_2，S_3，S_4的位置放入功率晶体管并不能满足电流双向流动的要求，因为功率晶体管只能通过单方向的电流。当导通时，双极性半导体的电流从集电极流向发射极。功率晶体管不适合双向电

流。任何反向的电流将会造成很大的功耗甚至损害半导体设备。因此，静态功率变换器中利用晶体管导通反向电流是没有意义的。功率半导体 BJT，IGBT，MOSFET 只用于单相导通电流。因此，每一个开关由一个功率晶体管和半导体二极管构成。图 12.13c 中的晶体管安装在 CE 方向，半导体二极管安装在 EC 方向。图 12.12 中的开关均是按照这种方式构成的。因此，每一个开关S_1，S_2，S_3，S_4都能看成是功率晶体管和功率二极管的并联。

12.13.3.5　可用输出电压

根据表 12.1，当S_1和S_4闭合（ON）时，电枢绕组能够获得正向的电压。在这种开关状态，正向电枢电流流过功率晶体管S_1和S_4。反向电流能够通过开关S_1和S_4的与功率晶体管并联的功率二极管流通。当S_2和S_3闭合（ON）时，电枢绕组能够获得负向的电压。这种开关状态也能够流通双向电流。当S_1和S_3闭合（ON），或者当S_2和S_4闭合（ON）时，电枢电压$u_i = 0$。

图 12.12 中 4 种可以利用的开关状态都能够提供双向的电压和电流。因此，它能够使直流电机工作在T_{em}-Ω_m平面的四个象限，先前介绍的方法无法提供电枢电压的连续变化。即，对于四种可以利用的开关状态，输出电压只能为$+E$，$-E$，0。电枢电压可以是三个离散的电压值。另外，电枢电压能够是脉冲序列。脉冲宽度的变化能够改变电枢电压的平均电压。

问题（12.7）：哪些开关状态能够使电枢电压为零？

解答（12.7）：开关S_1和S_3闭合（ON），或者当S_2和S_4闭合（ON）时，电枢电压为零，电枢绕组被短路。

12.13.4　脉冲宽度调节

根据表 12.1 分析总结出，输出电压u_i只能有三种可用的值，$+E$，$-E$，0。直流电机的应用需要供电电压能够连续变化。图 12.12 中的开关状态不能够提供连续的电压变化。另一方面，提供一系列相对短时间（开关周期）的脉冲序列是可能的。每一个开关状态都能调整持续时间并提供电枢电压$+E$，$-E$，0。一系列重复的电枢电压$+E$，$-E$，0 将会产生平均电压$+E > U_{av} > -E$。电压u_i设定为一系列可利用的宽度的脉冲。脉冲宽度将会影响平均电压U_{av}。显然，脉冲宽度的变化不会导致电枢电压的连续变化。在每一个开关周期内，只能改变电枢电压的平均值。脉冲宽度的变化称为脉冲宽度调制。

12.13.4.1　电枢电压要求

在工业机器人、电动载具、大部分旋转运动控制的应用中，电机的转速需要连续变化。稳态的电枢电压$U_a = R_a I_a + k_e \Phi_f \Omega_m$。电压降落$R_a I_a$明显小于电动势。电机的电枢绕组的电阻很小，这是为了减少焦耳定律产生的热量并增加效率。因此，可以假设$U_a \approx k_e \Phi_f \Omega_m$。励磁磁通恒定，电枢电压与转速成正比。转速连续变化时，电压也能够连续变化。可用的电源通常为电池或者整流器，电压为E。可以通过一个电枢电路中串联电阻ΔR来使电压减小$\Delta R I_a$。利用可变电阻的方式调节电压，通过改变ΔR，就能够调整电

压$U_a = E - \Delta R I_a$。这种调节方式不常用，因为这种方式效率很低。由于串接电阻的焦耳效应，电压$U_a = 1/2E$，一半的功率转化为串接电阻 ΔR 的热量，只有一半的功率提供给直流电机。

12.13.4.2　脉冲宽度调制

电机通过开关电源提供可变的电压。图 12.12 给出了一个开关桥式电路供电电源的例子。它不包含产生功耗的串联电阻和其他元件。忽略非常小的导通电阻和换相损失，图 12.12 中的开关桥式电路是几乎没有损耗的。根据表 12.1，开关状态（$S_1 = S_4 = \mathrm{ON}$）和（$S_2 = S_3 = \mathrm{OFF}$）使得$U_a = +E$，E 是开关桥的输入端电压。电源 E 称为初级电源。当开关状态改变，另一条对角线的开关状态（$S_1 = S_4 = \mathrm{OFF}$）和（$S_2 = S_3 = \mathrm{ON}$），电枢电压$U_a = -E$。这两种状态㊀都不能使电枢电压连续变化。然而，通过迅速、周期性的改变开关状态，输出电压为一系列的脉冲序列，电压的宽度能够通过调节开关状态的持续时间实现。通过连续的变化脉冲宽度，就能实现平均电压的连续变化。

12.13.4.3　电压平均值

如果电枢电压通过开关桥周期性地改变开关状态获得的，间歇$S_1 = S_4 = \mathrm{ON}$ 与间歇$S_2 = S_3 = \mathrm{ON}$ 相互替换。在一个开关周期内，开关状态从一个状态改变至另一个开关状态。开关周期通常为 100μs。在一个周期内，在$S_1 - S_4$开通期间t_{ON}，$0 < t_{ON} < T$。在其余的时间，$S_2 - S_3$导通。在一个周期内电枢电压如图 12.14 所示。周期 T 内电枢电压的平均值与t_{ON}成正比：

$$U_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T u_i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2t_{ON} - T}{T}E \tag{12.19}$$

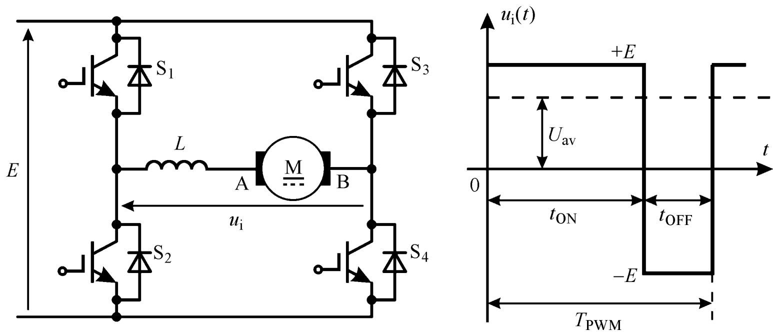


图 12.14　脉冲宽度调制

㊀ 还有两种电压$U_a = 0$ 的开关状态。这两种状态分别为$S_1 = S_3 = \mathrm{ON}$，$S_2 = S_4 = \mathrm{OFF}$ 和$S_1 = S_3 = \mathrm{OFF}$，$S_2 = S_4 = \mathrm{ON}$，为了简化地介绍脉冲宽度调制原则，它们将不在下面的内容讲述。值得注意的是，在实际的应用中存在电压$U_a = 0$ 的开关状态。

通过连续调节脉冲宽度 $0 < t_{ON} < T$，输出电压的平均值在 $-E$ 和 E 之间。因为$U_a \approx k_e \Phi_f \Omega_m$，通过调节脉冲宽度$t_{ON}$，转子转速在 $-E/k_e\Phi_f$和 $+E/k_e\Phi_f$之间。脉冲宽度的变化称为脉冲宽度调制（PWM）。图 12.14 中的开关桥电路起到了功率放大器的作用，功率放大器由变量t_{ON}控制。通过连续改变脉冲宽度t_{ON}就能连续地改变电枢电压。开关桥电路使得电压无损耗变化。

12.13.4.4　输出电压中的交流分量

图 12.15 中，除了平均电压，电枢电压也存在交流分量。电压的波形是周期性的，而且电压包含一系列的谐波分量。基频分量，即频率最小的分量，周期为 T，频率为 $f = 1/T$。周期 T 是包含一个正向电压脉冲和一个负向电压脉冲的时间段。重复的周期性电压序列提供输出电压。频率 f 接近 10kHz。

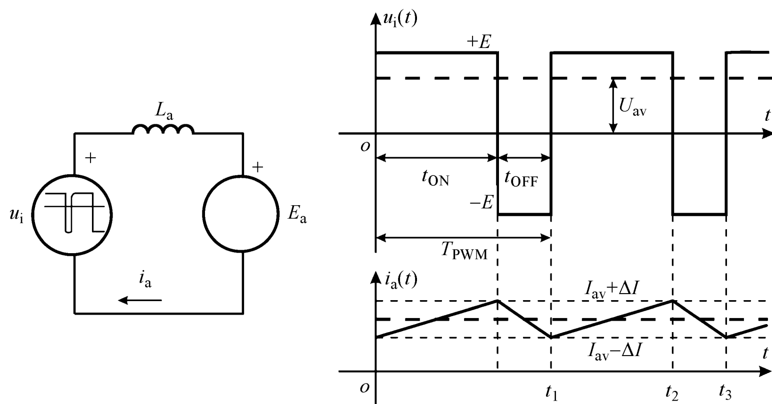


图 12.15　在一个开关周期中的电枢电流变化

直流电机需要能够连续变化的电枢电压。电枢电压的瞬时值不能满足这个要求，只能是离散值 $+E$ 或者 $-E$。电刷两端的电压为脉冲波形，包含平均值和交流分量。因此需要分析交流电压分量和开关桥式电路是否能够给直流电机供电。交流分量对电枢电流、电磁转矩、转速、损耗没有任何显著的影响。直流电机使用脉冲波形电压的供电电源可以等效为没有脉冲和交流分量的理想电压源$u_a(t) = (2t_{ON} - T)E/T$。

12.13.4.5　电机的低通特性

电机的绕组有一定的电感，电感由绕组的匝数和磁阻决定。对于角频率 ω 为电流的阻抗 $X = L\omega$。由交流电压产生的交流电流的角频率为 ω。因此，频率很大时，交流电压对电枢电流的影响可以忽略。

微分方程$u_a(t) = R_a i_a(t) + L_a di_a(t) + E_a$可以描述电枢绕组的暂态过程。微分方程的拉普拉斯变换式为$U_a(s) = R_a I_a(s) + sL_a I_a(s) + E_a(s)$，电压和电流均用复变量表示。电枢电流$I_a(s) = (U_a(s) - E_a(s))/(R_a + sL_a)$。函数 $W(s) = 1/(R_a + sL_a)$ 为电枢绕组的传递函数，它代表电枢电流对电枢电压的反应。传递函数等于电流的复变量除以电压的复变量。传递函数代表电枢电流对电枢电压的反应，电枢电压中含有交流分量。将 $s = j\omega$

代入 $W(s)$，得到电流和电压的比值（包含确定的角频率 $\omega=2\pi/T$）。

$$\frac{I(\mathrm{j}\omega)}{U(\mathrm{j}\omega)}=W(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{R_a+\mathrm{j}\omega L_a}\approx\frac{1}{\mathrm{j}\omega L_a} \tag{12.20}$$

频率通常为数 kHz，$R_a \ll \omega L_a$；因此，交流分量的电流值与电压值的比值为 $1/(\omega L_a)$，频率更高的电压的分量造成的电流分量的幅值越小。在频率为 10kHz 时，阻抗 ωL_a 非常高，高频电压所产生的电枢电流可以忽略。供电电压的脉冲特性不会显著地影响电枢电流。因此，在实际应用中，电枢电压的交流分量可以忽略。因此，按照 PWM 方式控制的开关桥电路可以简化为忽略高频交流分量的开关桥。如果开关频率 $f=1/T$ 非常高，图 12.12 表示的开关电源能够被可以提供可调电压和无交流分量的理想电压源代替。通过改变脉冲宽度 t_{ON}，电源的电压 $U_{av}=(2t_{ON}-T)E/T$。

12.13.5　电流脉动

在先前的章节，我们得出结论：在频率 $f=1/T$ 很高的情况，可以忽略电枢电流的交流分量。在本节将分析电枢电流和电压的高频分量的变化以及给开关桥供电的初级电源的电流。在图 12.12 中，电源 E 的电流标记为 i_u。这些量绘制在图 12.16 中。

电枢绕组中电流的变化由微分方程决定

$$\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{L_a}(u_a-R_ai_a-E_a)\approx\frac{1}{L_a}(u_a-E_a) \tag{12.21}$$

忽略电阻 R_a 上的电压降电流变化取决于差值（u_a-E_a）和电感 L_a 的比值。在电动势 E_a 等于供电电压的情况下，电流不会变化。如果这种情况持续，系统进入稳态。当开关电源给电枢绕组提供可变脉冲宽度的电枢电压，电枢电压只能是离散的，$+E$ 或者 $-E$。电源提供的电压还有在少数例外的场合等于电动势 E_a。在大多场合，电动势小于供电电压：

$$|E_a|<|E|$$

在每一个周期 T，电枢电压 $+E$ 在 t_{ON} 期间大于电动势，电流的一阶导数大于零，根据式（12.21），电流线性增大。在 t_{ON} 之外的时间，电枢电压 $-E$ 小于电动势，使得在 $T-t_{ON}$ 期间，电流线性减小。图 12.15 绘制出了等效电路，包含脉冲电压 u_i，电枢绕组的电感 L_a，电枢电压的电动势。忽略电枢绕组的电阻。假定开关周期 T 内的电磁力保持不变。电枢电流的波动用 ΔI 标记，称为电流脉动。在每一个电压脉冲期间，电流的变化都是线性的，电流的变化趋势取决于等式（12.21）。为了求出电流波动的幅值 ΔI，从 t_1 时刻开始计算，在图 12.15 中，正向电压开始建立，在这个时刻，电枢电流 $i_a(t)=I_{av}-\Delta I$。在 $[t_1 \cdots t_2]$ 期间，输出电压 $u_i=+E$，电流 i_a 的斜率为 $(E-E_a)/L_a$。电流的变化是线性的，在 $t_2=t_1+t_{ON}$ 时刻，电流的瞬时值为 $i_a(t_2)$，标记正向脉冲的结束：

$$i_a(t_2)=i_a(t_1)+t_{ON}\frac{E-E_a}{L_a} \tag{12.22}$$

在图 12.15 中，在 $[t_2 \cdots t_3]$ 期间，电源提供负向电压脉冲。开关电源的输出电压

$u_i = -E$，电流i_a按照斜率（$-E-E_a)/L_a$变化。在这个间隙，电流线性减小。在$t_3 = t_2 + t_{OFF} = t_2 + T - t_{ON} = t_1 + T$，负向电压结束，电枢电流为

$$\begin{aligned} i_a(t_3) &= i_a(t_2) + (T - t_{ON})\frac{-E-E_a}{L_a} \\ &= i_a(t_1) + t_{ON}\frac{E-E_a}{L_a} + (T-t_{ON})\frac{-E-E_a}{L_a} \\ &= i_a(t_1) + E\frac{2t_{ON}-T}{L_a} - E_a\frac{T}{L_a} \end{aligned} \tag{12.23}$$

期间t_{ON}和电枢电流I_{av}为恒定值。即使电枢电流 ΔI 存在波动，这种状态被认为是稳态。在这种情况，负向电流结束时电枢电流的即时值必须相等。因此，在稳态，$i_a(t_1) = i_a(t_3)$。在式（12.23）的基础上，稳态时

$$E\frac{2t_{ON}-T}{L_a} = E_a\frac{T}{L_a}$$

电动势等于

$$E_a = E\frac{2t_{ON}-T}{T} \tag{12.24}$$

在式（12.19）的基础上，先前的表示式代表开关电源输出的电压平均值。假设$R_a \approx 0$，稳态时，电枢电路中的电压平均值等于电动势E_a。稳态如图 12.15 所示。电流平均值保持恒定，电流在平均值周围波动。电流波动 ΔI 取决于开关频率、供电电压、电枢阻抗。

脉冲宽度与周期的比值为t_{ON}/T 称为调制因子，标记为 m。将 m 代入表达式（12.19）和式（12.24），得到稳态关系

$$U_{av} = E_a = E(2m-1) \tag{12.25}$$

电枢电流在平均值周围波动的幅值可以通过调制因子、电枢阻抗、供电电压、开关频率计算。根据图 12.15，电流在期间［$t_1 .. t_2$］变化为$i_a(t_2) - i_a(t_1) = 2\Delta I$，从式（12.22）得出

$$2\Delta I = i_a(t_2) - i_a(t_1) = t_{ON}\frac{E-E_a}{L_a} = \frac{TE}{L_a}m(2-2m)$$

求出

$$\Delta I = \frac{TE}{L_a}(m-m^2) \tag{12.26}$$

稳态时，电枢电路中，电动势和调制因子满足（$2m-1)E = E_a$。电流的平均值在相邻的开关周期相等。在周期 T 中电流瞬时值围绕平均值波动，波动幅度 ΔI 在表达式（12.26）中给出。开关桥的波动频率$f = 1/T = \omega/2\pi$ 决定了电流波动的频率。频率f和角频率 $\omega = 2\pi f$ 称为开关频率，换相频率。换相频率非常高时，电流波动很小。可以忽略脉宽调制序列的交流分量，可以认为电机由理想电压源$U_{av} = (2m-1)E$ 提供，电压值由调制因子决定，且电源不包含交流分量。

在开关频率$f=1/T$时分析电压和电流分量可以更加细致的分析电流脉动。交流电流和交流电压的比值由电枢绕组的阻抗决定。即，$|I(\mathrm{j}\omega)/U(\mathrm{j}\omega)|\approx|1/L_a(\mathrm{j}\omega)|$。考虑电压序列，$+E$和$-E$在周期$T$中重复，正向脉冲时间$t_{ON}=T/2$，频率为$f=1/T$的交流电压分量为$V_1=(4/\pi)E$。电枢电流的谐波分量幅值为$I_1=V_1/L_a\omega=(4/\pi)E/(2\pi L_a f)=(2/\pi^2)E/(L_a f)\approx 0.2026E/(L_a f)$。这个过程忽略了更高频率的谐波电压分量，电压不是按照正弦函数变化。取而代之，电枢电压包含一系列频率$f=1/T$的谐波分量，也包括频率f的奇次分量。

通过表达式（12.26），电流的脉动能够分析的更加准确。脉动ΔI在调制因子$m=0.5$时取得最大值，最大的脉动值为

$$\Delta I=\frac{TE_i}{4L_a} \tag{12.27}$$

利用上面的结果，必须考虑图12.12中的开关状态只利用了其中的两种：$S_1=S_4=$ON和$S_2=S_3=$ON。在表12.1中，还有两种开关状态$S_1=S_3=$ON和$S_2=S_4=$ON，这两种开关状态的输出电压为零。开关状态的控制能够利用这两种输出电流为零的状态。在这种情况下，t_{ON}时间的表达式和调制因子的定义发生改变。当直流电机需要正向的电枢电压时，电压序列由$+E$和0构成，平均电压在$+E$和0之间。当直流电机需要负向的电枢电压时，电压序列由$-E$和0构成，平均电压在$-E$和0之间。更多的脉宽调制技术将不在本书中介绍。

图12.16给出了电源通过开关桥电路提供的电流，标记为i_u。电源电流由电枢电流的瞬时值i_a和开关状态。对角线上的开关S_1-S_4导通时，电源E的正极通过开关S_1流向电刷A，负极通过开关S_4流向电刷B。因此，开关桥的输入电流由一系列脉冲的组成，幅值由电枢电流决定，极性由开关状态决定。

问题（12.8）：已知L_a，T和E，$E_a=0$和$R_a=0$，供电电源如图12.15所示，求出电枢电流的波动和幅值。

解答（12.8）：因为平均电压与电动势相等，正向脉冲的开通时间$t_{ON}=T/2$。在第一个半周期，$L_a\mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t=+E$。因此，电流的变化是线性的。同样的分析适用于第二个半周期。电枢电流相对平均电压的波动幅度为ΔI，在第一个半周期，电流从$-\Delta I$增加到$+\Delta I$。变化是线性的，$\mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t=2\Delta I/(T/2)=E/L_a$，因此，$\Delta I=ET/4L_a$。

问题（12.9）：控制图12.12中的开关桥电路按照如下的方式：保持开关S_4常闭，开关S_3常开。在周期T的开始阶段，开关S_1导通。在时间$t_{ON}=mT$结束时，开关断开。在余下的半个周期$T-t_{ON}$，开关S_2导通。开关桥通过恒定的电源E供电。求出输出电压的平均值和电流的脉动值。

解答（12.9）：输出电压u_i是周期为T的周期性序列。在每一个周期的第一部分，在t_{ON}期间，电压的瞬时值为$+E$。在一个周期中的其他时间$T-t_{ON}$，开关S_2和S_4导通，输出电压为零。平均电压为$U_{av}=[(t_{ON})\cdot E+(T-t_{ON})\cdot 0]/T=(t_{ON}/T)E=mE$。电流脉动可以通过从等式（12.23）~等式（12.26）的过程计算出来。与先前的分析不同，输出电压从$+E$和$-E$变为$+E$和0。电枢电流的脉动为

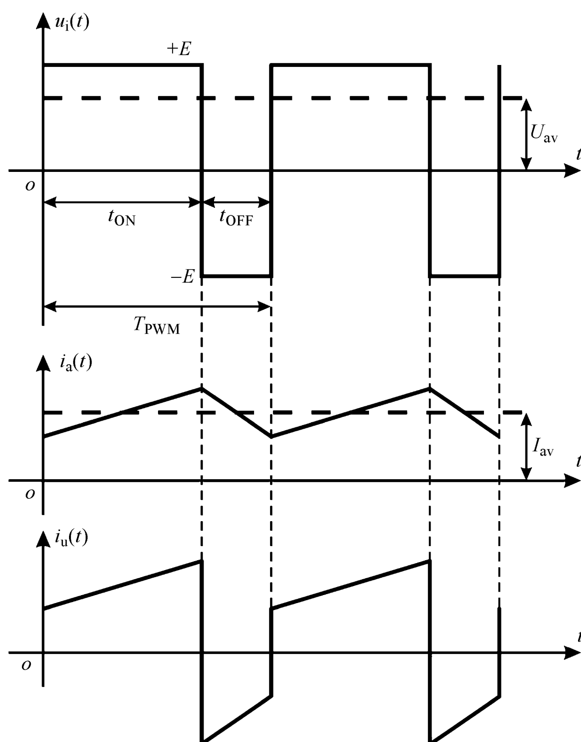


图 12.16　PWM 控制的直流电机供电电压时电枢电压、电枢电流、电源电压的变化

$$\Delta I = \frac{TE}{2L_a}(m - m^2)$$

12.13.6　功率变换器的拓扑结构

直流电机通常采用可连续调压的直流电源供电。电压应该满足设定的机器工作模式。图 12.12 中的开关桥电路绘制出了静态功率变换器无损的变换电压和电流的原则。实际静态变换器还有图 12.12 没有绘制出的部分。实际中的静态功率变换器包括开关的控制电路、微控制器、辅助电源（给电子电路供电），将主电网的交流电转换为直流电 E 的二极管整流器、保护设备、通信设备和其他辅助设备。给电机供电的一次侧侧电源为低压交流配电网络。交流配电网络的频率为 50Hz。三相交流电的线电压有效值为 400V，低功率的功率变换器只需要单相 220V 供电。交流配电网络的电压不能够给直流电机直接供电。因此，需要用到静态电源变换器，变换器的任务将交流的电压和电流变换为直流的电压和电流给电枢绕组和励磁绕组供电。在自动化载具和自动化设备不与交流电网相连的情况下，电池能够提供直流电但是电池电压不能满足直流电机供电的需求。在这种情况下，有必要利用静态功率变换器将电池的恒压直流电转换为可变的直流

电，电压按照直流电机所需的电压连续变化。

一般来说，直流电机从一次电源获得电能，一次电源可以是电池，单相交流电源，三相交流电或者其他的电压和电流系统和形式。一次电源很少能够根据电机的需求去调整。因此，有必要在一次电源和电机的端口之间安装静态功率变换器。静态功率变换器的作用是将一次电源的电能转换为实际电机运行方式所需的方式的电能。

图 12.17 绘制出了给直流电机供电和控制的晶体管开关功率变换器的简要结构。这种变换器在实际中经常见到。（D）部分绘制出了开关桥的四个功率半导体器件。开关桥与图 12.12 中的相同。每一个 IGBT 与一个续流二极管相并联，续流二极管使得电流可以从发射极流向集电极。二极管整流器，如图 12.17 中（A）部分所示，将主电网的三相交流电转换为直流电 E。图 12.17 的（B）部分包含一个串联电感和并联电容用于给输出电压滤波。变换器的这一部分被称为中间直流电路或者直流链。中间直流电路的电压是恒定的，它代表开关桥的输出电压 E。

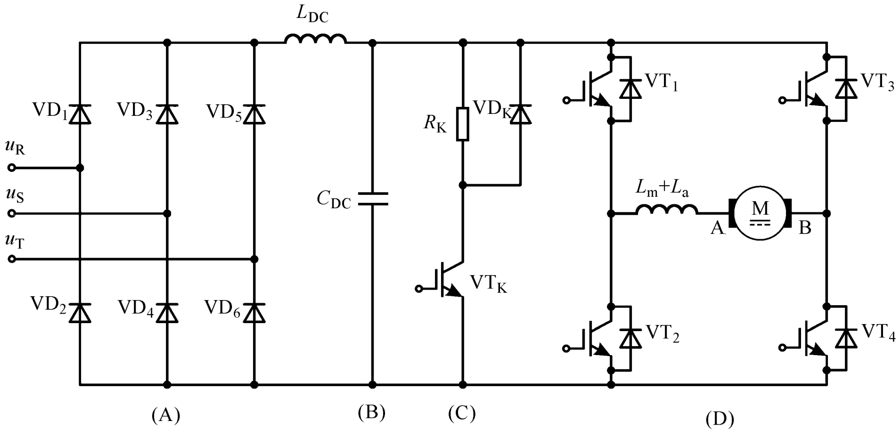


图 12.17　晶体管开关功率变换器的拓扑结构

图 12.17 中，（C）部分包含一个晶体管开关，当它导通时，能够将电阻并联到电容上。通过导通第五个晶体管开关，直流链的电压施加在电阻上。电阻上的电流起到了减小直流链电压和将部分能量转换为热量的作用。这在直流电机工作在第二和第四象限时是必要的，即，当转矩和转速相反时，电机工作在发电机模式。在发电机模式，电枢绕组不能消耗电能。电机此时相当于电源，它将向开关桥式电路回馈能量。换句话说，图 12.17 中电能从右向左流动。

在偶数象限，直流电机制动并将机械能转换为电能。这种方式获得的电能称为制动能量，因为它通过减小机械运动和机械子系统的动能来获得。电路的电流相反，开关桥电路不能从中间直流电路获得能量。开关桥式电路将能量分配给中间直流电路中的元件。由于平均电流i_u的变化，电流从开关电路给直流链式电路充电。因此，直流链中的电容两端电压升高。电容获得能量无法回馈到交流电网。要使电路中电流回馈到电网，

则整流器的电流需要反向，但是图 12. 17 中（A）部分的二极管组成的三相整流电路只能实现电流从阳极流向阴极，而不能使电流从阴极流向阳极。因此，制动能量不能够回到主电网，而是保存在直流链电路中。大量的电能累计在电容中，使电容的能量增加到 $W_c = 1/2CE^2$。E 的大幅增加将会损坏电路元件。因此，制动能量不可以累积。通过使第五个晶体管导通，大功率的电阻与中间直流链电路相并联，制动能量消耗在电阻中。这个过程使用的元件称为制动设备或者动态制动设备。在图 12. 17 中，动态制动设备标记为（C）。

使用功率晶体管的静态功率转换器相比于其他方案存在优势。因此，静态功率变换器得到了广泛的引用。它们的引用仅仅受到功率半导体的额定电压和电流的限制。现在，商用的晶体管电压可达 6kV，电流可达 2～3KA。实际开关功率变换器的功率限制超过 1MW，包含了所有直流电机的应用场合。

20 年前，20 世纪末期，功率晶体管的功率限制只能达到数十千瓦。在那个时候，功率晶体管的电压和电流不足以满足大功率应用的要求。为了制造大功率静态功率变换器，晶闸管㊀被广泛应用。在功率晶体管出现之前，四层半导体设备广泛使用。现在的晶闸管的额定电压和电流也超过功率晶体管的额定电压和电流。然而，设计利用晶闸管的静态功率变换器不是一件简单的任务。功率晶体管能够任意地开通和断开，晶闸管则不能。晶闸管能够通过门极脉冲导通，但是阳极到阴极的电流为零时才能被关断。因此，采用晶闸管的静态功率电源与采用晶体管的静态功率电源结构不同。

用于大型直流电机供电的静态电源采用晶闸管时的典型拓扑结构如图 12. 18 所示。晶闸管拓扑电路在历史上最先出现，在一些早年安装的工业系统和其他需要控制大功率直流电机的场合还是可以看到采用晶闸管构成的静态电源。

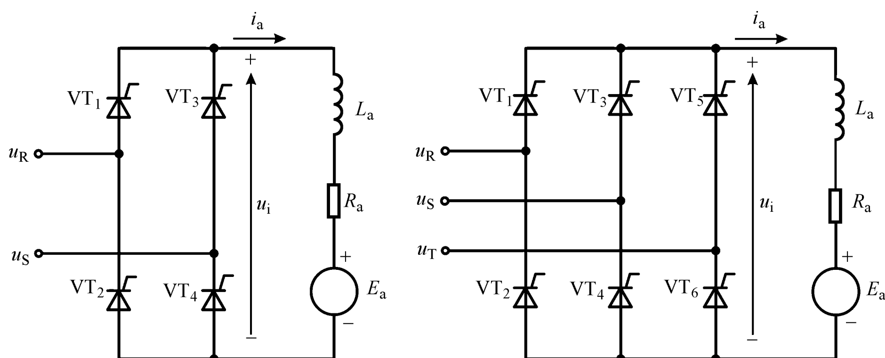


图 12. 18　晶闸管转换器的拓扑结构：（左）单相供电和（右）三相供电

㊀ 晶闸管有三个极。它们的阴极和阳极导通开关电流，第三个极，门极，作为控制极。当 $u_{ak} > 0$ 时，门极施加很小的正向电流就能使晶闸管开通。传统的晶闸管不能通过控制极来关断。门极可关断的晶闸管在门极施加很大的负向电流时关断。因此，晶闸管的应用与辅助电路联系紧密，这样限制了晶闸管的应用。

第 13 章　直流电机的特性

从事直流电机方面的工作需要了解直流电机电气和机械特性、参数和限制。这一章将介绍和解释额定量的概念和讨论在连续稳态时最大允许的电流。无论是在稳态还是暂态，这些电压和电流可以被定义为$T_{em}-\Omega_m$平面的安全操作区域。对于第一次接触电机的读者，本章将介绍额定[⊖]电流、额定转矩、机械特性、自然特性、额定转速、额定功率的概念。电机在高速运动的场合需要减小励磁磁通，本章将会介绍弱磁和恒定磁通时电机的特性以及温度限制和移除能量转换中的热量。另外将分析，短期的过载运行。直流电机的能量转换将会在本章介绍。本章将会详细介绍$T_{em}-\Omega_m$平面的稳态安全操作区域，或者称为利用特性。同时也将介绍$T_{em}-\Omega_m$平面的暂态安全操作区域，或者称为暂态特性。本章都是以他励直流电机为例介绍。

13.1　额定电压

电枢绕组的额定电压是长期施加在绕组端口上不造成损坏和加速电气绝缘老化的最高的电压。在一些场合，电压能够短时超过额定电压而不造成损坏。

电气绝缘将绕组和安放绕组的槽隔开。另外，电气绝缘也将导体与导体隔开。绝缘的损耗将会使导体之间、绕组端部之间、磁路之间发生短路。上述的短路将会造成电机的永久损坏和电机运行的中断。大部分场合，短路后电机必须送回工厂维修。

绝缘中的电场强度与供电电压成正比。绝缘用额定电压U_n或者损坏电压U_{max}分级。

损害电压将会瞬间损害绝缘。在施加电压时，电场强度将会超过材料的介电常数，从而损害绝缘。非导电材料的累计电离将会使两根导体短路，绕组端部，绕组与电机的接地部分之间发生短路。

额定的电压低于损害电压。施加给电枢的电压大于额定电压但是小于损害电压时不一定导致电机损害。超过额定电压时，增大的电场将会使绝缘材料降级和加速老化。这种现象将会使绝缘的使用寿命减小。绝缘老化牵涉到电机内的电气、化学、热过程。在大部分场合，电压维持在额定电压的范围内，绝缘材料的期望寿命为 20 年。长期的超额定电压 8% 操作将会减小绝缘寿命。

⊖ 在电机中，额定电压、额定电流的概念被广泛应用。额定值的参考值通常为与热应力、机械、电气和其他应力的量，如果超过这些值，将有可能损坏电机、变压器或者其他电气设备，或者增加使用电器的风险和减少使用寿命。额定值通常是生产厂家设定的使用的最大允许值。使用中，实际电压或者电流长时间超过额定电压和电流将会对电机的绕组、磁路或者其他重要的部件造成永久损害。对于额定电流，实际电流能够短期的超过额定值。额定值通常取小于损害设备的值。这样做的目的是设定安全的范围。

13.2　机械特性

机械特性给出了稳态时（电机的速度、电流、磁通保持恒定）旋转运动的转速与电磁转矩的关系。对于他励直流电机，励磁绕组和电枢绕组单独供电，机械特性的表示式如下：

$$T_{em} = k_m \Phi_f \frac{U_a}{R_a} - \frac{k_m k_e \Phi_f^2}{R_a} \Omega_m$$

13.3　自然特性

自然特性是指电机的供电电压等于额定电压时电机的机械特性。

13.4　额定电流

额定电流是指连续工作状态下最大允许的电流。即，额定电流是长期允许的最大电流，同时不会造成任何过热、损害、故障或者加速老化。在交流电机中，额定电流代表额定电枢电流的有效值。

电机中绕组的电流产生的热量，使得导体和绝缘的温度升高。绕组中电路产生的焦耳效应与电流的平方成正比。电机的温升与产生的热量成正比。电机与外界的环境之间的温度差越高，电机与周围环境的热传递越快。热量传递的三种方式为传导、对流、辐射。热传导发生在电机与电机的基筒和罩壳之间。热对流依靠自然风或者风扇强制冷却。热辐射发生在电机表面，依靠绝对温度。一台发热电机向外界环境辐射的热量大于电机通过辐射从外界吸收的热量。

当电机的表面的温度大于环境温度，电机的热量传递到周围环境中，从而冷却。热交换功率P_T代表一秒内传递到环境中的焦耳热。热交换的过程是非线性的。功率P_T与温度差成正比，$P_T = \Delta\theta / R_T$，R_T是电机与所处环境的热阻。P_T的单位为 W，温度 $\Delta\theta$，单位为℃，热阻的单位为℃/W。当热传递功率P_T等于电机的损耗功率，电机的温度达到平衡。电机的总热损耗为P_γ。当$P_T = P_\gamma$时，电机的温度保持恒定。电机的损耗越大，稳态时电机的温度越高。对于分析的电机，电枢电流I_a的增大会使焦耳热增加。焦耳热与电流的平方成正比，过多的热量将会损害电机的关键部件，如电枢的绝缘。

电机的绝缘由纸张、玻璃纤维、漆或者其他材料组成。绝缘将导体与导体之间隔离开来，避免导体之间短路。如果温度超过最高的允许温度，绝缘材料将会损害。绝缘热阻等级 A 代表绝缘在温度超过 105℃时损坏，绝缘等级 F 代表绝缘在温度超过 155℃时损坏。因此，绝缘等级为 F 的直流电机有更高的允许温度和额定电流。当直流电机在额定电流下达到稳态，损耗产生的热量使得电机温度到达温度限制。当电流超过额定电流，电机在连续工作状态时会过热。同时，温度将会超过热限制并且损害电机的绝缘和

其他重要部件。除了绝缘，电机中还有其他部件对温度很敏感。永磁体、铁磁材料甚至是电机的钢结构件都会受到高温的损害。当铁磁材料加热到居里温度，铁磁材料会失磁。永磁体在高温时会失磁。钢结构件例如转轴和轴承会因为热膨胀受到损害，钢特性的改变，高温时轴承的润滑失败。

额定电压I_n是连续工作不会使电机损坏、故障，并且不使电机寿命减小的最大的电枢电流I_a。

13.5 热模型和间歇工作

电机的热交换导致磁路和绕组温度的升高。电机比环境更热，它将热量传递给环境。如果损耗产生的热量等于传递给环境的热量，系统达到稳定状态，温度不会改变。换句话说，加热和散热的热量相同，从而达到稳定的温度。电机关键部件允许的最大温度由电气绝缘、磁路、绕组、轴承、基座决定。电机的温度变化由热阻R_T和热容C_T决定，这两个参数将在后面介绍。热阻决定电机散发到环境中的热量，热容决定电机中累计的热量。如果热阻非常大，电机能够承受短时的过载，在过载条件下，电流超过额定电流，电机中损耗增加，产生的热量超过散发的热量。过多的热量会累计在电机的热容中，温度会升高。在热容很大时，在短时内不会超过限制。在这段时间，电枢电流超过额定值，它不会造成任何损坏。因此，根据电机热参数和电流幅度，短时过载是允许的。热阻、热容、功率损失、温度变化绘制在图 13.1 中。

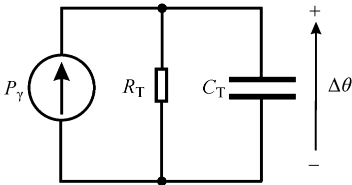


图 13.1 电机的简化模型

电机由铜、铝、绝缘材料构成。电机的原材料有各自不同的特性热量。特性热量代表温度升高 1℃所需的能量。电机材料的质量与特性热量相乘得到电机中这种材料部件的热容，单位为 J/℃。假设电机中各个部件的温度相同，得到了图 13.1 中所示的简化热模型。参数C_T代表所有电机所有部件的热容的总和。在与外界环境没有热交换的情况下，总的热容C_T决定电机温度升高 1℃所需的能量。温度升高的损耗功率为

$$C_T\frac{\mathrm{d}(\Delta\theta)}{\mathrm{d}t}$$

其余的功率损失产生的热量传递到环境中。当电机的温度超过外界环境的温度 $\Delta\theta$，热量散失到环境中的功率，或者称为散热功率为

$$\frac{\Delta\theta}{R_T}$$

热阻的单位为℃/W，热阻决定温度升高 $\Delta\theta$，需要散热功率 $\Delta\theta/R_T$。热量通过对流、传导和辐射转移。热阻取决于电机在环境中的表面积、空气速度、辐射面的表面积，和其他的环境和参数。电机温度的变化由微分方程决定。

$$P_{\gamma}=\frac{\Delta\theta}{R_{\mathrm{T}}}+C_{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}(\Delta\theta)}{\mathrm{d}t} \tag{13.1}$$

第一项代表冷却功率，第二项代表热量累计在电机内的功率。等式推导的前提是电机的各个部分具有相同的温度。值得注意的是方程（13.1）类似并联 RC 电路，电阻为 R_{T}，电容为 C_{T}，供电电流源的电流为 P_{γ}。因此，图 13.1 中的电机热模型类似电流源供电的 RC 电路。电压对应于温度增量 $\Delta\theta$，电流对应于功率损失。

$$\Delta\theta=R_{\mathrm{T}}P_{1}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{13.2}$$

如果 $\Delta\theta(0)=0$，并且功率损耗由 $P_{\gamma}(t)=P_{1}h(t)$ 表示，电机的温度变化表达式如下：

其中，$\tau=R_{\mathrm{T}}C_{\mathrm{T}}$是热时间常数。小型电机的热常数达到数十秒。大型电机的热常数为数十分钟。因此，电机的热过程是相对比较慢的。在图 13.2 绘制出了电机从静止到与环境温度相同的过程。电机工作中产生恒定的热量，根据等式（13.2），温度增量 $\Delta\theta$ 按照自然对数规律上升，温度增量 $\Delta\theta$ 在 3 ~ 4 个时间常数后到达稳态 $\Delta\theta=P_{\gamma}R_{\mathrm{T}}$，其中 R_{T}为热电阻，τ 是热时间常数。

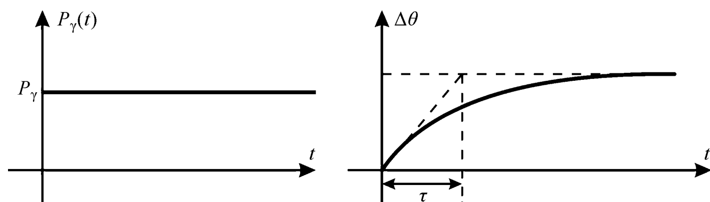


图 13.2　恒定功率损失伴随的温度变化

如果电机的功率损耗随着电流、转矩或者转子转速变化，电机温度的变化相对于功率损失的变化有一定的滞后，滞后性由热时间常数决定。图 13.3 绘制出了电枢电流周期性变化时电机温度的变化。在小段时间内电枢电流恒定，在另一小段时间电枢电流为零。前一段时间内有功率损失，后一段时间没有焦耳热产生。这种工作方式称为间歇模式。在稳态，温度在θ_{MAX}和θ_{MIN}之间波动，在没有负载的情况下，电机最终的温度为环境温度θ_{a}。假定电枢电流恒定的时间无穷长，温度最终变为$\theta_{\infty}=\theta_{\mathrm{a}}+\Delta\theta=\theta_{\mathrm{a}}+P_{\gamma1}R_{\mathrm{T}}$，其中$P_{\gamma1}=R_{\mathrm{a}}I_{1}^{2}$。$\theta_{\mathrm{MAX}}$小于$\theta_{\infty}$，图 13.3 中，$P_{\gamma1}$对应于电流$I_{1}$。在间歇模式，电机的电流可以超过额定电流而不会损害电机。

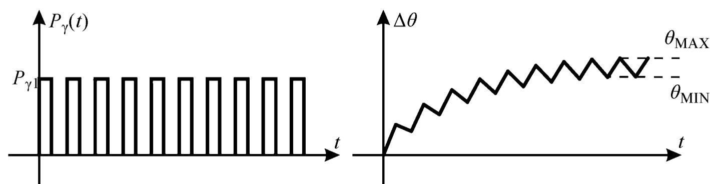


图 13.3　间歇负载时温度的变化

当$I_a > I_n$，功率损失$P_{\gamma l}$将会导致过热。最终，电机的温度将会达到θ_∞，并使电机重要的部件损坏。但是，电机的热容在短时间内允许$I_a > I_n$，能承受更大的功率损失，时间由热时间常数$\tau = R_T C_T$决定。因此，所有的电机都能够承受一定的过载。如果短时间的过载后功率损失变为零，则电机会在余下的时间内将过载过程中累计的热量释放到环境中去。在冷却充分的条件下，短时的过载能够按照图 13.3 中的方式重复。短时间的过载后，电机也可以在下一段过载时间前工作在轻载状况下让电机散热。

当负载转矩和电机电流周期性变化，能够将负载周期分为过载时间和轻载散热时间。如果负载周期的时间小于热时间常数τ，则温度波动$\theta_{MAX} - \theta_{MIN}$非常小。当负载周期远远小于热时间常数$\tau$，则温度波动$\theta_{MAX} - \theta_{MIN}$可以忽略。在这种情况下，温升$\Delta\theta$取决于负载周期内的平均功率。即使电机周期性的过载，只要负载周期内的平均功率损耗小于额定的功率损耗$P_{\gamma n}$，额定功率损耗代表长期工作时的允许的功率损耗。忽略除电枢绕组以外的功率损耗，额定功率损耗$P_{\gamma n} = R_a I_n^2$。负载周期内的短时过载时的功率损耗大于额定功率损耗，电机能够安全操作。图 13.3 中，过载期间累计的热量在功率损耗减小的区间释放到环境中。间歇的温升$\theta_{MAX} - \theta_{MIN}$与热容$C_T$成正比。

根据以上的分析，可以总结出电机在电流超过额定电流的短时间内能够安全运行，过载的时间要远小于热时间常数。过载时间段后，必须提供一个轻载的时间段使得电机有足够的时间降低电机的温度，从而电机可以在下一个时间段内过载运行。负载是一个周期性序列式，电机在重复周期小于电机热常数，平均功率损耗小于正常电流引起的损耗时能够正常运行。

问题（13.1）：额定负载时，电机的稳态温度仅仅比环境温度增加了很少，电机设计的是否合理？

解答（13.1）：不合理。稳态时电机的工作温度很小，说明电机的功率损耗非常小。这意味着电机有足够的空间增加电流密度和磁感应强度。磁通和电枢电流的增加将会提高电机的转矩和功率。因此，该电机能够比额定状态提供更高的转矩和更高的功率。结果，更多的铜和铁用于制造电机。电机变得很贵，同时变得很大很重。同样的负载能够由更小和更轻的电机满足。

问题（13.2）：一台电机不能够长时间运行，在电机接通电源后，电枢电压达到额定电流的两倍。主要的功率损耗是绕组损耗。绕组损耗与电流的平方成正比。铁耗忽略。热时间常数为 60s。求出电机在电枢电流为$2I_n$时能无损工作的时间。

解答（13.2）：工作在电流为$2I_n$时产生的功率损耗为额定功率损耗的 4 倍。因此，电机能够更快的加热。理想的稳态温度是允许温度的 4 倍。允许温度在t_1时达到，$1 - \exp(-t_1/\tau_T) = 1/4$，$t_1 = 17.26\text{s}$。

问题（13.3）：电机的工作模式如下，在 10s 的周期内，电枢电流的幅值为$2I_n$，周期内的其他时间电枢电流为零。绕组损耗与电流的平方成正比。铁耗忽略。热电阻$\tau_T >> 10\text{s}$。求出电机无损工作的电枢电流脉冲最长的持续时间。

解答（13.3）：电机的热时间常数大于脉冲周期（$\tau_T >> 10\text{s}$）。因此，温度的变化非常慢，脉冲周期的温度的变化不大。因此，可以考虑平均功率损失。对于任意的周期

性电流 $i(t)$，焦耳效应产生的功率损失为

$$P_{\gamma(av)} = \frac{1}{T}\int_0^T R_a i_a^2 dt = R_a\left(\frac{1}{T}\int_0^T i_a^2 dt\right) = R_a I_{a(rms)}$$

其中，$I_{a(rms)}$是电流有效值。有效值电流也被称为热等效周期电流 $i(t)$。常数值电路$I_{a(rms)}$流过电阻产生的热效应与周期性电流 $i(t)$ 的热效应相同。如果有效值不超过额定值I_n，电机不会过热。每 10s 电流脉冲$2I_n$的时间为 2.5s 时，等效为有效值为I_n的电流长时间提供给电机。

13.6　额定磁通

励磁磁通Φ_f在转矩给定的情况下，决定了电枢绕组的电流$I_a = T_{em}/(k_m\Phi_f)$。为了获得同样的转矩，磁通越大时，电枢电流越小，产生的绕组损失越小。因此，为了减小电枢电流，可以增加磁通。励磁磁通受到铁磁材料饱和的限制。如果铁磁材料达到饱和，励磁电流的增加使磁通增加很小的幅度。在饱和区域，励磁电流增大的唯一的影响是使励磁绕组的功率损失$R_f I_f^2$增大。磁饱和在磁化曲线$\Phi_f(I_f)$。膝点是磁化曲线线性斜率的终点，膝点后的曲线 $\Delta\Phi/\Delta I_f$很小。膝点的磁通标记为Φ_{fmax}。因为过了膝点，励磁电流的增加只会使励磁磁通增加很小，Φ_{fmax}代表最大的磁通。为了获得转矩T_{em}，磁通用于减小电枢电流$I_a = T_{em}/(k_m\Phi_f)$。在确定的工作状态，磁通Φ_{fmax}是不可利用的。例如，在高速工作时，电动势$k_e\Phi_f\Omega_m$不能超过额定电压。在其他情况，磁通Φ_{fmax}能够用于减小电枢电流。膝点磁通Φ_{fmax}被称为额定磁通，标记为Φ_n。

13.7　额定转速

转子转速影响电枢的电动势。额定转速是电机在额定磁通下的转速，此时额定电动势等于额定电压。因此，在额定磁通下，电机的转速从零增加到额定转速，电动势从零增大到额定电压。

为了避免过电压损害绝缘，电动势不能够超过额定电压。因此，在额定磁通下，电机不能超过额定转速。为了使电动势不超过额定限制，磁通在转速超过额定转速时会变小。

额定磁通下的直流电机，电阻R_a可以忽略，电动势$E_a = k_e\Phi_n\Omega_m$等于电枢电压U_a。在额定转速，电动势与额定电压相等。因此，直流电机的额定转速由等式决定

$$\Omega_n = \frac{U_n}{k_e\Phi_n} \tag{13.3}$$

因为电枢电压不能超过额定值，转速超过额定转速时，磁通就需要减小。否则，电动势$k_e\Phi_n\Omega_m$将会超过正常电压$U_n = k_e\Phi_n\Omega_n$。

对于小型电机，电枢电阻的电压降不能被忽略。因为$U_a = R_aI_a + E_a$，电枢电压和电

动势的差值不能忽略。在这种情况下，额定转速的定义更为精确，此时需要考虑电枢电阻的电压降。额定转速定义为电枢电压为额定电压，额定磁通，额定电流时电机的转速。在这种情况下，电动势$E_a = k_e \Phi_n \Omega_n = U_n - R_a I_n$，额定转速的表达式为

$$\Omega_n = \frac{U_n - R_a I_n}{k_e \Phi_n} \tag{13.4}$$

13.8 弱磁

直流电机的运行需要励磁磁通的变化。以电机超额定转速为例，为了使电动势不超过额定电压的范围，磁通应该减小使$k_e \Phi_n \Omega_m < U_n$。高速时磁通的减小称为弱磁。

另外，转速低于额定转速时，磁通减小有一定的好处。当电机工作在电磁转矩很小的情况下，电流非常小，绕组的损失很小。如果磁通保持在额定状态，磁路中铁耗是首要的能量损失。为了减小损耗，有必要减小磁通。为了保持转矩不变，磁通减小时，根据$I_a = T_{em}(k_m \Phi_f)$。在T_{em}很小的时候时，励磁磁通大幅度减小不会使电枢电路产生显著的增长。正是因为这个原因，轻载状况下磁通减小将会减小能量转换中的损耗。

13.8.1 高速运行

电枢绕组感应出的电动势决定了电枢端口的电压。因此，电动势不能超过额定转速。额定磁通，电压和转速的关系为$U_n \approx k_e \Phi_n \Omega_m$。因此，电机在额定磁通$\Phi_n$，额定转矩下，电动势等于额定电压。转速超过额定转速将会导致过电压。因此，电机的转速超过Φ_n时，励磁磁通将会减小。电机工作在转速$\Omega_m > \Omega_n$时，磁通减小使得电动势不超过额定电压。为了实现这种工作状态，磁通应能够随着转子转速变化。这种变化能够被函数$\Phi(\Omega_m)$ 表示。在额定转速以下，$\Phi(\Omega_m) = \Phi_n$。

转速$\Omega_m > \Omega_n$时，电动势$E_a = k_e \cdot \Phi(\Omega_m) \cdot \Omega_m$。忽略电枢绕组的电阻，假设$E_a = U_n$，转速超过额定转速时

$$\Phi(\Omega_m) \big|_{\Phi > \Phi_n} = \frac{U_n}{k_e \Omega_m} \tag{13.5}$$

根据额定转速的表达式（13.3），得到

$$\Phi(\Omega_m) = \Phi_n \frac{\Omega_n}{\Omega_m} \tag{13.6}$$

表达式（13.6）定义了磁通在转速高于额定转速时的变化情况。磁通与转速成反比。转速超过额定转速的工作区间称为弱磁区间。如果电机工作在转速小于额定转速的情况，磁通能够达到额定励磁磁通Φ_n。因此，在$\Omega_m < \Omega_n$的工作区间称为恒磁通区间。

13.8.2 弱磁时的转矩和功率

图 13.4 的五张图分别描述能够进行弱磁操作的电机磁通、电动势、功率、转矩、电流的变化。转子的转速位于所有图的横轴。

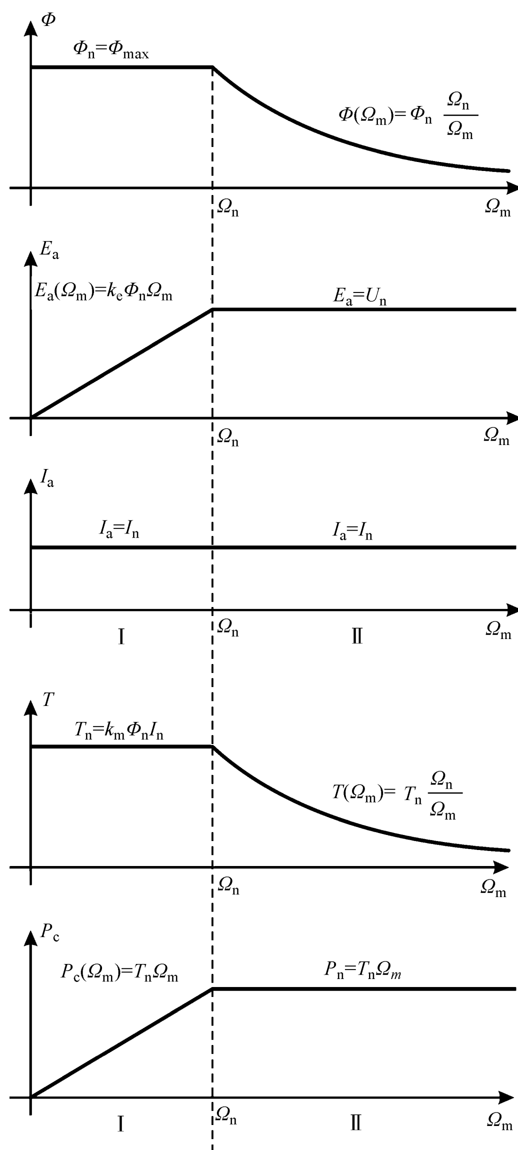


图 13.4　连续负载下，在恒定磁通模式（Ⅰ）和弱磁模式（Ⅱ）下电流，转矩，功率的允许值

值得注意的是，图 13.4 中的可用值或者限制值的变化。即，稳态时不会损害电机的值。因此，任何小于限制值的值也能够使电机正常应用。由于电机的热容，瞬时的电流、转矩、功率可能超过限制值。同时，值得注意的是图中的值为绝对值。转矩、电

流、功率也可能是负值。因此，这里推导的结论适用于电机和发电机场合。图 13.4 相关的结论适用于本书中的所有电机，与交流只有符号的差别。

13.8.3 磁通变化

图 13.4 中的横轴代表转子转速。在转速小于额定转速，励磁磁通维持在最大值，或者额定磁通。当速度超过额定转速，磁通根据双曲线 $\Phi(\Omega_m)=\Phi_n\Omega_n/\Omega_m$减小。电机也能够选用更小的磁通值，但是磁通值不能超过曲线 $\Phi(\Omega_m)$ 中的磁通值。

13.8.4 电动势的改变

电动势根据$E_a=k_e\cdot\Phi(\Omega_m)\cdot\Omega_m$变化。转速小于额定转速，磁通等于额定磁通，电动势与转速成正比。在弱磁区间，$\Omega_m>\Omega_n$，磁通与转速成反比。如果转速增加，电动势保持恒定并且等于额定电压。如果磁通小于（13.5）决定的值，电动势小于额定电压。在弱磁区间，磁通 $\Phi(\Omega_m)=\Phi_n\Omega_n/\Omega_m$。电机工作在转矩和电流很小的情况下，为了减小铁耗，使磁通小于$\Phi_n\Omega_n/\Omega_m$是很有好处的。

13.8.5 电流变化

在稳态，电枢电流不能超过额定值，$I_a^2\leqslant I_n^2$。电流可以是小于额定值的任何电流值，$|I_a|<I_n$。电流超过额定电流时，电机长期操作将会损坏电机的磁路和电路。正是因为这个原因，图 13.4 表明，在任何速度，电机长期运行时的电流必须满足$|I_a|<I_n$。

13.8.6 转矩变化

电磁转矩由磁通和电路决定。在转速低于额定转速的长期运行过程中，磁通和电流能够保持额定值。因此，在这些情况下，可用的电磁转矩$T_n=k_m\Omega_nI_n$，为额定转矩。在速度超过额定转速的情况下，磁通按照表达式$\Phi_n\Omega_n/\Omega_m$变化。因此，弱磁区间的可用的转矩 $T(\Omega_m)=T_n\Omega_n/\Omega_m$，转矩随转速的升高而减小，转矩和转速产生的功率为恒定值。正是因为这个原因，弱磁模式下的可用转矩的变化称为恒功率双曲线。

13.8.7 功率变化

电磁功率转化为的机械功率是转矩和转速的产物。在恒磁通区域，在速度低于额定转速时，可用转矩恒定，可用的功率与转速成正比。这个区域被称为恒转矩区间。在弱磁区间，功率等于额定功率$P_n=T_n\Omega_n$，因为$P_c=T_{em}\Omega_m=\Omega_m(T_n\Omega_n/\Omega_m)=T_n\Omega_n=P_n$。因此弱磁区间的可用功率恒定且等于额定功率 P_n。弱磁区间也被称为恒功率区间。功率P_n是额定功率。

13.8.8 弱磁运行需要的条件

电机往往需要应用在低速大转矩和高速小转矩的场合。以用于电动载具的场合直流

电机为例。为了使重载的电动载具通过陡坡，电机需要提供大转矩。在这种情况下，电机提供大转矩对于爬坡是很重要的，转速可以很小。同样的电动载具也必须在长途平坦的道路（移动阻碍很小）上高速行驶，从而在低转矩下提供高转速。

第一个例子需要低速大转矩，第二个例子需要低转矩高转速。这种需求对应于 $T-\Omega$ 平面的 $T(\Omega)$ 双曲线。曲线 $T(\Omega_m)=T_n\Omega_n/\Omega_m$ 称为恒功率双曲线。永磁直流电机不能运行在弱磁区间。因为没有实用的减小永磁体磁通的方法。因此，永磁直流电机不能超过额定转速。这种直流电机不能工作在恒功率区间。可以利用可变传动比的机械耦合来调节系统转速。当电机不能运行在超过额定转速的情况时，可以利用机械耦合改变传动比，从而在电机转速不变的情况下提高负载转速。在交通工具中，变传动比被广泛应用。内燃机（ICE）汽车装有变传动比齿轮箱。内燃机发动的转矩—速度特性不包括 $T(\Omega)$ 双曲线中的恒功率变化部分。为了实现低速大转矩和高速小转矩的操作，可以通过改变将 ICE 的转矩提供给轮胎的变速箱的传动比实现。不需要额外的变速齿轮，直流电机能够在弱磁区间提供恒功率操作。

13.9　暂态特性

暂态特性是指在 $T(\Omega)$ 平面，电机在短时间内能够正常运行的所有 $T-\Omega$ 点组成的区域。在给定的转速、转矩的峰值取决于励磁磁通 $\Phi_f(\Omega_m)$ 和电枢电流的峰值。在直流电机中，电流的瞬时值受到机械换向器的特性和半导体开关能承受的最大电流决定。暂态特性的例子绘制在图 13.5 中。

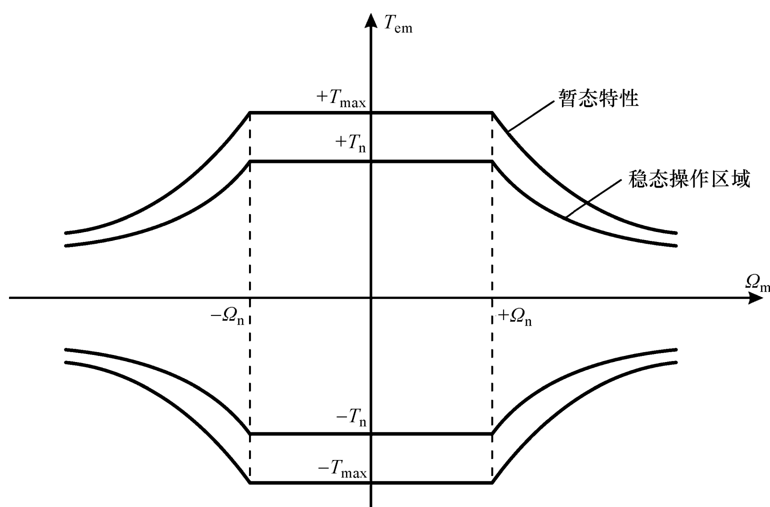


图 13.5　暂态特性和稳态操作区域

13.10 稳态运行区域

稳态操作区是指在 $T(\Omega)$ 平面，电机在长时间内能够正常运行的所有 $T-\Omega$ 点组成的区域。在弱磁区间，稳态操作区受到恒功率双曲线的限制，$T(\Omega_m)=T_n\Omega_n/\Omega_m$，恒磁通区域，转矩的限制为$T_{em}(\Omega_m)=T_n$。图 13.5 中绘制出了稳态操作区间。电机能够四象限运行，稳态操作区间存在于四个象限。

13.11 功率损耗和功率平衡

为了更好地分析直流电机的机电能量转换过程，需要研究电机的功率流向和功率损失。功率平衡方程包含磁路的铁耗，绕组的焦耳效应（铜耗），旋转产生的机械损耗（机械子系统的损耗）。

补偿绕组的损耗和辅助极的损耗被忽略，这些部件并不存在于每一台直流电机。推导功率平衡时，电机处于稳态，电枢电流，励磁磁通，转矩转子转速不会发生变化。图 13.6 给出了功率平衡。单独的功率部分和损耗将在后面讲述。

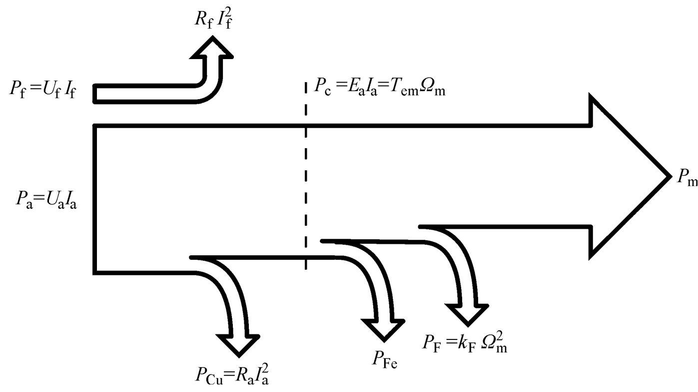


图 13.6 功率平衡

13.11.1 供电功率

电源给励磁绕组和电枢绕组供电。电功率为$P_f+P_a=U_fI_f+U_aI_a=R_fI_f^2+(R_aI_a^2+E_aI_a)$。

13.11.2 励磁绕组的功率损耗

由于焦耳效应，励磁绕组的功率损失转化为热量，励磁绕组的功率损失称为励磁绕组的铜耗，大小等于$R_fI_f^2$。

13.11.3　电枢绕组的功率损耗

由于焦耳效应，电枢绕组的功率损失转化为热量。电枢绕组的功率损失称为电枢绕组的铜耗，大小等于$R_a I_a^2$。

13.11.4　机电能量转换的功率

功率$P_c = E_a I_a = (k_e \Phi_f \Omega_m) I_a = (k_m \Phi_f I_a) \Omega_m = T_{em} \Omega_m$时机电能量转换中的能量。电功率$E_a I_a$转换为机械功率$T_{em} \Omega_m$，都等于$P_c$。

13.11.5　铁耗（P_{Fe}）

铁耗取决于磁感应强度 B 和磁感应强度变化的频率。因此，铁耗产生在磁路中磁场脉动和旋转的区域。在另一方面，磁路中的磁场的大小和方向均不变化的时候，铁耗等于零。

直线电机中，定子的励磁绕组中通入直流电。永磁体用于取代励磁绕组。定子磁路的磁场不会产生铁耗。

直流电机的转子在定子磁场中旋转。因此，磁场方向与转子磁路相互旋转。磁感应强度变化的频率取决于转子转速。由于磁感应强度的变化，涡流会导致磁滞和损耗，从而产生铁耗。铁耗在数学模型中没有考虑。功率平衡方程中考虑铁耗。铁耗取决于励磁磁通的平方。损耗取决于转子旋转速度，磁场脉冲的频率与旋转角速度对应。转子中的铁耗为P_{Fe}。在电枢绕组在没有连接的情况时候，电枢电流为零，电枢绕组还是存在铁耗。

铁耗消耗的能量来自转轴，通过机械子系统。直流电机在电机模式下，制动转矩$T_{Fe} = P_{Fe}/\Omega_m$来自电磁转矩T_{em}，使传递给工作机的转矩减小。转矩T_{Fe}是转子涡流和励磁磁场的产物。转矩T_{Fe}阻碍所有旋转方向的运动。

13.11.6　机械损耗（P_F）

在电机旋转的过程中，一部分能量用于克服轴承的摩擦和空气阻力[⊖]做功。电机的端部由转动轴承支撑转子重量。轴承的作用使转子更加自由的旋转。轴承的摩擦和转子的摩擦非常低，它对机械损耗的作用很小。在旋转过程中，转子表面积与空气的接触面产生空气阻力。电机通过转子轴上安装的风扇用于散热。在旋转过程中，风扇提供一个轴向的气流帮助移除电机的热量，并提供更好地冷却。在这种情况，空气阻力更大。除了转子的空气阻力，风扇冷却电机将会造成制动转矩风扇的损耗。

⊖ 空气阻力的表达式为$T_{air} = k_{air}\Omega_m^2$。转子内部旋转的内阻移动阻碍产生的功率与转子速度的三次方成正比，即，$P_{air} = k_{air}\Omega_m^3$。

13.11.7 旋转造成的损耗（$P_{Fe}+P_F$）

旋转过程产生的损耗等于旋转损耗，不管是电气或者机械损耗。考虑直流电机，旋转引起的损耗等于$P_{Fe}+P_F$。球状轴承的摩擦，空气阻力，制动转矩T_{Fe}产生铁耗㊀，即，电机内部产生阻碍旋转的转矩。内部阻碍旋转运动的阻力的转矩的表达式$T_F=k_F\Omega_m$。

铁耗由磁滞和涡流产生。转子磁路中磁场变化的角频率ω_m由转子转速Ω_m。从先前分析的电机㊁，$\omega_m=\Omega_m$。转子中的铁耗功率$P_{Fe}=k_V\omega_m^2+k_H\omega_m$，制动转矩$T_{Fe}=k_V\omega_m+k_H$。磁滞损耗比涡流损耗小，因此，$T_{Fe}\approx k_V\omega_m$。制动转矩$T_{Fe}$由转子磁路中的涡流产生，$T_{Fe}=k_F\Omega_m$，这不包括空气阻力转矩$(\Omega_m)^2$。转矩$T_{Fe}$用于分析与转速成正比的运动阻抗。在这种情况，旋转引起的功率损耗的表达式$P_F=k_F\Omega_m^2$。

13.11.8 机械功率

电机输送给工作机械的功率P_m。机械功率等于电磁功率减去旋转损耗。机械功率等于$P_m=T_m\Omega_m=P_c-P_{Fe}-P_F=T_{em}\Omega_m-T_{Fe}\Omega_m-k_F\Omega_m^2$。功率通过转轴传递。工作机的转矩（$T_m=P_m/\Omega_m$）阻碍运动，与运动方向相反。

问题（13.4）：考虑直流电机的磁通为额定磁通，电枢电流$I_a=0$。电机按照恒定的额定转速旋转。转子通过工作机旋转维持旋转。功率转换过程中$P_c=E_aI_a$等于零。转子中是否还有其他损耗？转子上是否还存在其他转矩？当转子与定子解除连接后，电机转速的变化？

解答（13.4）：转子在定子励磁中旋转。转子磁路中的相对运动将会导致磁滞和涡流损耗。涡流损耗产生于与励磁绕组产生的磁感应交变的转子中。因此，转矩T_{Fe}产生少量的力。阻碍运动的转矩等于$T_{Fe}=P_{Fe}/\Omega_n$，P_{Fe}是转子的铁耗。为了保持电机旋转，这些转矩通过驱动机提供。如果电机与工作机解除连接，电机因为制动转矩会逐渐减速。转子中的铁耗将会加热转子并消耗掉动能$\frac{1}{2}J\Omega_n^2$。

13.12 额定值和标称值

直流电机的额定参数在先前介绍。额定电流是指电机连续工作时不会造成电机损失和故障时允许的最大电流。额定电压是指长期施加不会破坏和加速老化电气绝缘的最高电压。按照相同的方式，定义其他变量的额定值。每一种变量的额定值都应该是连续运

㊀ 在直流电机、异步电机、同步电机中，转子磁路损耗和它们在功率平衡的位置各不相同。

㊁ 本章分析的直流电机定子磁极只有两极（转子磁极也只有两极），因此，它们只有一对磁极。多极电机将在后面的章节讲述，对于直流电机，$p>1$，磁感应强度变化的角速度ω_m与转子转速Ω_m的关系为$\omega_m=p\,\Omega_m$。

行时的最大允许值。额定值是考虑电机特性的重要参数。

与额定值相同，标称值同样被广泛采用。标称值小于等于额定值。标称值一般标记在电机的铭牌或者与电机相关的数据资料中。标称值是生产厂分类的。通过对标称值的分类，生产厂商给出警告：电机长期超过标称值使用时将会损坏。因此，标称值不能超过额定值。生产厂商能够给出小于额定值的标称值。这样的标称方式是出于经济性的考虑。例如，一家生产厂家能够大规模生产 100kW 电机，厂家接到了生产一台 90kW 电机的订单。单独生产一台电机成本很贵，所以生产厂商会生产一台 100kW 的电机，贴上标称值为 90kW 的铭牌，从而完成订单。即使实际上电机的功率能更大，生产厂家给出了警告：电机在 90kW 时能够长期安全运行。

13.13　铭牌值

电机的基本数据记录在电机的铭牌上。铭牌数据包括额定转速、额定功率、额定电流、额定电压、额定转矩。铭牌数据包括：

1）标称电枢电流（I_a）；

2）标称励磁电流（I_{fn}）（最优）；

3）标称电枢电压（U_n）；

4）标称励磁电枢电压（U_{fn}）（最优）；

5）标称转速；

6）标称转矩；

7）标称功率；

8）标称功率因数（交流电机）；

9）定子三相绕组的连接方式（交流电机）。

标称速度的单位表示为转每分［rpm］。因此，n_n［rpm］$=\Omega_n$［rad/s］·（30/π）。标称转速与标称工作状态相关。当标称工作状态对应于额定状态时，标称转速等于额定转速。

直流发电机的额定转速对应于额定磁通，电机提供额定电压和额定电流给负载。发电机电流产生电压降R_aI_G。电压$U_n=k_e\Phi_n\Omega_n+R_aI_a=k_e\Phi_n\Omega_n-R_aI_G$，发电机的额定转速产生$E_a=U_n+R_aI_n$。因此，$\Omega_n=(U_n+R_aI_n)/k_e\Phi_n$。

直流电动机的额定转速对应于额定磁通$\Phi=\Phi_n$和额定电流。电动机电流从电源流向电动机。因此，$U_n=E_a+R_aI_n$。$U_n=k_e\Phi_n\Omega_n+R_aI_n$。在额定转速下，电动势$E_a=U_n-R_aI_n$。因此，$\Omega_n=(U_n-R_aI_n)/k_e\Phi_n$。

问题（13.5）：电机的发电机参数$U_n=220\text{V}$，$I_n=20\text{A}$，$R_a=1\Omega$，$k_e\Phi_n=1\text{Wb}$，求出额定转速。

解答（13.5）：发电机的额定转速$\Omega_n=(U_n+R_aI_n)/k_e\Phi_n=240\text{rad/s}$，对应于$n_n=2\,292\text{r/min}$。

问题（13.6）：已知电动机的参数$U_n=110\text{V}$，$I_n=10\text{A}$，$R_a=1\Omega$，$k_e\Phi_n=1\text{Wb}$，求

出额定转速。

解答（13.6）：电动机的额定转速$\Omega_n=(U_n-R_aI_n)/k_e\Phi_n=100\text{rad/s}$，对应于$n_n=955\text{r/min}$。

直流电机的定义可能包含电枢电阻的电压降。在这种情况下，直流发电机和直流电动机的额定转速的计算方式可能不同。

电机的额定转速为额定电压和磁通的比值，$\Omega_n\approx U_n/(k_e\Phi_n)$。这种定义忽略了电压降落$R_aI_a$。额定励磁下，比值为$U_n/(k_e\Phi_n)$的转速产生的电动势等于额定电压。忽略额定电压，得出额定转速$U_n/(k_e\Phi_n)$，额定电压，额定电流和额定磁通下的旋转转速与求出的额定转速$U_n/(k_e\Phi_n)$相近。采取近似计算，$U_n=R_aI_n+k_e\Phi_n\Omega_n\approx k_e\Phi_n\Omega_n$，得出额定转速$\Omega_n=U_n/(k_e\Phi_n)$，计算出的额定转速高于额定状态下的直流发电机转速，低于额定状态下的直流电动机。

在所有忽略电阻R_a的场合和电阻未知的情况下，设定$U_n\approx k_e\Phi_n\Omega_n$，额定转速$\Omega_n=U_n/(k_e\Phi_n)$。

在解决R_a已知的问题时，必须考虑电压降落R_aI_a。此时不会做出近似计算$\Omega_n\approx U_n/(k_e\Phi_n)$。电动机的表达式$\Omega_n=(U_n-R_aI_n)/k_e\Phi_n$，发电机的表达式$\Omega_n=(U_n+R_aI_n)/k_e\Phi_n$。

第 14 章　感 应 电 机

这一章主要介绍感应电机的操作原理，以及定转子相关结构的基本数据。这一章的内容包括感应电机结构的基本信息，对定子绕组、转子短路笼型绕组，以及定转子的短距分布磁路进行描述和分析，复原建立三相定子绕组旋转磁场的基本原则。感应电机的基本操作原则，将会以一个绕线转子的简化电机为例说明。通过对转矩表达式的详尽阐述，可以预测机器机械特性的基本参数。为研究感应电机的电磁参数，第 15 章主要研究其对应的数学模型，并应用在下一个章节中。第 16 章主要介绍稳态运行及等效电路、相关参数、机械特性、损耗与功率平衡。第 17 章将主要介绍感应电机的变速运行，以及针对恒频感应电机和由三相 PWM 逆变器馈电的变频感应电机进行介绍和分析。

14.1　结构和运行规则

感应电机的定子由三相绕组组成。三相磁轴线在空间依次旋转 $2\pi/3$。如果定子相绕组通入同幅值同频率ω_e的正弦电流，并且它们的起始相角都互差 $2\pi/3$，则电机内的磁场会旋转，并维持幅值不变。磁场旋转的速度由源电压的频率ω_e决定。当感应电机是由工频 $f=50\text{Hz}$ 的电网供电时，磁场旋转的速度是 $100\pi\text{rad/s}$。感应电机的转子是一个短路的笼形绕组。若转子的旋转速度和磁场相同，它们将同步运动，这样两者之间就没有相对位移。如果是这样，转子绕组中就没有磁通的变化，也不会感应出电动势。基于此，短路绕组中也就不会有电流。磁场旋转的速度称作同步速度，用Ω_e表示。这样，当磁场旋转速度Ω_e与转子速度存在一个差值$\Omega_{slip}=\Omega_e-\Omega_m$时，转子中就会出现磁通的变化。感应出电动势后，就能在短路的笼形转子绕组中形成电流。转子电流的频率ω_{slip}取决于速度差Ω_{slip}，也被称作转差速度。角频率ω_{slip}被称作转差频率。在两极电机（即极对数 $p=1$）中，$\omega_{slip}=\Omega_{slip}$。转子电流和定子磁场联系起来并相互作用，就得到电磁转矩T_{em}。这个转矩总是试图将转子拖入同步速。当$\Omega_{slip}=\Omega_e-\Omega_m>0$ 时，转矩趋向于使转子速度增加，从而使转子的转动速度更接近同步速。

图 14.1 给出了一部感应电机的内部结构图。感应电机的额定参数$U_n=400\text{V}$，$f_n=50\text{Hz}$，$P_n=4\text{kW}$，$n_n=1450\text{rpm}$。数字（1）代表的部分，是与机器适配的金属外壳。数字（9）表示的环，用于电机的起重与运输。滚珠轴承配备在轴（19）的两侧末端，它们的标号分别是（6）和（7）。位于前端的轴承被装配在轴承盖中。（16）是转子磁路，转子导体大部分是将铝灌入倾斜而非笔直的转子槽中。转子导条在转子中被铝环（17）短路，铝条向外延伸成小扇叶，用于产生使电机降温的气流。定子导体多由铜制成，且外面用电绝缘材料包裹。它们放置在定子磁路（13）中。在电机后侧，可能会装备有一个风扇，用以产生一个沿着电机外侧金属壳的气流。这种帮助电机进行热量散发的方

法叫做自冷却。自冷却不适用于电机高速运行，因为这样风扇会发出噪声并产生损耗。

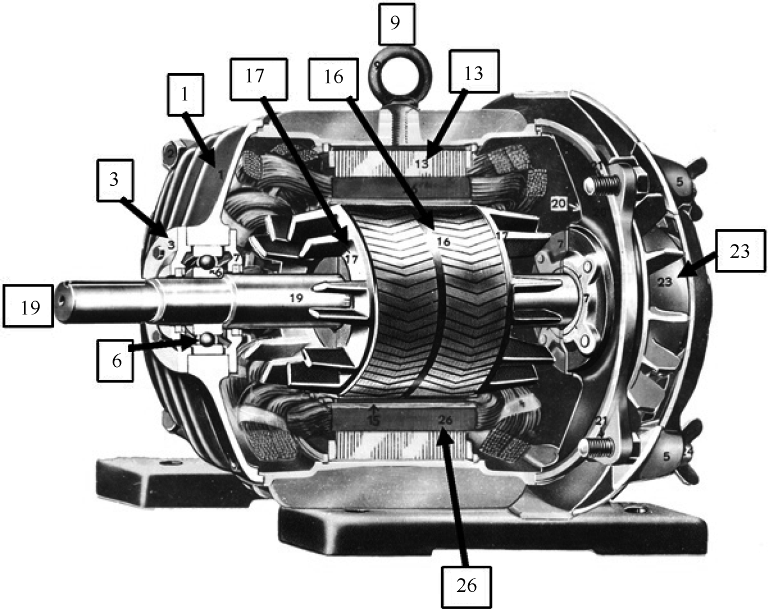
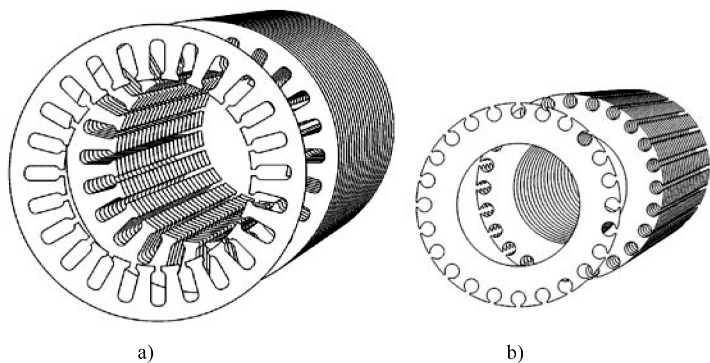


图 14.1 笼型感应电机的外形

14.2 磁体

感应电机定子绕组中的电压和电流的角频率是ω_e。转子感应的电动势的角频率是ω_{slip}，它们在短路的转子绕组里感应出相同频率的电流。定子的磁通和磁感应强度以角频率ω_e变化。从主电网接入的感应电机的角频率也为100π。转子的磁通和感应磁势的角频率是ω_{slip}。对于千瓦级别的感应电机，转差频率约为1Hz。因此，感应磁势会随着定子磁路以工频变化，同时也会随着转子磁路以一个较低的频率变化。为了减少由涡流引起的铁耗，定子和转子均由薄片叠压而成，即它们都由铁片制成。铁片的形状如图14.2所示。

通过铁片叠压的方式，可以制成感应电机定转子的磁体。定子磁路是一个空心圆柱，转子磁体沿径向被放置在中间，两者被气隙分隔开。定子磁体的内表面沿轴向开槽，同样，在转子磁体的外表面也沿轴向开槽。这些槽的作用，是用来放置构成定转子绕组的导体。定子导体由铜条构成，在大部分情况下，它们的截面都是圆形的，定子导体被树脂材料绝缘，连接成三个定子线圈，也被称作定子绕组的三相，或者说，三个部分。转子槽通常都是被铝条所填充，通常都是将液态的铝灌入转子槽中铸成。这些铝条被分置于转子首尾的两个铝环短路，构成的这种短路形式的转子绕组称为鼠笼式。图14.3展示的是电机的横截面，标注了导体在铁心中的位置。



a)　　b)

图 14.2　a）感应电机的定子磁体　b）感应电机的转子磁体

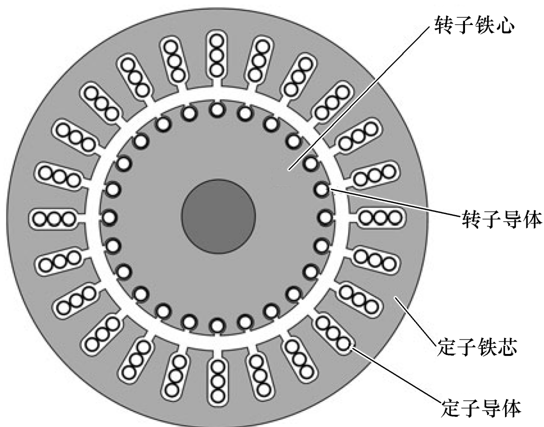


图 14.3　电机的横截面

图 14.4 展示了转子导体和短路环的形状。为使转子导体的描述形象化，在这里假设铁心已被移除。导体的形状像笼子，加上被端环短路，故得名笼形转子。有时，带铸铝短路转子的电机也被称作笼形转子电机。在大功率电机中，转子导体由铜条制成，这对提升能量效率是很关键的。与铝相比，铜有着更低的电阻率，这样可以减少笼形转子的损耗。

转子导体在电绝缘方面有着不同的方法。存在于转子导条和转子槽之间，以及和铁片之间的电接触所产生的微电流，将危害到整个电机的运行。装配铝条前在转子槽内表面涂上酸性介质，或用某种特殊方法将内表面做成绝缘，可以避免这种电流。这样设置绝缘层可以将铝条和铁心分隔开，并阻止一切不可控的电流。特别地，感应电机的转子有一组环形绝缘的三相绕组，这与制造定子绕组的很像。这样三个绕组的末端可以被用户使用。这种转子也被叫做绕线式转子，这在下一章节中会有详细叙述。这个主要被用

于三相变频静态功率转换器的展开。在笼型转子感应电机广泛应用的今天，绕线式感应电机已经很难见到了。

转子笼的制造流程非常简单，不需要高精度制造或特殊科技和特殊原材料。制造直流电机的转子则要考虑更多方面，制作起来也更复杂。它需要机械换向器，以及一些需要一系列不同材料通过高精度制造工序制作出来的部件。

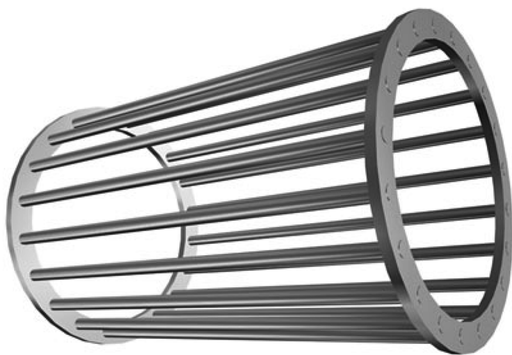


图 14.4 笼形绕组

与直流电机相比，感应电机具有一系列优势。它有着更简单的制作工序，鲁棒性，更高的功率系数 $\Delta P/\Delta m$，更小的质量和体积，以及可以工作于相较于直流电机高很多的转速的情况。因此，感应电机现在被广泛地应用。电机电刷和集电环的消失使其免于维护，寿命也得到了延长。感应电动机的鲁棒设计使其具有更高的可靠性，在平均稳定时间（MTBF）里被广泛应用。在过去的一个世纪，大多数的感应电机都是工作于恒压恒频交流电。这些电机通常都是以恒定速度运行。只有绕线式电机的转子速度会变化。

随着电力电子领域半导体电力开关、数字信号处理器（DSP），电力电子器件的数字驱动和控制技术的进步，现在设计、制造、部署一个基于变频 AC 交流电源，通过静态电源变换器供电的可靠可承受的交流电机系统已经成为可能。变频供电可适应感应电机宽广的速度范围下的有效而可靠的操作。数字控制的感应电机常用于动态控制系统中的转矩制动。

14.3 笼型转子与绕线式转子

除短路绕组外，有时还能碰到带外接转子绕组的集电环的绕线式转子感应电机。绕线转子型感应电机有时会被用在无法变换电压幅值和频率的场合。定子需要一个三相恒压恒频电源为其供电。以前不具备将恒频电压电流变换成变频电压电流的电力电子设备。在当时的条件下，绕线转子型感应电机主要用于恒频感应电机的转子调速。到了今天，绕线转子型电机的用途正在减少，而笼型电机的用途正在扩大。

图 14.5 的 a）部分，展示的就是感应电机的笼型短路转子；b）部分展示的是一个与定子相仿的感应电机的绕线式三相转子。三相绕组通常连接成星形，另外一端则分别连接到电机尾部，被称为集电环的三个金属环上，电动机运行时，电刷按压在集电环上，以提供电接触并保证转子尾部可靠使用。电刷是随着转子转动在集电环外围滑动的，有弹性的石墨块。通过将外电阻连接进转子电路，可以改变转子电路的等效电阻。而这可以改变电机的机械特性，从而可以改变需求速度。

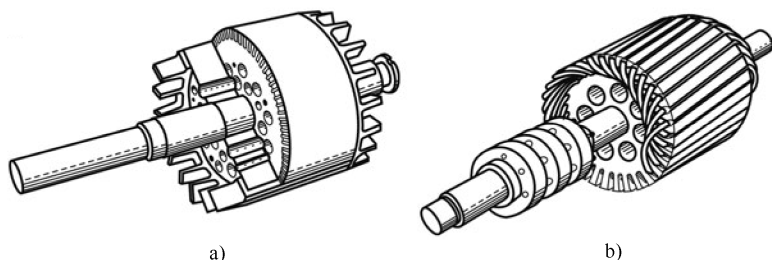


图 14. 5　a）笼型转子　b）带集电环的绕线式转子

随着静态电子转换器可以允许馈电频率和转速的连续调节，绕线转子型电机的应用需求已经几乎消失殆尽。

14. 4　三相定子绕组

感应电机的定子有三相定子绕组，即定子绕组由三个独立线圈构成。每相线圈都有两个端部。三相绕组既可以采用三角形接法，也可以采用星形接法。星形接法记做 Y 接，三角形接法记做 Δ 接。星形接法下，三相绕组的一端接在三相交流电源上，另一端连接于同一个节点。这个公共节点被叫做星点。由于星点没有其他的连接（浮地），故三相电流之和，必须时刻等于零，$i_a(t)+i_b(t)+i_c(t)=0$。大多数星接的定子绕组都选择让星点浮地，特别地，在一些大功率，高电压㊀感应电机中，星点有可能会接地㊁。

在某些情况下，三相定子绕组采用 Δ 接法，也就是三相绕组连接成三角形，限制条件是 $u_a(t)+u_b(t)+u_c(t)=0$。给定额定功率时，三角形接法能在定子导体中产生较星形接法较低的电流。这样，三角形接法在低电压等级的电机中被应用开来，比如电池电机的驱动，这种大电流的场合。

星形接法也有它被更频繁应用的优势㊂。除开缺乏一般性的情况，本书假设定子电

㊀ 超过 1kV 的电压叫做高电压。中电压这种叫法同样存在，指的是从 1 ~ 10kV 范围，也就是高电压的下限。中电压的上线没有被明确定义，同样，超高压和特高压也缺乏一个明确定义。

㊁ 高压感应电机需要更强力的绝缘，依据瞬变现象，悬浮的星点有可能产生过电压。在某些情况下，高压电机的星点是通过星点和地点的阻抗接地的。

㊂ 三角形接法的电机定子相绕组电压值和为零，$u_a(t)+u_b(t)+u_c(t)=0$，实际的交流电机存在缺陷，包含谐波的非正弦电动势，比如在三相绕组中初相相同的三次谐波。这是所有 $3n$ 次谐波的性质，所以也被叫做三重谐波。在三相定子绕组里面，三重谐波的波形拥有相同的幅值和相序。这样，采用星形接法，三重谐波由于$i_a(t)+i_b(t)+i_c(t)=0$ 而无法产生任何电流。另一方面，三角形接法为三重谐波的定子电流提供了一个环形通路。采用三角形接法，任何三重谐波导致的电动势畸变，都会增加提升电机损耗、影响电机正常工作的环流。

机均为星形接法。

图 14.6 所示，定子相绕组的轴线互差 $2\pi/3$。通过通入同幅值I_m、同角频率ω_e的相电流，建立三相感应电机需要的磁场。它们的初始相位都互差 $2\pi/3$，这与三相轴线的空间角度相关。相绕组中流过规定的电流，电机的气隙和磁路中就产生了磁场。磁场以$\Omega_e=\omega_e$㊀的速度旋转。相电流具有相同的幅值和频率，它们的初始相角互差 $2\pi/3$，构成了一个电流的对称三相系统。三相电流的瞬时值已由式（14.1）给出，它们的变化通过图 14.6 的右侧图描述。

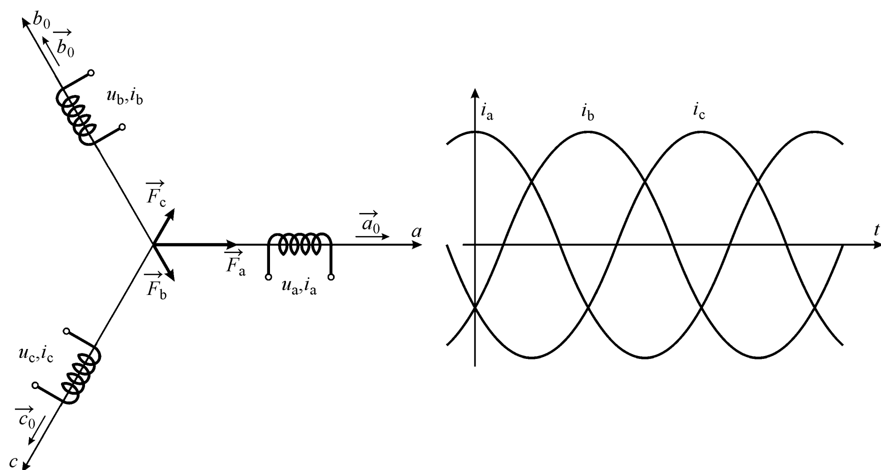


图 14.6 各相的电动势

$$
\begin{aligned}
F_a &= N_s I_m \cos \omega_e t \\
F_b &= N_s I_m \cos\left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right) \\
F_c &= N_s I_m \cos\left(\omega_e t - \frac{4\pi}{3}\right)
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

在图 14.6 中，相绕组用线圈表示。三个线圈标识代表着三个相绕组。每个相绕组都由围绕在电机圆周定子槽内的导体构成，它们正对着定子磁路的内表面。容易理解导体密度会沿着气隙周围呈正弦变化，如图 14.7 所示。在这幅图中，线圈符号表示绕组，并平铺于磁轴上。为了清晰表述，集中绕组被一个线圈符号简化表示。将所有三相的独立导体表示出来几乎没有什么实际价值。

相绕组的电动势的幅值由相电流决定，其对应向量沿着绕组磁轴方向延伸。绕组磁通向量也有着相同的方向。这样，代表绕组的线圈符号就也有了磁动势和磁通向量，它

㊀ 由于感应电机有 $p>1$ 对磁极，$\Omega_e=\omega_e/p$。多级电机将会在后面介绍。

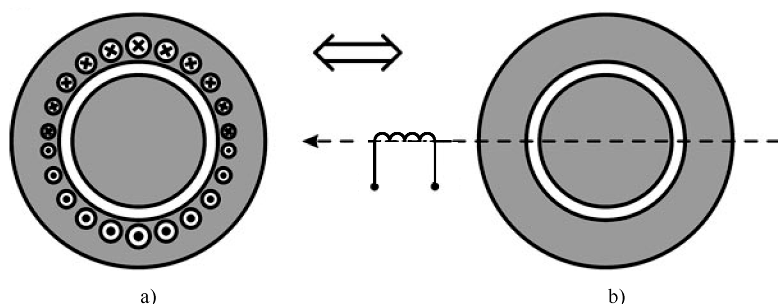


图 14.7　a）每相绕组在电机周围都有分布　b）一相绕组被一个轴线沿磁通方向的线圈取代

们的方向沿着代表线圈的绕组所示的磁轴方向。

14.5　旋转磁场

每相绕组都沿着其磁轴方向产生一个磁动势。磁动势的幅值F_a，F_b和F_c取决于电流$i_a(t)$，$i_b(t)$ 和$i_c(t)$。三个磁动势的向量和，构成了定子磁动势的合成向量$\boldsymbol{F}_s$（图 14.8）。向量$\boldsymbol{F}_s$和磁阻R_μ的商，就是定子磁通向量。磁通线穿过气隙，并环绕着转子磁路（图 14.9）。通过穿越铸铝的笼形转子回路，定子磁通产生转子磁通。比例系数由定子绕组和笼形转子之间的互感系数L_m决定。当转子与磁场处于同步旋转状态（$\Omega_e=\omega_e$）时，转子磁通没有改变。这样，维持同步的话，转子电动势和转子电流均

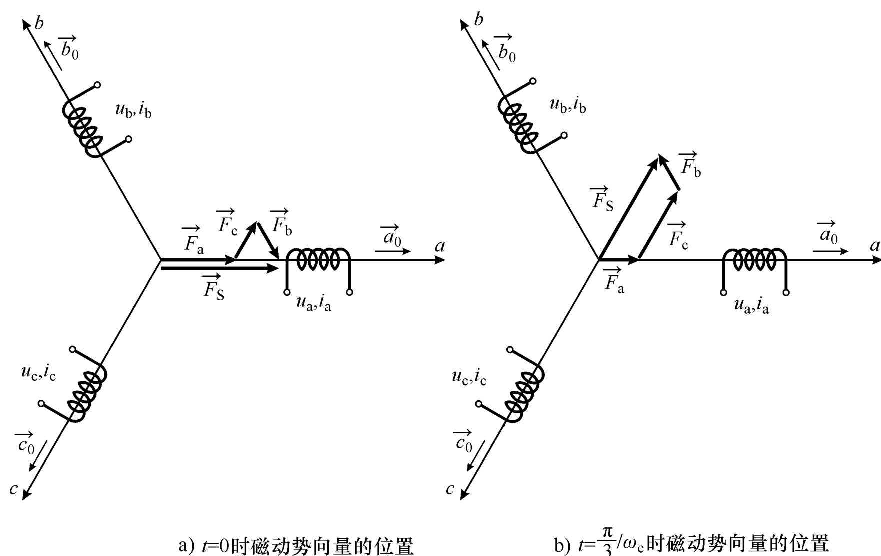


图 14.8　三相绕组的合成磁动势

为零。

转子速度低于同步速度（$\Omega_e < \omega_e$）时，转子相对于磁场而言是落后的。两者的速度差$\Omega_{slip} = \Omega_e - \Omega_m > 0$ 称作转差速度。以笼型短路转子为参考，定子磁通以Ω_{slip}的相对速度旋转，该速度由$\Omega_{slip} = \omega_{slip}$[⊖]决定。

磁通的变化导致了短路转子通路中感应电动势的产生。转子电流是一种交流电流，它有着自己的角频率ω_{slip}。它与源电动势 e 成正比，与转子阻抗 $R + \mathrm{j}\,\omega_{slip}L$ 成反比，其中 R 和 L 分别为短路绕组的系数。如果转差ω_{slip}很小，转子电流近似与 e/R 相等。磁场和转子导体电流相互作用，产生一个将转子拖入与磁场速度同步的电磁转矩，即在$\Omega_e - \Omega_m > 0$ 的情况下，作用于转子的转矩使转子转速Ω_m增加，并使其与同步速Ω_e接近。

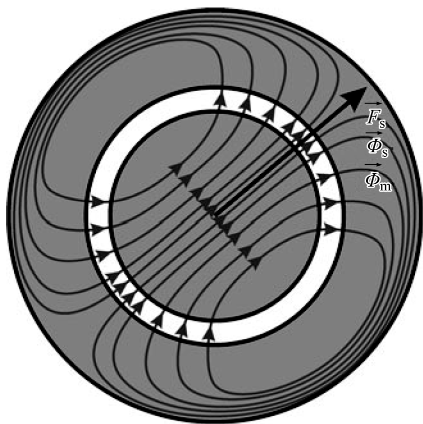


图 14.9 旋转磁场中向量的表现形式
F_s——定子磁动势向量 Φ_s——一个定子回路中的磁通向量 Φ_m——同时包含定转子回路的互感磁通向量

14.6 转矩产生的原则

感应电机运行的准则可以用图 14.10 解释。代表的磁通$\boldsymbol{\Phi}_m$以同步速度Ω_e旋转，我们假设转子旋转的速度$\Omega_m < \Omega_e$，这意味着转子落后磁通一个转差速度：

$$\omega_{slip} = \Omega_{slip} = \Omega_e - \Omega_m > 0 \tag{14.2}$$

处于磁通向量$\boldsymbol{\Phi}_m$和转子之间的角度θ_{slip}等于转差的积分，它是逐渐增大的。这张图仅仅画出了一个短路转子回路，以说明转矩预测的准则。转子绘图的磁通随θ_{slip}变化：

$$\theta_{slip}(t) = \theta_{slip_0} + \int_0^t \Omega_{slip}\mathrm{d}\tau \tag{14.3}$$

线圈参考轴线与磁通向量之间的夹角是$\theta_{slip} + \pi/2$，环绕转子线圈的定子磁通是

$$\Phi_{Rm} = -\Phi_m \sin\theta_{slip} \tag{14.4}$$

转子总磁通包括与自感L_R成比例的构建转子磁通的转子电流的作用。在深入了解运

⊖ 在本书接下来的部分，我们考虑的是两磁极电机。它们拥有一个南极磁极和一个北极磁极。这样的电机也被称作两极电机，它们有 $p=1$ 对极。多对极电机同样会被解释说明。举例如下：气隙磁场的分布有可能有两个南极磁极和两个北极磁极。极对数的数量记做 p。接下来将会叙述到，频率为ω_e的交流电流产生的磁场角频率$\Omega_e = \omega_e/p$。这样，对于两极电机而言，角频率ω_e和转动角速度Ω_e是相等的。

行原理的过程中，这些作用会随着时间被忽略。这个基于低转差频率下的假设是合理的，因为阻抗$L_R\omega_{slip}$可以被忽略。因此作为替代，我们考虑交链磁通$\Phi_{Rm} = -\Phi_m \sin\theta_{slip}$与转子总磁场$\Phi_R$相关，这样，在转子绕组中感应出来的电动势就与磁通$\Phi_m$和转差频率$\omega_{slip}$成比例：

$$e = \frac{d\Phi_R}{dt} = -\Phi_m \Omega_{slip} \cos\theta_{slip} \tag{14.5}$$

在稳态情况下，$\theta_{slip} = \Omega_{slip} t$。因此，转子电流是交流电流。它的幅值与转子阻抗 $R + j\omega_{slip} L$ 成反比。对于小转差情况，电阻 R 远大于电抗$\omega_{slip}L$，因此，转子电流i_R近似等于$\frac{e}{R} \sim \Phi_m \omega_{slip}$

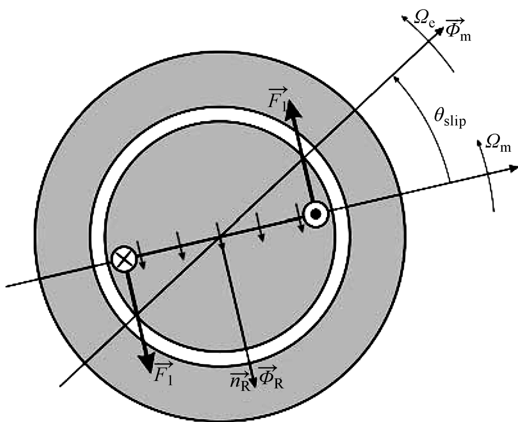


图 14.10　作用于转子导体上的力的近似评估

$$u = 0 = R_R i_R + e\frac{d\Phi_R}{dt}, i_r = +\frac{\Phi_m \Omega_{slip}}{R_R} \cos\theta_{slip} \tag{14.6}$$

在上述考虑的情况下，$i_R > 0$。转子电流的方向与图 14.10 的方向相关。以下推论将证明结论的合法性。基于磁通Φ_m超前转子，图 14.10 中转子线圈内的磁通幅值变化。它会随着参考转动方向$\boldsymbol{n}_R$而反向增加。

短路转子内的感应电动势变化，导致转子电流的磁通变化与之相反，因为磁通变化是电动势的来源。根据图 14.10 中的参考方向，转子电流引起的磁通变化是直接向下的。转子电流的变化与方程 $\cos(\theta_{slip}) = \cos(\theta_0 + \omega_{slip} t)$ 成比例。这是一个频率为ω_{slip}的交流电流。在多绕组转子中，交流电流产生的与转子相关的磁通的转差速度是$\Omega_{slip} = \omega_{slip}/p$。随着转子以$\Omega_m$的速度旋转，转子磁通相对于转子的旋转速度等于$\Omega_{slip} + \Omega_m = \Omega_m + (\Omega_e - \Omega_m) = \Omega_e$。因此，感应电机的转子磁通向量和定子磁通向量是同步的，速度同为Ω_e，由频率ω_e决定。稳态下，定子和转子磁通向量保持它们的相对位置不变。

14.7　转矩表达式

将磁场和转子电流联系起来，就产生了能将磁场拖入同步速的电磁转矩。图 14.10 中的简单结构可以用来解释转矩、磁通和转差之间的基本联系。

在转子导体电流流向被标注为⊙的区域，其磁感应强度的径向分量等于$B_m\cos(\theta_{slip})$，B_m是气隙的最大磁感应强度。这些分析是基于“气隙磁通主要由定子电流产生”的假设，这样在气隙里，感应的转子电流对电磁感应的影响可以忽略不计。电磁感应假设气隙磁通B_m的最大值范围是沿着磁通向量$\boldsymbol{\Phi}_m$的，它的值略小一点，并且随着

气隙中电磁感应的径向分量做正弦变化。这样，由于磁场区域总是与向量$\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{m}}$存在着一个 $\Delta\theta$ 的错位，假设电磁感应值 $B = B_{m} \cdot \cos\Delta(\theta)$，转子的电流$i_{R} = \Phi_{m}\omega_{slip} \cdot \cos\theta_{slip}/R$。作用于导体上的，标注为⊙的力为 $L\,i_{R}B$，其中 L 是机器的轴向长度。与之相等的力作用于标示为⊗的导体上。两个力的方向都与参考切向方向相同。第二个导体中的电流方向改变，电磁感应的方向也会随着改变。在⊗导体的区域，磁场穿出定子磁路，穿过气隙，进入转子磁路。

表达式$\Phi_{m} = \left(\dfrac{2}{\pi}\right)B_{m}\pi RL = 2B_{m}RL$ 将磁通Φ_{m}与电磁感应最大值B_{m}联系起来。在这个表达式中，$R = D/2$ 是转子圆柱体的半径。这样，就可以得到电磁感应的表达形式为：

$$B = k_{1}\Phi_{m}\cos\theta_{slip} = B_{m}\cos\theta_{slip} \tag{14.7}$$

电磁转矩等于：

$$T_{em} = DLi_{R}B = DL\frac{\Phi_{m}\omega_{slip}\cos\theta_{slip}}{R_{R}}B_{m}\cos\theta_{slip} \tag{14.8}$$

即是：

$$T_{em} = DLi_{R}B = DL\frac{\Phi_{m}(p\,\Omega_{slip})\cos\theta_{slip}}{R_{R}}(k_{1}\Phi_{m})\cos\theta_{slip} \tag{14.9}$$
$$= k_{2}\Phi_{m}^{2}\Omega_{slip}\cos^{2}\theta_{slip}$$

这样，由感应电机送出的转矩直接与转差频率，以及磁通的平方成正比，与转子电阻成反比。

问题（14.1）：在上面所述的情况里，转矩是与$\cos^{2}(\theta_{slip}) = \cos^{2}(\theta_{slip} + \omega_{slip}t)$ 成正比。因此，转矩是在零和两倍平均值之间脉动。是否有可能通过更改图 14.10 的结构，获得一个无纹波的恒定转矩？

解答（14.1）：在转子上添加另外一个与已知线圈互差 $\pi/2$ 角度的短路线圈，可以减少转矩脉动。在第二个线圈导体上感应的转矩与$\sin^{2}(\theta_{slip})$ 成比例。当它添加进已知的与$\cos^{2}(\theta_{slip})$ 成比例的转矩时，两者相加即为$T_{em} = \dfrac{\Phi_{m}^{2}\omega_{slip}}{R_{R}} =$ 常数。

第 15 章　感应电机的建模

本章介绍并解释了感应电机的数学模型。这个模型可以表示电机电气和机械子系统的瞬态和稳态性能。在这章介绍并解释了克拉克和帕克坐标变换。该模型包括定子和转子绕组电压平衡微分方程式，关于磁链和电流的电感矩阵，牛顿运动微分方程，气隙功率表达式和电磁转矩表达式。建模的第一步是用两相等效替换三相电机。即通过适当的 3/2 变换矩阵将三相的电压、电流和磁链转换为两相的变量，这也叫做克拉克坐标变换。两相模型建立在静止的坐标系中。使用这种模型的缺点和困难在于引入和应用帕克变换，这需要与电机模型的同步的 dq 坐标系。对于使用坐标变换必要的方法和步骤将在后面详细说明，包括电机的复数向量表达式。在 dq 坐标系中得到的可使用的感应模型与定子磁场同步旋转。dq 坐标系模型的优点和实际用途将在本章的最后介绍。

15.1　稳态和暂态现象的建模

在使用感应电机时，我们需要对感应电机的工作特性有一个系统的了解。从一个电接入点，我们需要得到稳态时电压和电流之间的关系，以便得到电机稳定运行时的等效电路。同时，得到电机的机械特性曲线即转矩与转速之间的关系也很重要。

感应电机的稳态分析是基于机械特性和稳态等效电路的。感应电机的机械特性给出了电磁转矩与转子转速之间稳态值的关系。定子电压的频率和幅值决定了机械特性。因此，定子电压的任何变化都将改变机械特性。稳态时，电压和电流是恒定幅值和恒定频率的正弦变化量。因此，它们可以用合适的相量表示[㊀]。电压与电流之间的关系可以用等效电路表示。稳态等效电路是由电阻和电抗组成的网络，用于已知供电情况和转子转速的条件下计算定子侧和转子侧电流。

对于供电和控制感应电机需要对动态模型有很好的了解。这个模型包括微分方程，以及在暂态和稳态过程中电机变量和参数的代数表达式。瞬态时电压和电流之间的关系是描述绕组电压平衡的微分方程，也称为电压平衡方程。电压平衡方程描述了感应电机的电气子系统。机械子系统由牛顿运动微分方程描述。这一系列用于描述电机工作的微分方程和表达式被称之为数学模型或者动态模型。

更进一步考虑，提出和解释感应电机电气和机械子系统的分析，得到了动态模型。

㊀ 相量是一个复杂的数字，它表示一个正弦的交流电压或者电流量。其绝对值对应于幅值，相角度决定了考虑电压和电流的初始阶段。相量可用于表示稳态时按正弦曲线变化的其他量，如电磁转矩和磁链。

这个模型包括状态坐标的转换，也叫做坐标变换。它们有助于分析同步电机和感应电机中的瞬态过程。动态模型一般多用于瞬态分析和解决控制问题，但是它也能用于解决稳态问题。从动态模型入手，可以得到稳态关系式；机械特性；稳态时的电压，电流，磁通，转矩和转速关系；也可以得到稳态等效电路。

如果读者对感应电机的瞬态过程没有兴趣或者是没有必要去解决供电和控制问题，可以不必学习感应电机的动态模型。这些读者可以直接跳过整个 15 章，因为这一章是关于建立数学模型和解决瞬态过程的。稳态等效电路可由类比于变压器的方法得到，这将在 16.6 节中介绍。稳态等效电路的分析和感应电机机械特性的学习将在 16 章中继续。

15.2 数学模型的结构

在前面已经介绍过电机的动态模型包括 4 个部分。它们是：

1）N 个电压平衡的微分方程；

2）电感矩阵；

3）转矩表达式；

4）牛顿方程；

电压平衡的微分方程如下：

$$\underline{u} = \underline{R} \cdot \underline{i} + \frac{\mathrm{d}\underline{\Psi}}{\mathrm{d}t} \tag{15.1}$$

磁通和电流之间的关系由非稳定电感矩阵给出：

$$\underline{\Psi} = \underline{L}(\theta_{\mathrm{m}}) \cdot \underline{i} \tag{15.2}$$

电磁转矩的表达式如下：

$$T_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\underline{i}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\underline{L}}{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{m}}}\underline{i} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(i_{\mathrm{k}}i_{\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}L_{\mathrm{jk}}}{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{m}}}\right) \tag{15.3}$$

机械子系统中的瞬态现象由牛顿运动微分方程表示：

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = T_{\mathrm{em}} - T_{\mathrm{m}} - k_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathrm{m}} \tag{15.4}$$

上面给出的 4 个等式定义了适用于任何旋转电机的基本模型。这个模型来源于 4 个假定的基本近似：

1）分布常数的影响可以忽略；

2）寄生电容消耗的电能可以忽略；

3）铁耗可以忽略；

4）铁磁材料的非线性的 $B(H)$ 特性中的磁路饱和可忽略。

当一个电机有 N 个绕组，则式（15.1）有 N 个电压平衡微分方程，式（15.2）提供了绕组电流和磁通的关系，式（15.3）给出了电磁转矩，式（15.4）的牛顿微分方程事实上是描述了转子转速的变化。因此，在这个模型中，有 $N+1$ 个微分方程和相同

数目的状态变量。

15.3　三相电机和两相电机

大部分感应电机有三相定子绕组。定子交流电流产生了磁动势向量 $F_S = F_a + F_b + F_c$。在电机内部，这个向量的方向是径向的，它没有轴向分量。因此，可以由援助坐标系的径向和切向的单位向量定义一个平面。同样的平面也可以由两正交轴构成的直角坐标系表示，以后用 α 和 β 表示。为了将这个向量在 $\alpha-\beta$ 正交系统中表示出来，α 轴和 β 轴的方向有它们相应的单位向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 和 $\boldsymbol{\beta}_0$ 表示。

由于电机有三相绕组，空间位移是 $2\pi/3$，相关向量需要被表示在 $\alpha-\beta$ 坐标系中。因此，需要依据单位向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 和 $\boldsymbol{\beta}_0$ 来表示各个相磁轴的方向：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_0} &= \overrightarrow{\alpha_0}\\ \overrightarrow{b_0} &= -\frac{\overrightarrow{\alpha_0}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}\\ \overrightarrow{c_0} &= -\frac{\overrightarrow{\alpha_0}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}\end{aligned} \tag{15.5}$$

加以三相对称电压，定子电流可表示为

$$\begin{aligned}i_a &= I_m\cos\omega_e t\\ i_b &= I_m\cos(\omega_e t-2\pi/3)\\ i_c &= I_m\cos(\omega_e t-4\pi/3)\end{aligned} \tag{15.6}$$

这样它们可以得到下面的磁动势：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_a} &= Ni_a\overrightarrow{\alpha_0}\\ \overrightarrow{F_b} &= Ni_b\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\alpha_0}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\beta_0}\right)\\ \overrightarrow{F_c} &= Ni_c\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\alpha_0}-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\beta_0}\right)\end{aligned} \tag{15.7}$$

三个磁动势的和得到：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_S} = \overrightarrow{F_a}+\overrightarrow{F_b}+\overrightarrow{F_c} &= N\left[\overrightarrow{\alpha_0}\left(i_a-\frac{i_b}{2}-\frac{i_c}{2}\right)+\overrightarrow{\beta_o}\frac{\sqrt{3}}{2}(i_b-i_c)\right]\\ \overrightarrow{F_S} &= \frac{3}{2}NI_m[\overrightarrow{\alpha_o}\cos\omega_e t+\overrightarrow{\beta_o}\sin\omega_e t]\end{aligned} \tag{15.8}$$

这个向量以 $\Omega_e = \omega_e$ 的角速度旋转并保持幅值不变 $F_{Sm} = 3/2NI_m$。建立三相绕组的模型会遇到有很多问题。其中之一就是它们的相电流不是独立变量。它们受制于等式 $i_a+i_b+i_c=0$，这是因为三相绕组是星形连接的。对于 Δ 连接的电路，这个问题会不同。也就是说，Δ 连接的绕组其相电压之和为 0。就星形绕组而言，结论就是只有 2/3 的定子电流是独立变量。因此，在所有的微分方程中，电流 i_c 可被替换成（$-i_a-i_b$），这使得方程变得很复杂而且计算麻烦。另外，相绕组的磁轴间的角位移是 $2\pi/3$，这会使互

感值非零。电感矩阵中非零元素的增加会增加电压平衡方程因子的数目，这会使得他们相互之间耦合严重而不那么直观。另一方面，假设的两相电机可以设想为只有两个电流值和零个互感。如果感应电机的定子是两相绕组，它的数学模型将会变得更简单，其中一相在单位向量 α_0 的方向上，另一相在单位向量 β_0 的方向上。定子绕组只有两个电流，i_α 和 i_β，而且它们是独立的。由于绕组的磁轴是正交的，它们之间的互感为 0，这使得电压方程大大的简化。

将两相电机的一个相绕组分别固定在单位向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 和 $\boldsymbol{\beta}_0$ 方向的数学模型更有用，因为绕组电流与磁动势向量在 α 轴和 β 轴的投影一致。也就是，磁动势在 α 轴的分量是 $F_\alpha = Ni_\alpha$，这也是 F_S 在 α 轴的投影，磁动势在 β 轴的分量是 $F_\beta = Ni_\beta$，这等于 $\boldsymbol{F}_S$ 在 β 轴的投影。磁通向量也可以得到相同的结论。磁通在 α 轴的分量等于磁通向量 $\boldsymbol{\Phi}_S$ 在 α 轴的投影。相量与相关向量在 α 轴与 β 轴投影的一致性有助于理解和运用电机的两相模型。

三相和两相绕组都只能得到位移且相等的磁动势。图 15.1 的三相绕组系统可以由图 15.2 的两相绕组系统代替。

式（15.8）成立的前提是假设匝数是不变的（$N_{abc} = N_{\alpha\beta}$），定子磁动势向量 $\boldsymbol{F}_S$ 保持相同的方向和幅值不变，假设两相系统的电流是

$$i_{\alpha S} = i_a - \frac{i_b}{2} - \frac{i_c}{2} = \frac{3i_a}{2} = \frac{3}{2}I_m\cos\omega_e t$$

$$i_{\beta S} = \frac{\sqrt{3}}{2}(i_b - i_c) = \frac{3}{2}I_m\sin\omega_e t \qquad (15.9)$$

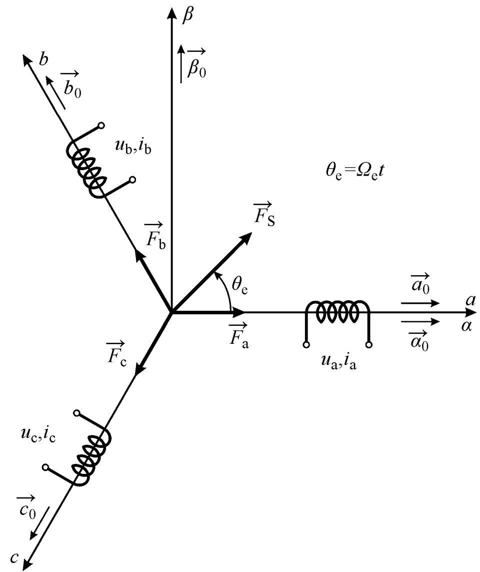


图 15.1　正交 $\alpha\beta$ 坐标系中绕组的位置

设想一个实验，移除感应电机的三相绕组，用两相正交的绕组替代可以得到一个两相感应电机。假如两相绕组中的电流 $i_\alpha(t)$，$i_\beta(t)$ 与式（15.9）一致，则转换之后的电机中的定子磁动势 $\boldsymbol{F}_S$ 与之前的三相电机中的相同。所以，定子的磁通向量 $\boldsymbol{F}_S/R_\mu$ 也是相同的。而且，相同的磁通和转速会得到相同的电磁转矩。就是说，除了相同的磁通幅值，角速度 $\boldsymbol{\Omega}_e$ 和转子转速，转子还会与之前三相电机有相同的转差频率、电动势和电流。这个试想实验得到以下结论：只要两相绕组可以提供相同的磁动势，三相感应电机中的三相绕组可以用两相绕组代替。换言之，假设保持磁动势不变，替换后电机的磁通、转矩和功率均不会变。这个结论会在后面用到。

问题（15.1）：从描述的设想实验开始，哪儿三相绕组被替换成了两相？哪儿前者

的每相绕组匝数 N_{abc} 与后者的每相绕组匝数 $N_{\alpha\beta}$ 相等？比较两者的相电压。设计一个与之前电机等价的两相电机会出现不同电压电流的可能吗？(见图 15.2)

解答（15.1）：首先回想每匝绕组的感应电动势的最大值是 $e_1 = \omega_e \Phi_m$，绕组电动势的最大值是 $e = \omega_e \Psi_m$，a 相的电压平衡方程是 $u_a = R_a i_a + \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t \approx \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t = -\omega_e \sin(\omega_e t)\Psi_m$。假设原三相电机和等效的两相电机有相同的磁动势、磁通、转矩和功率。因此，两种情况下的定子磁链有相同的幅值，而且以相同的速度旋转。正因如此，每匝线圈的感应电动势不变。由于每相绕组的匝数一定，电压 u_{abc} 和 $u_{\alpha\beta}$ 有相同的幅值和有效值。注意原电机被等效替换后，比值 u/i 改变了。这个比值有阻抗的维度。尽管电压被证明是相同的，但是两相电机的电流 $i_{\alpha\beta}$ 的幅值和有效值均比 i_{abc} 大了 50%。

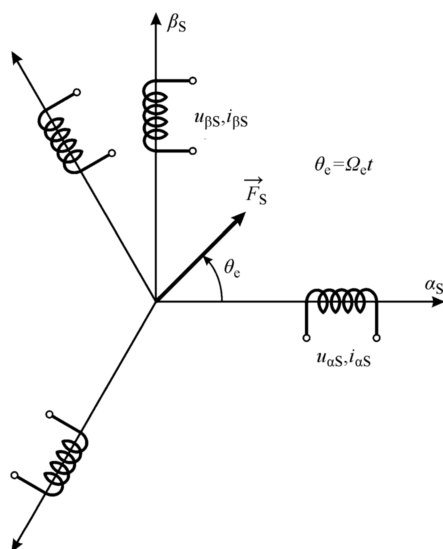


图 15.2 用两相等效取代三相绕组

总而言之，在匝数满足 $N_{abc} = mN_{\alpha\beta}$ 是定子三相绕组可以两相绕组替换。这种情况下，两相等效的每相相电压是 $u_{abc} = mu_{\alpha\beta}$。假设两相等效的电流为 $i_{\alpha\beta} = (3/2) \cdot (i_{abc}/m)$，磁动势 F_S 将保持不变。因此，式（15.9）右边需要除以 m。

尽管感应电机两相等效替换很简单清楚直观，但是感应电机的定子三相绕组是已经制造组装好了的。定子每相间的磁轴相差 $2\pi/3$。三相绕组在实际应用中比两相绕组更有优势所以应用更广。

考虑到连接感应电机连接到电网的导线数量，一个三相定子绕组接到电源需要三根导线。三根线之间的线电压的有效值相等，低压电机供电电源为 0.4kV。在稳态时，三根输电线上的线电流的有效值相等。高压传输中的额导线数量也是三根。正交系统没有这些优点。

问题（15.2）：一个两相感应电机由两个电压幅值相等，相位相差 $\pi/2$ 的两电源供电，要求利用三根导线将两电源与电机连接。求出导线间的线电压，并比较线电流的有效值大小。

解答（15.2）：两个电压源对两相电机供电时，可用四根导线分别将两电源的量输出端连接到绕组终端 α_1，α_2，β_1 和 β_2。两绕组间公用一根回流线可减少导线数目。两根回流线 α_2 和 β_2，可以合并并用一根线 $\alpha_2\beta_2$ 代替。这样，导线的数目变为三根。但是，这种情况下，三根导线中通过的线电流的幅值不相等。回流导线 $\alpha_2\beta_2$ 中的电流是 $i_\alpha(t) + i_\beta(t) = (3/2) I_m(\cos\omega_e t + \sin\omega_e t)$。它的幅值和有效值比其余两根导线中的电流高了 $2^{0.5}$ 倍。同样的不对称也存在线电压中。导线 α_1 与导线 $\alpha_2\beta_2$ 之间的电压等于相电

压 u_α。导线 β_1 与导线 $\alpha_2\beta_2$ 之间的电压等于相电压 u_β，它的幅值与之前的相等。另一方面，导线 α_1 与 β_1 之间的电压为 $u_\alpha - u_\beta$，它的幅值高了 $2^{0.5}$倍。

不对称的电压和电流是限制三线两相系统有更广泛应用的一个原因。其复杂的接线也是不可忽略的，因为线路导体是不可交换的。另一方面，三相系统的三相电压和电流相等，这使得接线大大地简化。三相感应电机和三相电源之间的接线更简单为所有的导线上通过的电流值相等，线与线之间的电压值相等。随机接线的最坏情况就是可能造成电机反转㊀。现在，所有运行在线频率的交流电压下的电力线和配电网都是对称三相系统。因此，即使是交流电机，比如感应电机和同步电机，都是采用定子三相绕组接线的。为了建模和分析，三相电机用其两相等效代替，以方便得到简单可用的模型、等效电路图、其他的电机数学表示。

15.4　克拉克变换

一个三相电机可用它的两相等效来表示（见图 15.3）。如果两相等效产生了与之前的三相相同的磁动势 F_S，则等效电机会与原三相电机有相同的磁通、转矩和功率。假设两相等效的匝数是 $N_{\alpha\beta}$，其电流 $i_\alpha(t)$ 和 $i_\beta(t)$ 会产生与 F_S 幅值和空间方向都相同的向量，则其磁动势不变。在 $N_{\alpha\beta} = N_{abc}$时，定子各绕组电流可由式（15.9）得出。

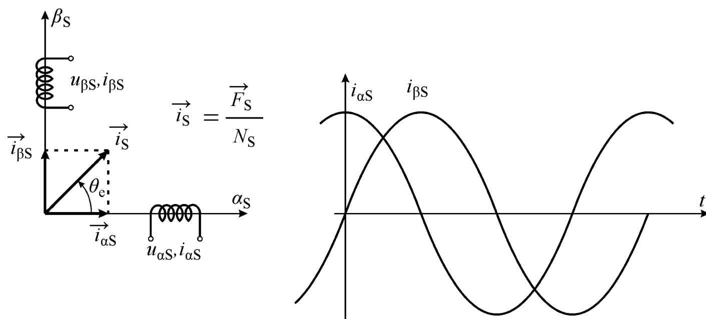


图 15.3　一个三相绕组的两相等效

为了利用两相模型的优势没有必要在实际中制造两相等效。相反，类似于式（15.9）的数学运算可用于所有的非独立变量。实际上这种运算就是坐标变换，它可以为使用者提供一个简单、明了、直观的模型。独立变量（i_{abc}，u_{abc}，Ψ_{abc}）与它们转换相对量，即两相等效（$i_{\alpha\beta}$，$u_{\alpha\beta}$，$\Psi_{\alpha\beta}$），叫坐标转换，其表达式类似于式（15.9）。在这个例子中，应用到三相/两相转换，以其作者命名为克拉克变换。

总而言之，每个有待于研究或控制的实际系统的状态被描述为状态变量。一系列的

㊀ 在这种情况下，只需任意交换电机三相中的两相的接线就可以改变电机的方向，正确旋转。两根要交换的导线可以任意选择。简短的说一句，这个工作要在不加电压的条件下进行。

状态变量唯一地确定了动态系统的状态。除去一般的近似情况，这些状态变量可以确定系统的情况以及其之后的特性。一个状态变量不能被其他状态变量表达。例如，三相绕组中的三相电流中只有两个是状态变量，第三个由前两者的和决定。

坐标转换的优点是以一个简单的模型来表现的。一个对象的状态，在三维空间可以由笛卡尔正交坐标系的坐标 x，y，z 描述，也可以用它们的一阶导数 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ 来表示，表示速度。另一方面，观察者有必要关注球坐标系中的距离 r，倾斜角 φ，方位角 θ。坐标 x，y，z 也可以由球坐标系中的 r，φ，θ 表示。将一种坐标系向另一种坐标系转换的方法叫坐标变换。运动微分方程可以由第一种坐标系或第二种写出。第一系列的方程叫 xyz 坐标系中的模型，第二种叫球坐标系中的模型。在笛卡尔坐标系或是球坐标系中建模就像是透过不同的窗户看有床的房间。房间还是那个房间，但是看到的却是不同的。总之，选择另一种坐标系只会影响观察者的角度却不会对要建模的对象或是系统有影响。选择一种合适的坐标系和状态变量的转换一致对数学模型很重要。这样的模型会变得简单、明了、更加直观，有助于系统的控制和使用的判定。基于笛卡尔坐标系的模型适用于只沿着 x 轴运动的建模对象，因为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=0$，$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=0$。要基于球坐标系来表示相同的运动则会造成坐标系 r，φ，θ 方向上均有变化。另一方面，球坐标系适用于绕原点的旋转运动或径向运动。类似地，一个三相电机可以在原始的三相系统中表示，也可以由它的等效两相电机表示。后者更适用以了解电机的性能和机械特性，规定和设计其输入和控制。

表示三相绕组的等效两相系统的电流如式（15.10），是由式（15.9）得出的矩阵。矩阵要乘以系数 K_{I}。当两相等效系统与三相绕组有相同匝数时，$K_{\mathrm{I}}=1$ 才能确保磁动势 F_{S} 不变。值得注意的是，一个三相绕组也可以由与其匝数不相同的两相等效系统表示。那样，为了保持定子磁动势 F_{S} 不变，系数 K_{I} 的值会不同：

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix} = K_{\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\mathrm{a}} \\ i_{\mathrm{b}} \\ i_{\mathrm{c}} \end{bmatrix} \tag{15.10}$$

问题出现了：三个变量如 i_{a}，i_{b}，i_{c} 能否用两个量 $i_{\alpha s}$，$i_{\beta s}$ 表示。因为 $i_{\mathrm{a}}+i_{\mathrm{b}}+i_{\mathrm{c}}=0$，最初电机中只有两相电流是独立状态变量，这为式（15.10）的转换提供合理性。

15.5　两相等效电路

已知三相电机的状态变量转换可以理解为一个假想实验，用虚拟的两相电机表示三相电机。在实际中，用一个能与初始电机产生相同磁动势、磁通、转矩、功率的两相定子绕组取代现有的三相绕组。比较相同特性的两种感应电机是有意义的。一个是原三相电机，一个是两相等效电机。假设两相电机（M_2）有和三相电机（M_3）一样的磁路和转子。如果 M_2 和 M_3 每相绕组的匝数都相等，则定子绕组中的电流必须分别满足以下关系式：

$$i_{\alpha s}=i_a-\frac{i_b}{2}-\frac{i_c}{2}=\frac{3i_a}{2}$$

$$i_{\beta s}=\frac{\sqrt{3}}{2}(i_b-i_c) \tag{15.11}$$

以产生相等的磁动势。磁动势相等，磁路完全相同，则两电机会有相等的磁通。每匝线圈的磁动势与磁链和角频率 ω_e 成比例。因此，电机 M_2 和 M_3 的每匝线圈的磁动势的幅值是相等的。当 $N_{abc}=N_{\alpha\beta}$时，a，b，c，α，β 相中的磁动势的峰值和有效值是相等的。假设电压降 Ri 相对于磁动势是可以忽略的，可以得到以下结论，在这种情况下，相电压 u_{abc}和 $u_{\alpha\beta}$的峰值和有效值是相等的。特别地，电机 M_3 中 a 相的电压的峰值与电机 M_2 中的 α 相的电压峰值相等。另一方面，由式（15.9）可以看出，相电流 $i_{\alpha\beta}$的峰值和有效值比相电流 i_{abc}大了 3/2 倍。以上提到的注意事项表明一个三相电机可通过重绕定子转换为两相电机，而保持相同的磁动势、磁通、转矩和功率。保持相同的匝数，相电压不变，相电流增加为之前的 3/2。

习惯做法是将坐标变换应用于电机，包括将同一个坐标转换公式运用于所有的有关变量，不管是电压、电流还是磁链。这种做法的好处将在之后的章节中介绍。举一个有关电机 M_2 和 M_3 的例子，它们的电流转换矩阵在式（15.11）中给出了。对电压用相同的公式，可以得到电压 $u_{\alpha s}$，这是采用对三相转换成两相的电流计算一样的方法得到的：

$$u_{\alpha s}=u_a-\frac{u_b}{2}-\frac{u_c}{2}=\frac{3u_a}{2} \tag{15.12}$$

显然问题出现了，实际上重绕电机 M_2 的相电压 $u_{\alpha s}$并不与式（15.12）中值相等。看起来似乎没有办法制造一个实际的两相等效电机，除非应用于电压的转换矩阵与应用于电流的不同。但是，问题 15.3 的答案证明了相反的结果。它表明，选择合适的 K_I，有可能可以设计出三相/两相转换法，制造出实际的两相电机。

为了证明其在建模中的作用坐标转换不一定要符合实际的物理系统。帕克变换就是例子，将在后面章节介绍和应用，其在旋转系统和稳态等效电路应用时很有用，得到与不能制造的虚拟电机相符合的状态变量。

考虑示例包括转换为两相等效 M_2 的三相电机 M_3。电机 M_2 和 M_3 有相同的磁路，每相中的绕组匝数也相同。电机 M_2 出现的问题是，其电压值与初始电压 u_{abc}利用转换矩阵（15.14）得到的值不相同。应注意电流是根据式（15.10）中令 $K_I=1$ 得到的。总的来说，电压可用以下矩阵转换：

$$\begin{bmatrix}u_{\alpha s}\\u_{\beta s}\end{bmatrix}=K_U\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_a\\u_b\\u_c\end{bmatrix}$$

因此，当 $K_I=K_U=1$ 时，利用对电机 M_3 转换得到的相电压和相电流值与在实际的电机 M_2 中测得的值不一样。另一方面，系数 K_I 和 K_U 并不一定要等于 1。其他取值也是可以的。唯一的实际限制是 $K_I=K_U$，这能保持电压电流比恒定，而且能保证所有原

电机中的阻抗值在转换后不变。但是这一限制并不是必须的，只是在实际应用中是强加的条件。假设相电流是根据式（15.10）令 $K_I=1$ 转换的，同时电压是令 $K_U=2/3$，这样得到的电压电流值与在与原三相电机设想匝数相同的实际两相电机中测得的值是相同的。这一方法的缺点是电机 M_2、M_3 中的电压电流比值不相等。这样，这种转换会影响阻抗值。阻抗值会变化。三相电机中的参数 R_S 需要乘以 2/3 才能得到两相电机中的参数 R_S。总的来说，原三相电机中的阻抗值要乘以 K_U/K_I 才能得到两相等效电机中的阻抗值。

到现在为止都是在讨论设计一个与实际电机 M_2，M_3 相一致的三相/两相转换。一般来说，转换相数可以但是不一定要与实际的两相电机一致。令 $K_I=1$，$K_U=1$ 来得到正确的数学模型也是可以的。这种模型确实得到了与实际一致的电压值，但是有阻抗不变的优点。另一方面，令 $K_I=1$，$K_U=1$ 来转换时功率是改变的，也就是，$P_{abc}\neq P_{\alpha\beta}$。然而，这样的模型方便应用。功率不变的缺点是必须牢记和注意的。

令 $K_I=K_U=2/3$ 的三相/两相转换会经常见到。它的阻抗是不变的，但是会有以下关系 $P_{abc}=3/2P_{\alpha\beta}$。为了更好地理解，在详细列出克拉克变换特性前，先简短描述经常使用的 K_I 和 K_U 的值。

15.6 恒定式

如果克拉克变换能保持原三相电机和两相等效的电压电流比不变，其阻抗就是不变的。如果磁通和电流的比值不变，则电感不变。如果两相等效功率 $P_{\alpha\beta}$ 表达式与原三相电机的功率一致，则功率是不变的。

有必要指出，假设数学模型的使用者采用 $P_{abc}=K\cdot P_{\alpha\beta}$ 比例，功率变化的转换是方便应用的。

第一次使用坐标变换的用户对于数学模型时候正确可能存在怀疑，因为它会计算出明显不正确的功率 $P_{abc}\neq P_{\alpha\beta}$。为了解答这一疑问，需要回想与实际制造的电机不一致的坐标变换得到的状态变量。然而，这并没有减弱数学模型的使用价值。例如，先建立一个简单的模型，$u=Ri$。使用坐标变换 $u_1=2u$，$i_1=2i$，这样得到的模型相比于之前的电阻其电功率变为之前的 4 倍。然而，这个模型还是有用的。给出了电流，可以根据 $u_1=Ri_1$ 计算电压。使用者应该记得功率的变化，计算实际的功率 $u_1i_1/4$。用 u_1，i_1 表示的电阻并不表示真实的电阻，但是它代表一个可用的电阻。

克拉克变换的大多数实际作用是保持电阻值和电感值不变，功率变化一般是可接受的。这意味着电流、电压和磁链的转换是对所有变量采用相同的转换矩阵得到的。转换矩阵如（15.13），对电压和磁链的系数定为 $K_I=K_U=K_\Psi$：

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}=K_I\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \tag{15.13}$$

重要的是令 $K_I=1$，来自于与原三相电机有相同相绕组匝数($N_{\alpha\beta}=N_{abc}$) 的两相等效电机的相电流。三相绕组中的电流是三相对称的 $i_a(t)=I_m\cos\omega_e t$，$i_b(t)=I_m\cos(\omega_e t-2\pi/3)$ 和 $i_c(t)=I_m\cos(\omega_e t-4\pi/3)$，可以利用式（15.13）令 $K_I=1$ 来转换得到。两相绕组中的电流计算：$i_\alpha(t)=i_a(t)-i_b(t)/2-i_c(t)/2=3/2I_m\cos\omega_e t$ 和 $i_\beta(t)=3^{0.5}/2\cdot(i_b(t)-i_c(t))=3/2I_m\sin\omega_e t$。因此，两相等效绕组中的相电流相差 $\pi/2$，这与实际绕组的磁轴相差角度是一致的。

另外，相电流、相电压和磁链应该在 $\alpha\beta$ 坐标系下转换。电压和磁链的克拉克变换如下：

$$\begin{bmatrix}u_\alpha\\u_\beta\end{bmatrix}=K_U\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_a\\u_b\\u_c\end{bmatrix}\tag{15.14}$$

$$\begin{bmatrix}\Psi_\alpha\\\Psi_\beta\end{bmatrix}=K_\Psi\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Psi_a\\\Psi_b\\\Psi_c\end{bmatrix}\tag{15.15}$$

总的来说，上述表达式中的系数 K_U，K_Ψ 的值可以任意选择，并不一定要等于 K_I。选择 $K_I=K_U=K_\Psi$ 得到的转换有助于数学模型的易读性和可用性。

令 $K_I=K_U$，是阻抗值不变的克拉克变换。也就是说，所有的电阻值、电感值，以及与比值 u/i 有关的值在转换之后的值均不变。因此，如 R_s 的这些参量在 $\alpha\beta$ 坐标系下的值不变。否则需要根据 K_U/K_I 的比值来计算阻抗值。

令 $K_I=K_\Psi$，是电感不变的克拉克变换。所有绕组的自感、互感和漏感转换后值均不变。因此，如果不采用 $K_I=K_\Psi$ 则需要根据 K_Ψ/K_I 的比值来计算电感值。

令 $K_U=K_\Psi$，电动势与磁链的关系是 $e=\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。否则需要根据含有关系式 $e=(K_U/K_\Psi)\ \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 的两相模型来计算。

在整本书中，都假设 $K_I=K_U=K_\Psi$。其他的取值在参考文献中很少见到。这会使得数学模型正确但是相对于不变转换的模型来说使用麻烦。

自由选择参数经常是一个问题。例如，用实际的两相电机模型 M_2 替换原三相模型 M_3，这个在前面已经讨论过了。在这个例子中，电机 M_2，M_3 有相同的绕组匝数，$N_{\alpha\beta}=N_{abc}$。三相电压(u_a，u_b，u_c) 克拉克变换可以计算两相等效的电压值(u_α，u_β)。为了得到与在实际两相电机中检测值相同的电压值(u_α，u_β)，系数 K_U 必须等于 2/3。这个结论在前面已经解释过了，它是由两电机中每匝线圈中的感应电动势的幅值相等得到的。由于 $N_{\alpha\beta}=N_{abc}$，电机 M_2，M_3 的相绕组的相磁动势幅值相等。当 $e=u$ 时，这个方法也适用于相电压。因此，对于克拉克变换，当 $N_{\alpha\beta}=N_{abc}$时为了得到与实际两相电机 M_2 相等的电压值(u_α，u_β)，电流值(i_α，i_β)，要令 $K_U=2/3$ 和 $K_I=1$。得到的两相等效模型和实际两相电机一致增加了使用者的信心。然而，选择 $K_U\neq K_I$ 会产生问题。对电压和电流采用不同的转换会使 abc 坐标系和 $\alpha\beta$ 坐标系下的 u/i 比值不相等。换句话

说，转换中的阻抗是变化的。在 abc 坐标系和 $\alpha\beta$ 坐标系中参数 R，X 等的值是不相等的。由 abc 向 $\alpha\beta$ 转换时阻抗要乘以 3/2。这并不表示模型不正确，这只是减弱了清晰性，增加了错误几率。

前面的讨论表明令 $K_U = 2/3$ 和 $K_I = 1$ 的克拉克变换可以使得两相时电压电流值与实际的两相电机 M_2 完全一致。但是，这样的转换会改变电阻值，增加了使用模型的难度。鉴于此，整本书中均采用 $K_I = K_U = K_\Psi$，尽管这样与实际电机 M_2 中的电压电流值不一致。

一般来说，选择状态变量的转换时，应该考虑电阻(R) 和电感(X) 不变。因此，阻抗值和电感值不变是先决条件。换句话说，模型的易读性和可用性相比于与实际电机 M_2 的相似性更重要。

在电机的分析和建模中，所有状态变量的转换都是为了保持电压、电流和磁通比值不变。这样，阻抗和电感才不会变。

1）相同的电压和电流变换矩阵能保证阻抗的不变性。

2）相同的磁链和电流变换矩阵能保证自感、互感和漏感的不变性。

3）相同的电压和磁链变换矩阵能保持 $e = \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。当 $K_U \neq K_\Psi$ 时，关系式变为 $e = (K_U/K_\Psi)\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。

问题（15.3）：有没有可能制造一台实际两相电机，匝数满足 $N_{\alpha\beta} = mN_{abc}$，与原电机有相等的磁动势 F_S，同时，电压、电流和磁链满足 $K_I = K_U = K_\Psi$ 的克拉克变换一致呢？

解答（15.3）：原三相电机的实际两相模型必须要有与原电机相等的磁动势、磁通、转矩和功率。一个三相绕组可用匝数为 $N_{\alpha\beta} = mN_{abc}$的两相绕组代替。$F_s$ 不变要求两相等效的绕组电流满足 $i_{\alpha\beta} = (3/2)\cdot(i_{abc}/m)$。同时，两相等效中的每匝线圈的电动势都相等，每相多 m 倍的匝数。因此，两相等效的相电压为 $u_{\alpha\beta} = mu_{abc}$。最后，当 $K_U = K_I$ 时，原电机的电压电流比值(u_{abc}/i_{abc}) 与两相等效电机的电压电流比值($u_{\alpha\beta}/i_{\alpha\beta}$) 相等。总结以上：

$$\frac{u_{\alpha\beta}}{i_{\alpha\beta}} = \frac{mu_{abc}}{(3/2)(i_{abc}/m)} = \frac{2m^2}{3}\frac{u_{abc}}{i_{abc}} = \frac{u_{abc}}{i_{abc}}$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow K_U = K_I = K_\Psi = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

因此，当三相电机被两相电机代替，两相电机的每相匝数是之前的$(3/2)^{0.5}$倍，它的电压电流值与克拉克变换得到的值乘以系数$(2/3)^{0.5}$后的值一致。这样的克拉克变换是应用与原 abc 坐标系相同的变换矩阵于 $\alpha\beta$ 坐标来计算电压、电流和磁链的。因此，$K_U = K_I = K_\Psi = (2/3)^{0.5}$。这个转换中的阻抗、电感、磁动势、转矩和功率都是不变的。磁链在 α，β 轴的幅值，电压的幅值和有效值，电流的幅值和有效值都是比 abc 坐标系下的原电机的值高$(3/2)^{0.5}$倍。无理数$(3/2)^{0.5}$的存在就是为了在计算时避免克拉克变换中出现系数$(2/3)^{0.5}$，尽管这是它有利的方面。

问题（15.4）：证明当 $K_U = K_I = K_\Psi = (2/3)^{0.5}$时功率不变。

解答（15.4）：非一般情况下，可以假设电机在稳态时的运行情况。每相绕组的功率可以由电压和电流的有效值以及功率因数来计算。为了证明功率不变，功率因数可认为不变或者是1。电机的总功率由各相功率和相加得到。设三相电机的相电压和电流的有效值是 U_{abc} 和 I_{abc}；电机功率是 $3U_{abc}I_{abc}$。采用克拉克变换，系数为 $K_U = K_I = K_\Psi = (2/3)^{0.5}$，$\alpha\beta$ 坐标系下的电流和电压幅值提高了$(3/2)^{0.5}$倍。因此，α 相的功率为 $[(3/2)^{0.5}U_{abc}]\cdot[(3/2)^{0.5}I_{abc}] = 3/2U_{abc}I_{abc}$。$\beta$ 相的功率与 α 相等，得到总功率为 $3U_{abc}I_{abc}$，即证明了功率的不变性。

问题（15.5）：证明采用系数为 $K_U = K_I = K_\Psi = 1$ 的克拉克变换时，功率变化但满足关系 $P_{\alpha\beta} = (3/2)P_{abc}$。

解答（15.5）：假设三相电机的电压电流均已知，为 u_a，u_b，u_c，i_a，i_b，i_c。利用表达式（15.13）作三相/两相转换，需要知道 u_α，u_β，i_α，i_β。用 abc 坐标系中的参量替换表达式 $P_{\alpha\beta} = u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta$，可以得到 $P_{\alpha\beta} = (3/2)P_{abc}$。

15.6.1 *K* =1 时的克拉克变换

当 $K_U = K_I = K_\Psi = 1$ 时，两相等效电机应该由相同的绕组匝数以获得相等的磁动势。转换之后的变量包括电压电流的幅值增加了3/2倍。转换的阻抗和电感式不变的，但是功率改变。因此，

$$N_{\alpha\beta} = N_{abc} \tag{15.16}$$

$$|\overrightarrow{i_{\alpha\beta}}| = \frac{3}{2}\cdot i_{abc}^{max} \tag{15.17}$$

$$|\overrightarrow{u_{\alpha\beta}}| = \frac{3}{2}\cdot u_{abc}^{max} \tag{15.18}$$

这转换是：

1）阻抗不变；

2）电感不变；

3）功率改变因为

$$P_{\alpha\beta} = \frac{3}{2}P_{abc} \tag{15.19}$$

15.6.2 *K* = $\sqrt{2/3}$时的克拉克变换

当 $K_U = K_I = K_\Psi = (2/3)^{0.5}$时，两相等效电机的绕组匝数要提高到之前的$(3/2)^{0.5}$倍来得到相等的磁动势。转换之后的电压电流幅值增加为之前的$(3/2)^{0.5}$倍。转换的阻抗、电感和功率均不变。因此

$$N_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}}N_{abc} \tag{15.20}$$

$$|\overrightarrow{i_{\alpha\beta}}| = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i_{abc}^{max} \tag{15.21}$$

$$|\overrightarrow{u_{\alpha\beta}}| = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot u_{abc}^{max} \tag{15.22}$$

这转换是：

1）阻抗不变；

2）电感不变；

3）功率不变。

15.6.3　$K=2/3$ 时的克拉克变换

当 $K_U = K_I = K_\Psi = 2/3$ 时，两相等效电机的绕组匝数要提高到之前的3/2 倍来得到相等的磁动势。转换之后的电压电流幅值不变。转换的阻抗和电感不变，但功率改变。因此

$$N_{\alpha\beta} = \frac{3}{2} N_{abc} \tag{15.23}$$

$$|\overrightarrow{i_{\alpha\beta}}| = i_{abc}^{max} \tag{15.24}$$

$$|\overrightarrow{u_{\alpha\beta}}| = u_{abc}^{max} \tag{15.25}$$

转换特性是：

1）阻抗不变；

2）电感不变；

3）功率改变因为

$$P_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} P_{abc} \tag{15.26}$$

15.7　两相等效绕组

前面的部分总结了用两相等效代替三相电机的必要性。克拉克 $3\Phi/2\Phi$ 变换已经介绍和解释了。转换系数的选择以及其对阻抗、电感和功率不变性的影响已经讨论了。下面更进一步的分析 $3\Phi/2\Phi$ 变换。

针对于电压、电流和磁链的克拉克 $3\Phi/2\Phi$ 变换将采用统一的方法，对所有的变量均采用统一的变换矩阵，矩阵前面的系数为 $K=2/3$。下面表达式（15.27）中的符号 V 代表一相绕组的电压、电流和磁链：

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \tag{15.27}$$

结果是，转换之后的阻抗和电感是不变的。因此，系数例如 R_S，R_R，L_m，L_S 和所有的电感值和电阻值都保持它们原来的值不变。

$\alpha\beta$ 坐标系中变量的峰值和有效值等于原 abc 坐标系中变量的峰值和有效值。特性

$u_\alpha(t) \equiv u_a(t)$，$i_\alpha(t) \equiv i_a(t)$，$\Psi_\alpha(t) \equiv \Psi_a(t)$ 也是一样。

选择 $K=2/3$ 的变换得到的 $\alpha\beta$ 坐标系的变量不可能在任何实际的两相原型中得到。就是说，不可能制造出实际的两相定子绕组来代替原三相绕组，来提供相等的磁动势，而且其定子电压和电流与转换得到的一致。F_S 不变要求 $N_{\alpha\beta}=3/2N_{abc}$，由于每匝线圈中的感应电动势相等，这会导致 $u_{\alpha\beta}=3/2u_{abc}$。另一方面，选择转换使 $u_{\alpha\beta}=u_{abc}$。

两相等效的功率 $P_{\alpha\beta}=u_\alpha i_\alpha+u_\beta i_\beta$ 等于 $2/3P_{abc}$。就是说，$\alpha\beta$ 坐标系中的相值与原 abc 坐标系中的相对应的值相等，每相的功率相等，得到 $P_{\alpha\beta}=2/3P_{abc}$。当使用这个模型时，应注意 $P_{\alpha\beta}=u_\alpha i_\alpha+u_\beta i_\beta$ 的数值要乘以 3/2 才能得到原三相电机的功率值。因此

$$P_{abc}=\frac{3}{2}P_{\alpha\beta} \tag{15.28}$$

问题出现了，$\alpha\beta$ 坐标系中满足关系式 $P_{\alpha\beta}=2/3P_{abc}$的模型是否合适表示有着 3/2 倍功率的感应电机。这时应想到坐标变换得到的数学模型的变量并不一定要与任何实际电机一致。尝试设想一个实际的两相等效电机，说明实际 α、β 轴的电压电流变量 u_α，u_β，i_α 和 i_β 对于理解和使用模型也许是有帮助的。但是，$\alpha\beta$ 坐标系中的虚拟电机实际上是数学虚构的，因此，类似于 $P_{\alpha\beta}=2/3P_{abc}$的关系式使模型无效。任何有关电压 u 和电流 i 的电阻都可以用模型 $u_1=Ri_1$ 表示，这里新的电压和电流可由坐标转换 $u_1=2u$ 和 $i_1=2i$ 得到。这个模型得到的功率是之前电阻的 4 倍，它只是用来表示基本的电阻特性。因为转换 $V_1=2V$ 的功率是变化的，使用需要计算实际功率的计算式 $u_1i_1/4$。

15.8 定子绕组的模型

利用克拉克变换，一个三相电机可用等效两相电机表示。虚拟相绕组 α_S 和 β_S 的轴线还是相对于定子的。α_S 轴与原电机 a 相绕组的磁轴重合。用 α_S 和 β_S 量表示电压、电流和磁链叫静止坐标系模型。给定定子绕组的电压、电流和磁链向量，它们的 α_S 和 β_S 组成可以通过 $\alpha_S-\beta_S$ 坐标系相关向量在轴上的投影来建立。

图 15.4 是用两相定子绕组和两相转子绕组表示的感应电机。角度 θ_m 表示转子的位置

$$\theta_m = \theta_{m0} + \int_0^t \Omega_m \mathrm{d}\tau \tag{15.29}$$

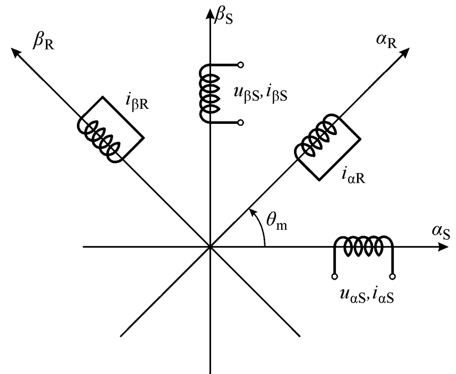


图 15.4 两相等效

通过减少三相定子到两相等效定子，模型包括两虚拟定子绕组 α_S 和 β_S，它们产生的沿着坐标系的 α_S 和 β_S 轴的磁动势和磁链叫静止或定子坐标系。这绕组中的电压和电流用 $u_{\alpha S}$，$u_{\beta S}$，$i_{\alpha S}$ 和 $i_{\beta S}$ 表示，为了将它们与即将在后面提到的定子量区分，后面的量均使

用下标 R。

问题（15.6）：定子磁动势向量 F_s 的方向和幅值已知。求电流 $i_{\alpha S}$和 $i_{\beta S}$。

解答（15.6）：待求的电流量是根据 F_s 向量在轴 α_S 和β_S 上的投影来求。

15.9　电压平衡方程

三相绕组中的电压平衡有包含相电压 u_a，u_b 和 u_c，相电流 i_a，i_b 和 i_c 以及总磁链包括相绕组中的 Ψ_a，Ψ_b 和 Ψ_c。a 相绕组的磁链 Ψ_a 包括 $L_S i_a$，由同一绕组中的电流产生。系数 L_S 是定子绕组的自感。其他绕组的定子和转子也会产生一部分的 Ψ_a。它们产生的部分与绕组中的电流和互感系数成正比。对于 x 绕组，其影响为 $L_{ax} i_x$，这里 L_{ax}是 a 相绕组与 x 绕组之间的互感，i_x 是相应的电流。相绕组有相同的匝数，相等的电阻值 $R_a = R_b = R_c = R_S$，相等的自感 $L_a = L_b = L_c = L_S$。对任意绕组，电压、电流和磁链满足关系 $u = Ri + \mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。因此

$$\begin{aligned} u_a &= R_S i_a + \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t, \\ u_b &= R_S i_b + \mathrm{d}\Psi_b/\mathrm{d}t, \Rightarrow \\ u_c &= R_S i_c + \mathrm{d}\Psi_c/\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} \tag{15.30}$$

通过应用对电压、电流和磁链采用相同变换矩阵的克拉克坐标变换，电压平衡方程可以被转换到 $\alpha_S - \beta_S$ 坐标系，用电压、电流和磁链向量在 α_S 和 β_S 轴的投影来表示。$\Psi_{\alpha S}$和 $\Psi_{\beta S}$值是定子磁链向量在轴 α_S 和 β_S 的投影。它们可以由对相绕组磁链 Ψ_a、Ψ_b 和 Ψ_c 的和采用三相/两相转换来计算得到。此外，转换矩阵可以应用于式（15.30）的整个右边，得到下式：

$$\begin{aligned} u_{\alpha S} &= R_S i_{\alpha S} + \mathrm{d}\Psi_{\alpha S}/\mathrm{d}t \\ u_{\beta S} &= R_S i_{\beta S} + \mathrm{d}\Psi_{\beta S}/\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{15.31}$$

上述等式代表了定子绕组的两相等效电压平衡。除了定子的建模，还需要对短路的笼型转子建模。转子回路的电压平衡等式将完善感应电机电气系统的模型。

15.10　笼型转子的建模

笼型转子的导体数量相对较多，它们由前方和后方的环路短路了。由转子磁回路分离的笼型转子的例子如图 15.5a 所示。当笼型转子 $N_R = 28$ 导体时，可以确定 14 个短路的线圈，每一个由一对位置相对的导体组成。因此可以建一个转子模型，由 14 个相互磁耦合的短路线圈组成，同时也与定子绕组 α_S、β_S 耦合，如图 15.5b 所示。然而，这样的模型没有实用价值。它的电感矩阵是 16×16 阶的。因此，需要另外的笼型转子建模方法。

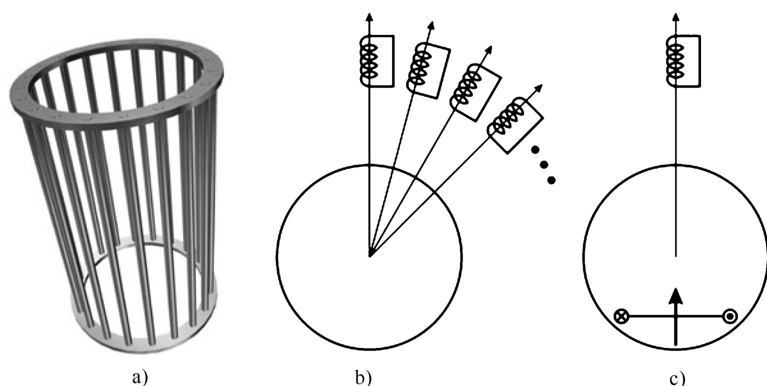


图 15. 5 笼型转子的建模

第一步，需要观察图 15. 5 的 c 部分，假设转子磁链沿着垂直轴脉动。然后，需要得到一个在这种特殊情况下的笼型转子模型来反映感应转子磁动势和电流。转子导体可认为是一系列相对垂直轴对称分布的线圈，如图 15. 5c 所示。假设一对对的转子导体组成了在相同的水平面上一个个线圈，同时假设这线圈间没有其他联系，线圈中的电流产生的转子磁链是垂直轴的。在这些假设下，它们不可能产生任何水平方向的磁链。因此，此类转子绕组是摆放在垂直轴上线圈的象征，如图 15. 5 所示。这样的象征表示转子线圈可被设想成一个与磁轴垂直的转子短路相。这种方法暂时忽略了前后环路对所有导体都短路的情况。假设外面的定子磁链沿着垂直轴脉动，个别的转子线圈的磁链会改变，会产生磁动势和短路转子线圈中相应的电流。这个设想实验证明与图 15. 5 的 c 部分相连的转子绕组产生垂直脉动的外部磁通会对笼型转子短路有影响。转子的感应电流是由外部磁通抑制磁通变化的变化量引起的。就是说，它们对转子磁通的影响是与原磁通变化的方向相反的。

然而，当外部磁通的变化量是水平分量时，笼型转子的短路影响并不是一样的。磁链沿着水平方向脉动，没有感应磁动势和转子电流，因为唯一的相绕组转子的磁轴是垂直的。因此，它并不反映磁通水平分量的变化。记住图 15. 5c 的设置只反映磁链垂直的方向的变化。因此，只有一相短路的相绕组不能作为笼型转子短路现象的准确表示。

一个被前后方导体环短路的实际笼型号转子显示在任意方向都有它的短路影响。事实上，底部环在所有转子条之间形成了短路，造成了在任意对转子条之间形成短路的结果。这样，外部磁链在任意方向上的变化会在转子线圈中感应出磁动势和电流，这些线圈的磁轴与磁链的变化方向是对齐的。笼型转子是对称的，它有一定数量的导体。因为这样，笼型绕组可以用三相绕组建模，独立的转子相短路且均相差 $2\pi/3$，如图 15. 6a 所示。也可以用两相短路绕组对转子建模，如图 15. 6b 所示。笼型转子两相模型的正确性可以根据考虑磁链在任意方向上的变化来分析转子反应的方法来证实。外部磁链在任

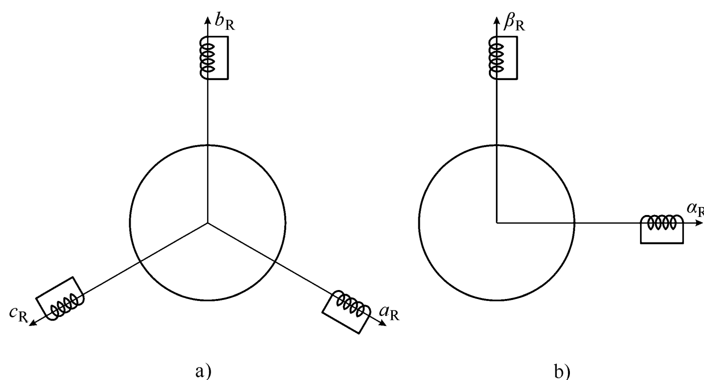


图 15.6　三相笼型转子和它的两相等效

意方向上的变化可以用两个在水平和垂直轴上的正交磁链分量表示，这与两相绕组的磁轴表示是一致的。因为每相的电阻与电感参数是完全相同的，转子的短路影响对磁链的两个分量也是相同的。在水平和垂直轴，转子对磁链变化的反应是感应出磁动势和相应的转子电流。因此，短路笼型的两相表示提供了转子反应的模型，这个模型并不依赖于外部磁链的空间方向变化。因此，假设所有的导体是相同的，它们在转子圆周上的间隔是相等的，不论转子导体的数量，短路转子导体的两相表示是转子绕组的一个完整模型㊀。

在转子转动过程中，转子相对于定子的角度 θ_m 也在变化。因此，两相转子绕组磁轴相对于定子绕组磁轴的相对位置也在改变，在图 15.4 中，转子轴用 α_R 和 β_R 表示。转子短路相的电压为 0；因此，$u_{\alpha R}=u_{\beta R}=0$。转子电流 $i_{\alpha R}$ 和 $i_{\beta R}$ 表示笼型转子中的感应电流，它们产生转子的磁动势 $\boldsymbol{F}_{\mathbf{R}}$，磁动势的幅值和方向由电流 $i_{\alpha R}$ 和 $i_{\beta R}$ 以及转子位置角 θ_m 决定。当 $i_{\alpha R}>0$，$i_{\beta R}=0$ 时，向量 $\boldsymbol{F}_{\mathbf{R}}$ 在 α_R 轴。对于一个给定的向量 $\boldsymbol{F}_{\mathbf{R}}$，笼型转子的两相模型的电流值可以由该向量在转子轴 α_R 和 β_R 上的投影来计算。这些电流与磁动势比值的系数由笼型转子的两相等效模型的匝数决定。转子相 α_R 和 β_R 是虚构的相，就是说，它们是代表笼型转子的数学虚拟。因此，这样虚拟绕组的匝数可以任意选择。需要指出的是，笼型转子的短路影响用两相等效模型表示，可以用横截面小但匝数较多的导体，同时也可以用横截面积大但是匝数少的导体，甚至是 $N_R=1$。原始的笼子是用铝铸的，每个槽中有一个导体。为了方便，经常假设表示转子的两相等效绕组与定子相有相等的匝数。如此，转子变量向定子侧的变换是默认的，在模型中出现的所有转子变量和系数都已经乘以了合适的转换比值 N_S/N_R。

㊀ 当笼型转子结构被破坏时，转子绕组不能用两相等效表示。当一个或者以上的导体断了或者没有连接到短路环时，在某些方向上转子对此磁链变化的反应也不相同。这些情况书中不做介绍。

15.11　转子绕组的电压平衡方程

定子和转子的两相表示将感应电机电气系统的数学模型简化为一组四对相绕组。一对相绕组在定子上，另一对相绕组在转子上。由于转子的转动，相绕组间的相对位置在变化。这些相的电压平衡方程是 $u=Ri+\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$，这里的 u，R，i 和 Ψ 分别指跨相绕组终端间的电压，绕组电阻，电流和总磁链。转子绕组是短路的；这样，电压平衡表达式如下：

$$
\begin{aligned}
u_{\alpha S} &= R_S i_{\alpha S} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\alpha S}}{\mathrm{d}t} \\
u_{\beta S} &= R_S i_{\beta S} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\beta S}}{\mathrm{d}t} \\
0 &= R_R i_{\alpha R} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\alpha R}}{\mathrm{d}t} \\
0 &= R_R i_{\beta R} + \frac{\mathrm{d}\Psi_{\beta R}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
\tag{15.32}
$$

15.12　电感矩阵

一个感应电机的电气系统由 4 个电压平衡微分方程表示，该方程由 4 个电流和 4 个磁链组成。在这 8 个变量中，只有 4 个状态变量。就是说，如果电流 $i_{\alpha S}$，$i_{\beta S}$，$i_{\alpha R}$ 和 $i_{\beta R}$ 被提升为状态变量，那么 4 个磁链 $\Psi_{\alpha S}$，$\Psi_{\beta S}$，$\Psi_{\alpha R}$ 和 $\Psi_{\beta R}$ 可以用电流表示。由于铁磁材料的非线性和磁饱和度，磁链和电流之间的关系不是线性的。在假设条件下电机建模，包括假设铁磁材料的 B-H 特性曲线是线性的，磁链与电流之间的关系是线性的，定义为电感矩阵。对于该感应电机，其电感矩阵为式（15.33）。电感矩阵的主对角线的参数为相绕组的自感。参数 $L_{11}=L_S$ 是相绕组 α_S 的自感。已知定子磁回路的磁阻 R_μ 和匝数 N_S，定子的自感的计算式为 $L_{11}=L_{22}=L_S=N_S{}^2/R_\mu$。定子每相的匝数都相同。同时，沿着电机周围的气隙不会变化，因此，磁阻也是相同的。所以，两相定子有相同的自感 L_S。转子 α_R 和 β_R 相的自感参数为 $L_{33}=L_{44}=L_R$。假设转子相绕组与定子相绕组有相等的匝数，则 L_S 与 L_R 之间的不同由定子和转子磁链遇到的磁阻决定。转子磁力线与定子磁力线穿过的气隙是相同的。因此，定子磁链对应的磁阻与转子磁链对应的磁阻是基本相等的。L_S 与 L_R 间微小的差别在于漏磁链的路径不同和漏电感不同：

$$
\begin{bmatrix} \Psi_{\alpha S} \\ \Psi_{\beta S} \\ \Psi_{\alpha R} \\ \Psi_{\beta R} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
L_{11} & 0 & L_m\cos\theta_m & -L_m\sin\theta_m \\
0 & L_{22} & L_m\sin\theta_m & L_m\cos\theta_m \\
L_m\cos\theta_m & L_m\sin\theta_m & L_{33} & 0 \\
-L_m\sin\theta_m & L_m\cos\theta_m & 0 & L_{44}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} i_{\alpha S} \\ i_{\beta S} \\ i_{\alpha R} \\ i_{\beta R} \end{bmatrix}
\tag{15.33}
$$

15.13　漏磁通与主磁通

如果转子转到定子一相磁轴与转子一相磁轴重合的位置，它们之间的互感将出现最大值。图 15.7 定义了主磁通和漏磁通。定子相一匝线圈中磁通与转子相一匝线圈中的磁通由下式得出

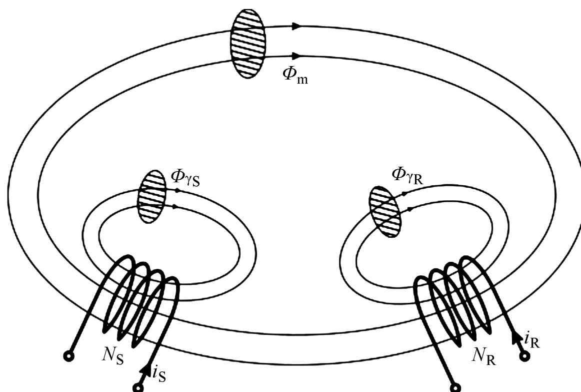


图 15.7　主磁通和漏磁通

$$
\begin{aligned}
\Phi_S &= \Phi_{\gamma S} + \Phi_m \\
\Phi_R &= \Phi_{\gamma R} + \Phi_m
\end{aligned}
\tag{15.34}
$$

两磁通有相同的部分，与定子和转子一样，和包含两绕组的磁场线有关。另外，也有漏磁通部分。定子漏磁链与只包围定子绕组的磁通有关。它不穿过气隙，也不到达转子绕组。定子电流和转子电流都产生主磁通。一匝线圈中的主磁通 Φ_m 包括定子电流产生的分量（Φ_m^S）和转子电流产生的分量（Φ_m^R）

$$
\Phi_m = \Phi_m^S + \Phi_m^R \tag{15.35}
$$

相绕组中的磁链由每匝线圈中的磁通以及每相的匝数决定。因此

$$
\begin{aligned}
\Psi_S &= N_S\Phi_S = N_S\Phi_m + N_S\Phi_{\gamma S} = N_S\Phi_m + \Psi_{\gamma S} \\
\Psi_R &= N_R\Phi_R = N_R\Phi_m + N_R\Phi_{\gamma R} = N_R\Phi_m + \Psi_{\gamma R}
\end{aligned}
\tag{15.36}
$$

当 $N_S = N_R$ 时，定子和转子中的主磁通分量相等。记住 N_R 与转子两相等效绕组一致，N_S 与定子两相等效一致时，设计一个数学虚拟对笼型转子建模。磁链 $\Psi_{\gamma S}$是定子绕组的漏磁链，磁链 $\Psi_{\gamma R}$是转子绕组的漏磁链。比例系数是绕组的漏电感。对图 15.7 所示的绕组，漏电感为

$$
L_{\gamma S} = \frac{\Psi_{\gamma S}}{i_S},\ L_{\gamma R} = \frac{\Psi_{\gamma R}}{i_R} \tag{15.37}
$$

在一致位置的定子和转子绕组的主电感等于

$$L_m = L_{SR} = \frac{N_S \boldsymbol{\Phi}_m^R}{i_R} = L_{RS} = \frac{N_S \boldsymbol{\Phi}_m^S}{i_S} \tag{15.38}$$

相绕组的自感可以由绕组磁链和绕组电流的商来决定，其中磁链只由该绕组的电流产生，而不受其他绕组电流的影响。这个磁链一部分是主磁链，剩下的部分是漏磁链。定子和转子的自感是

$$L_S = \frac{N_S \boldsymbol{\Phi}_m^S + N_S \boldsymbol{\Phi}_{\gamma S}}{i_S} = \frac{N_S \boldsymbol{\Phi}_m^S + \boldsymbol{\Psi}_{\gamma S}}{i_S} = \frac{N_S}{N_R} L_m + L_{\gamma S}$$

$$L_R = \frac{N_R \boldsymbol{\Phi}_m^R + N_R \boldsymbol{\Phi}_{\gamma R}}{i_R} = \frac{N_R \boldsymbol{\Phi}_m^R + \boldsymbol{\Psi}_{\gamma R}}{i_R} = \frac{N_R}{N_S} L_m + L_{\gamma R} \tag{15.39}$$

因此，漏电感组成了相绕组自感的一部分。当两绕组间的磁耦合减弱时，漏感会增大。当定子和转子绕组匝数相等时，同时转子侧量向定子侧转化后，前面方程的形式为

$$L_S = L_m + L_{\gamma S}$$

$$L_R = L_m + L_{\gamma R} \tag{15.40}$$

15.14 磁耦合

定子的漏电感和转子的漏电感存在于不同的磁回路，它们也可能会有不同的磁阻。因为这个原因，漏阻抗可能不同。

定子磁通全部包括定子和转子部分，但是也存在一些磁场线只包围定子导体。它们不穿过气隙，而且不包围转子导体。这些磁场线包括定子漏磁通。定子漏磁通只占定子磁通 $\boldsymbol{\Phi}_S = (L_S i_S)/N_S$ 的很小一部分。转子的漏磁通是相同定义的。定子和转子槽的形状不同，导体的形状和截面的不同都可能会导致定子和转子磁通回路上磁阻的不同。

主磁通回路上遇到的磁阻对于定子和转子绕组是唯一而且相同的。在两种情况下，主磁通穿过气隙，会穿过全部的磁阻。另外，主磁通包围定子和转子绕组，穿过齿槽、磁轭以及定子和转子磁回路的其他部分。另一方面，定子和转子的漏磁通分量回路中的磁阻可能不相等。就是说，漏磁通回路包括槽的宽度，这些可能不相等。总之，一个较窄的齿缝开度会使漏磁通的磁阻较小，漏电感较小。

在电机中，机电转换装置的功率和电磁转矩取决于定子和转子绕组间的磁耦合。更好的耦合会产生更大的转矩和功率，因此要使漏磁通尽可能的低。理想情况下，定子和转子的磁耦合系数 $k = L_m/(L_S L_R)^{0.5}$ 应达到统一。漏磁通是相应的差值 $1-k$，在这种情况下，它变为 0，同时漏电感 $L_{\gamma S}$，$L_{\gamma R}$ 也为 0。实际的电机不能设计成耦合系数达到 1。这样的耦合要求两绕组的导体互相相邻，以阻止任何的漏磁通，但是由于实际原因，这是不可行的。由于机械和电气原因，定子和转子中要由气隙隔开。在要求在高压下运转的电机中，独立导体间的绝缘体要承受住高压。因为如此，绝缘层应很厚，独立导体间的距离也一样。相应导体间的距离变大，会使得漏磁通的空间变大，漏磁通变大。低压电机中（400V，50Hz）的耦合系数的暂定值是 $k \sim [0.9..0.98]$。在应用于高压的电机中，耦合系数的值会相对低些，即 $k < 0.9$。

15.15　L 矩阵

电感矩阵提供了 4 个磁链和的列向量与 4 个电流列向量的联系。电感矩阵的主对角线上是自感参数。主对角线外的是互感。互感是描述定子相与转子相之间耦合的变量。它们在运动过程中是变化的。

忽略定子和转子磁链对应的磁阻的不同，比值 L_S/L_R 取决于定子和转子的匝数，$L_{11}=L_{22}=L_S=N_S{}^2/R_\mu$，$L_{33}=L_{44}=L_R=N_R^2/R_\mu$。自感是严格的正值，但是互感可能是正值也可能是负值。互感 L_{jk}决定由相绕组 j 的电流 i_j 产生的相绕组 k 的磁通增量。两绕组间的磁耦合是相互的，$L_{jk}=L_{kj}$；这样电感矩阵是对称的（$L=L^T$）。正交矩阵的互感等于 0[㊀]；这样 $L_{12}=L_{21}=L_{34}=L_{43}=0$。矩阵中的参数 L_{13}表示绕组 α_S 与 α_R 之间的互感。它们之间的相对位置随着转子转动而变化。当 $\theta_m=0$ 时，一个绕组挨着一个绕组，它们的磁轴是重合的。在这个位置时，耦合最强，一个绕组中的电流对另一个绕组中的磁通的影响最大。当 $\theta_m=\pi/2$ 时，两绕组是正交的，因此，$L_{13}=0$。当 $\theta_m=\pi$ 时，一个绕组的正向电流会在另一绕组中产生反向磁通；这样，$L_{13}<0$。参数 L_{13}的变化可以用表达式 $L_{13}(\theta_m)=L_m\cos(\theta_m)$ 描述，当 $L_m=k(L_SL_R)^{0.5}$时 L_{13}的值最大，可以得到 $\theta_m=0$。矩阵中的其他参数可由相同的方法得到。需要注意的是，矩阵不是固定的。一些参数会随着角度 $\theta_m=\Omega_m t$ 的变化而变化。因此，有一个非零导数 $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t$。在这里，机电转换装置的电磁转矩可由表达式 $T_{em}=\dfrac{1}{2}i^T(\mathrm{d}L/\mathrm{d}\theta_m)i$ 得到。

$$\begin{bmatrix}\Psi_{\alpha S}\\ \Psi_{\beta S}\\ \Psi_{\alpha R}\\ \Psi_{\beta R}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_S & 0 & L_m\cos\theta_m & -L_m\sin\theta_m\\ 0 & L_S & L_m\sin\theta_m & L_m\cos\theta_m\\ L_m\cos\theta_m & L_m\sin\theta_m & L_R & 0\\ -L_m\sin\theta_m & L_m\cos\theta_m & 0 & L_R\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{\alpha S}\\ i_{\beta S}\\ i_{\alpha R}\\ i_{\beta R}\end{bmatrix}\tag{15.41}$$

15.16　转子侧变量向定子侧转化

转子绕组的电压平衡关系式已经在 15.9 节中给出了，它们由转子电流 $i_{\alpha R}$和 $i_{\beta R}$组成。转子电流不能直接用。它们不能通过进入笼型转子然后插入测量装置来测得。而且，两相模型用等效的两相短路绕组代替了笼型转子。因此，转子电流 $i_{\alpha R}$和 $i_{\beta R}$并不是通过转子铜条的电流而是取代笼型转子的两相等效的电流。笼型转子的短路效应可以由两相等效来建模，一是采用大量横截面积小的导体代替，或者是采用横截面积大但是数量少的导体。因此，用两相表示的转子的匝数可以任意选择，如下面的例子。

㊀ 这个假设对非线性磁回路是无效的。磁路饱和会影响正交绕组之间的交叉饱和，就是当一个绕组的磁通改变统一磁回路中的饱和系数后，相应的，会改变另一绕组的磁通的现象。

在一个转子槽中放置的所有导体上的电流产生的电动势等于它们的电流和产生的值。槽中可以只有一个导体，电流为100A，或者是有100根导体，每个电流是1A，在这两种情况下，磁动势都为100安·匝。这个值与磁场H沿着闭合圈包围槽的环路积分是一致的。因此，对笼型转子建模的两相绕组系统的匝数可以是任意的，只要转子电流与匝数的乘积Ni与之前的短路笼型转子的值相等。两相转子等效匝数可以任意选择，最常用到的就是$N_R = N_S$。假设转子的匝数与定子相同，会使$L_S = N_S^2/R_\mu = N_R^2/R_\mu = L_R$，得到$L_m = k(L_S L_R)^{0.5} = kL_S = kL_R$，这时定子和转子中的漏电感变为$L_{\gamma S} = L_S - L_m = (1-k)L_S = (1-k)L_R = L_{\gamma R}$。假设定子和转子之间磁通对应的磁阻的差别可以忽略，上述表达式是这一基础上得到的。这个假设在大部分情况下都是不成立的。

电感矩阵允许4个磁链都可以用电流表示。例如，定子α相的磁链是

$$\Psi_{\alpha S} = L_S i_{\alpha S} + L_m \cos\theta_m - L_m \sin\theta_m i_{\beta R} \tag{15.42}$$

问题（15.7）：一感应电机的定子电流为$i_{\alpha S} = I_{mS}\cos\omega_e t$，$i_{\beta S} = I_{mS}\sin\omega_e t$，$\omega_e > 0$，转子电流为$i_{\alpha R} = I_{mR}\cos\omega_x t$，$i_{\beta R} = I_{mR}\sin\omega_x t$，角频率$0 < \omega_x < \omega_e$。电机稳态运行。根据式（15.42）的磁链$\Psi_{\alpha S}$，求转子转速。

解答（15.7）：电流$i_{\alpha S}$和$i_{\beta S}$产生定子电动势和正向旋转磁通。给定转子电流的相序是，它们产生的磁场是相对于转子以角速度$\omega_x = \Omega_x$在相反方向旋转。稳态时，定子和转子磁场同步旋转。因此，可以得到$\omega_m = \omega_x + \omega_e$。对于磁通可以得到相同的关系式，$\Psi_{\alpha S} = L_S I_{mS}\cos\omega_e t + L_m I_{mR}(\cos\omega_m t \sin\omega_x t - \sin\omega_m t \cos\omega_x t) = L_S I_{mS}\cos\omega_e t - L_m I_{mR}\sin(\omega_m t - \omega_x t)$。这些元素必须在稳态时有相同的频率，因为定子和转子的旋转速度相同均为ω_e，保持着相对位置不变。这个条件在下面两种情况下会遇到，当$\omega_m - \omega_x = +\omega_e$和$\omega_m - \omega_x = -\omega_e$时，就是，旋转速度$\omega_m = -\omega_x + \omega_e$或者$\omega_m = \omega_x + \omega_e$。在这种方案下，转差$\omega_{slip} = \omega_e - \omega_m = -\omega_x$是负的；因此，转子旋转速度比磁场快。电机工作在发电机状态。

问题（15.8）：从包括绕组电感矩阵α_S，β_S，α_R，β_R的电感矩阵出发，证明转矩等于$T_{em} = (3/2)(\Psi_{\alpha S} i_{\beta S} - \Psi_{\beta S} i_{\alpha S})$。

解答（15.8）：电磁转矩是由表达式$T_{em} = \frac{1}{2} i^T (dL/d\theta_m)\, i$得到的，$L(\theta_m)$是电感矩阵中取决于定子和转子相对位置$\theta_m$的元素。电感矩阵中的变量元素是$L_{13} = L_{31}$，$L_{14} = L_{41}$，$L_{23} = L_{32}$和$L_{24} = L_{42}$，当这些参数不变时得到$dL_{jk}/d\theta_m = 0$。计算式可以简化，因为$L^T = L$；这样，得到的结果是乘以了两位的贡献系数$L_{13}$，$L_{14}$，$L_{23}$和$L_{24}$。最后，得到$\frac{1}{2} i^T (dL/d\theta_m) i = -L_m \sin(\theta_m) i_{\alpha S} i_{\alpha R} - L_m \cos(\theta_m) i_{\alpha S} i_{\beta R} + L_m \cos(\theta_m) i_{\alpha R} i_{\beta S} - L_m \sin(\theta_m)\, i_{\beta R} i_{\beta S}$。从式（$\Psi_{\alpha S} i_{\beta S} - \Psi_{\beta S} i_{\alpha S}$）出发，将电感矩阵的第一行和第二行引入替换，可得到相同的结果。在表达式$T_{em} = (3/2)(\Psi_{\alpha S} i_{\beta S} - \Psi_{\beta S} i_{\alpha S})$中，系数3/2采用$3\Phi/2\Phi$变换令$K_U = K_I = K_\Psi = 2/3$得到的。

15.17 数学模型

在后面的讨论中，感应电机的数学模型是用坐标系α_S，β_S，α_R，β_R呈现的。电压

平衡方程和电感矩阵已经在前面的部分定义了。加入牛顿等式和转矩表达式 $T_{em}=(3/2)(\Psi_{\alpha S}i_{\beta S}-\Psi_{\beta S}i_{\alpha S})$ 后模型得到进一步的完善。这些微分方程和代数表达式，加上之前采用的近似方法构成了感应电机的数学模型、模型总结到表达式（15.43），（15.44），（15.45），（15.46）中。可以利用现有的表达式去预测电机的动态特性和稳态参数。为了获得这些，需要将式（15.43），（15.44），（15.45），（15.46）放入动态系统的计算机模拟程序中。因此，建立模型是感应电机特性的正确表示方法，但是，它也会有缺点阻碍深入分析讨论，在总结和推导稳态特性时出现困难。

也会有某些特定情况下模型不能准确地表示感应电机。例如，铁耗不能忽略时，或饱和加重了，剩下的两个近似无效的情况下，模型会给出错误的结果。在这些情况下，需要改进和升级模型，让它包括最初忽略的影响。在电机建模中采用的四个近似条件已经在介绍章节中列出并解释过了。

模型包括定子变量的 α_S，β_S 轴分量，转子变量的 α_R，β_R。无论 $3\Phi/2\Phi$ 变换前面的系数 K 取何值，等式（15.43），（15.44），（15.45）均不变，在这里取 $K=2/3$。这个取值在整本书中用到，它要求 $\alpha\beta$ 的功率和转矩均乘以 3/2 来保持初始值不变。

有必要注意 K 值的选择与两相等效电机的匝数 $N_{\alpha\beta}$ 有关。前面已经说明，当 $N_{\alpha\beta}=(3/2)^{0.5}N_{abc}$ 和 $K=(2/3)^{0.5}$ 时，两相等效中的功率、阻抗和电感是不变的。两相是数学虚拟，它不能被实际制造出来。但是，将变量 $i_{\alpha S}$，$i_{\beta S}$，$i_{\alpha R}$ 和 $i_{\beta R}$ 想象成实际相绕组的电流有助于理解电机的基本电压、电流和磁通向量，这对使用模型有帮助。

模型中的电压、电流和磁通分量是相关电压、电流和磁通向量在坐标系 $\alpha_S-\beta_S$ 和 $\alpha_R-\beta_R$ 轴上的投影值。定子向量投影到静止坐标系的 α_S 和 β_S 轴上，转子向量投影到与转子旋转的坐标系的 α_R 和 β_R 轴上。

完整的模型总结在表达式（15.43），（15.44），（15.45），（15.46）中。符号 p 表示磁极对数，将在 16 章中讨论。之前的情况假设 $p=1$，就是说磁场值只有一个 N 极和一个 S 极。

$$u_{\alpha S}=R_S i_{\alpha S}+\frac{d\Psi_{\alpha S}}{dt},\ u_{\beta S}=R_S i_{\beta S}+\frac{d\Psi_{\beta S}}{dt} \tag{15.43}$$

$$0=R_R i_{\alpha R}+\frac{d\Psi_{\alpha R}}{dt},\ 0=R_R i_{\beta R}+\frac{d\Psi_{\beta R}}{dt} \tag{15.44}$$

$$\begin{bmatrix}\Psi_{\alpha S}\\ \Psi_{\beta S}\\ \Psi_{\alpha R}\\ \Psi_{\beta R}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_S & 0 & L_m\cos\theta_m & -L_m\sin\theta_m\\ 0 & L_S & L_m\sin\theta_m & L_m\cos\theta_m\\ L_m\cos\theta_m & L_m\sin\theta_m & L_R & 0\\ -L_m\sin\theta_m & L_m\cos\theta_m & 0 & L_R\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{\alpha S}\\ i_{\beta S}\\ i_{\alpha R}\\ i_{\beta R}\end{bmatrix} \tag{15.45}$$

$$T_{em}=\frac{3}{2}p(\Psi_{\alpha S}i_{\beta S}-\Psi_{\beta S}i_{\alpha S}) \tag{15.46}$$

15.18　缺点

以上的模型对于感应电机的动态和稳态特性是一个适当的表示，但是在一些深入的

应用中有些问题。这些应用是稳态分析，推导等效电路，构想和设计控制算法。模型的主要的问题是：

1）模型中三角函数项的存在；

2）状态变量即使在稳态时也表现出正弦变化。

以上关于模型清晰和使用性的问题的重要性可以通过考虑电压平衡方程看到。而且，讨论将结束，提出进一步的措施获得更清晰直接的模型。

通过用电流来表示磁通，以及对定子绕组推导电压平衡方程的表达式，可以得到下面的式子：

$$u_{\alpha S}=R_S i_{\alpha S}+L_S\frac{di_{\alpha S}}{dt}+L_m\cos\theta_m\frac{di_{\alpha R}}{dt}-\omega_m L_m\sin\theta_m i_{\alpha R}$$
$$-L_m\sin\theta_m\frac{di_{\beta R}}{dt}-\omega_m L_m\cos\theta_m i_{\beta R}$$
$$u_{\beta S}=R_S i_{\beta S}+L_S\frac{di_{\beta S}}{dt}+L_m\sin\theta_m\frac{di_{\alpha R}}{dt}+\omega_m L_m\cos\theta_m i_{\alpha R}$$
$$+L_m\cos\theta_m\frac{di_{\beta R}}{dt}-\omega_m L_m\sin\theta_m i_{\beta R}$$

微分方程中三角函数项的存在使稳态分析更复杂。得出稳态等效电路也更加复杂。假设去掉电压平衡方程的三角函数项得到

$$u_{\alpha S}=R_S i_{\alpha S}+L_S\frac{di_{\alpha S}}{dt}+L_m\frac{di_{\alpha R}}{dt}$$

这大大简化了稳态关系式，使它变得很清晰。将之前的等式进行拉普拉斯变换，可以得到一个与电压和电流复数形式有关的代数表达式

$$U_{\alpha S}(s)=R_S I_{\alpha S}(s)+sL_S I_{\alpha S}(s)+sL_m I_{\alpha R}(s)$$

在稳态时，电流 $i_{\alpha S}$ 按正弦变化。为了举例，假设所有的电流的角频率都为 ω，稳态分析意味着因子 s 变为 $j\omega$，得到下面表达式：

$$U_{\alpha S}(s)=R_S I_{\alpha S}(s)+j\omega L_S I_{\alpha S}(s)+j\omega L_m I_{\alpha R}(s)$$

这表达式将电压平衡方程的电路表示出来，电路包括电压源 $U_{\alpha S}$，电阻 R_S，带电流 $I_{\alpha S}$ 的电感（L_S-L_m），带电流（$I_{\alpha R}+I_{\alpha S}$）的电感 L_m。考虑示例证明一组常系数的微分方程可以得到表示稳态电机的等效电路图。但是有三角函数项的电压平衡方程是不可能的。

即使在稳态时状态变量的正弦变化会给稳态分析带来很多困难。同时，同样的困难也会在设计电流、磁链和转矩调节控制结构时碰到。状态变量在稳态时保持不变的模型比较好掌握。在它们的稳态方程中，所有状态变量的时间导数消失，剩下的表达式理解和使用很简单。但是，现有的模型没有这种可能。模型的状态变量，如 $i_{\alpha S}$，在稳态时呈现正弦变化。

大部分数学模型一般都用它们的状态变量在稳态时不变这样的方式来列出公式。这样，这些状态变量的时间导数就为 0 了。在这些情况中，稳态关系式是通过除去微分方程中的时间导数得到的。

状态变量即使在稳态时都不断变化使得控制问题很难解决。举一个例子，电机应用于工业机器人和自动驾驶车辆时，电机是用于控制它们的运动。为了达到这一目的，需要调节电机的相关变量，如磁通、转矩、转速和电流。调节这个词意味着：

1）对被控变量（如相电压）定义一个需要达到并保持的理想参考值；

2）测量被控变量（电流），计算误差，被控变量与期望值之间误差；

3）执行控制算法，收到误差和计算控制的计算过程和公式，控制算法的输出量㊀。

4）通过执行机构或驱动器㊁将控制变量带到控制下的系统中去。

当参考值不变时，通过增加积分控制动作到控制算法中去可以将稳态误差减小到0。相应的控制动作是与误差的积分成比例的。但是，这只能将恒定的参考量的误差修正到0。当参考值不断变化时，控制动作会作用于控制变量来追踪这些变化。这是误差的成本，不能被移除。就是说，被控变量可以跟踪参考量，但是存在追踪误差，误差大小取决于参考量变化的速率。出现误差会危害到整个系统的运行。

感应电机相绕组中的电流是交替的。因此，即使在稳态时，变量 $i_{\alpha S}$ 和 $i_{\beta S}$ 呈现正弦变化。不管是否有必要调节感应电机的定子电流，被控变量即使在稳态时仍是变量。这就需要转换数学模型，让它们的状态变量的稳态值是恒定的，利用这个模型来用公式表示控制算法。

问题（15.9）：对于定子电流频率为 0 的感应电机，是否存在一个操作模式？

解答（15.9）：因为感应电机由恒定频率的电压源供电，定子电流的频率由对定子绕组供电的电压频率决定。如果感应电机是连接到输电线的，定子电流的频率就为50Hz，与转子的转速、转矩或功率无关。因为这样，只有当感应电机由变频变压的电源供电时定子电流才会出现不同的频率，如静态功耗转换器，它采用半导体功率开关，工作原理是脉冲宽度调制原理。这样，定子绕组可以由幅值变化、频率变化的对称三相电压供电。

进一步考虑，假设供电电压变化频率 ω_e 能用于实现所需的操作模式。对两极电机，$\omega_e = \Omega_m + \omega_{slip}$，这里 Ω_m 是转子转速，ω_{slip}是转差频率。操作模式中，当通过定子的是直流电流时，即 $\Omega_m = -\omega_{slip}$，得到 $\omega_e = 0$。需要注意的是，转差功率与得到的电磁转矩成正比。因此，当旋转的转矩和转速异号时，$\omega_e = 0$ 的工作模式可以达到。转子旋转的转速与转差频率大小相等，但是异号的。一种情形之一是，电机停止，转矩 $T_{em} = 0$ 另外一个例子，当转子旋转速度是 −300r/min，它产生正方向的转矩，转子电流是 5Hz 的。

㊀ 通过使用叫做驱动器或放大器的装置，控制输出会影响系统，改变被控变量。控制算法适用于减小误差，使被控变量接近参考值。适当的控制算法能保证误差顺利地减小，一会儿之后，达到 0。因此，稳态值的误差被期望能等于 0。

㊁ 大部分电机的相电压控制器包括功率转换装置，采用功率晶体管和 PWM 装置，也有数字信号控制器。控制算法一般是通过对数字信号控制器编程来实现。控制变量是以数值形式得到，如处理器寄存器中的二进制字符。另一方面，有可能改变相电压的实际控制变量是穿过相绕组的电压，它的变化范围是 ±600V。执行机构一般是转换晶体管，它可以接受数字信号控制器传来的门信号。

15.19 在同步坐标系中建模

基于 $\alpha-\beta$ 坐标系的数学模型在分析和控制时出现问题，因为状态变量即使在稳态时也呈现正弦变化。就是说，当磁动势 F_S 的幅值恒定，磁通恒定，转子转速恒定时，向量电流、电压和磁链在 $\alpha-\beta$ 坐标系轴上的投影即使在稳态时也会像正弦函数变化。模型的缺点可通过采用另一种状态坐标的变换和用新变量取代现有的状态变量来消除。新的变量要经过选择以便他们的值在稳态时不变。新的坐标转换要保持阻抗、电感和功率的不变性。为了达到这一目的，需要对所有的变量采用同一变换矩阵，不论电流、电压或磁链。问题出现了，怎样得到这样新的坐标变换。

15.20 帕克变换

在静止 $\alpha-\beta$ 坐标系中用公式表示的电机模型中，定子电流 $i_{\alpha S}$和 $i_{\beta S}$是向量 $\boldsymbol{F}_S=N_S\boldsymbol{i}_S$ 在 $\alpha_S-\beta_S$ 坐标系的轴上的投影。出现问题是因为 $\boldsymbol{F}_S$ 是旋转向量。它相对于 $\alpha-\beta$ 轴的旋转式的投影 $i_{\alpha S}$和 $i_{\beta S}$是变化的。稳态时，它们变成了正弦函数。为了解决这一问题，需要建立一个新的坐标系，与磁动势 $\boldsymbol{F}_S$ 以相同的速度旋转。这样稳态时，向量在新的轴上的投影就不会变化了，因为旋转向量与新的轴之间的相对位置不变。相同的结论也适用于电压和磁通向量。因此，新的状态坐标的变换应该是新的，与磁场同步旋转的坐标系中建立模型。

通过采用包含 d 和 q 轴的正交旋转坐标系，定子电流向量 $\boldsymbol{i}_S=\boldsymbol{F}_S/N_S$ 在新的轴上的投影 i_d 和 i_q 在稳态时的值恒定。因此，通过将所有的定子变量由静止的 $\alpha_S-\beta_S$ 坐标系向正交的旋转 $d-q$ 坐标系转换，可以得到定子绕组的相关量均有恒定稳态值的模型。

变换意味着有一个用 $\alpha_S-\beta_S$ 坐标系的变量（$i_{\alpha S}$和 $i_{\beta S}$）表示 $d-q$ 坐标系的变量（i_d 和 i_q）的关系式。采用一个坐标变换不会对感应电机和它的磁通和转矩带来任何变化。这个变换只代表一种不同的观点，只是通过另一种数学表示方法来表示同一个实际系统。因此，不论数学模型是在静止或者同步坐标系中，它必须描述相同的磁动势、磁通、电压和电流向量，机电转换的转矩、转速和功率也一样。因此，$\alpha-\beta$ 坐标系的模型和 $d-q$ 坐标系的模型必须有同一个定子磁动势 F_S。换句话说，电流 $i_{\alpha S}$和 $i_{\beta S}$产生的向量 $\boldsymbol{F}_S$ 要与定子电流转换到 $d-q$ 坐标系的电流 i_d 和 i_q 产生的向量 $\boldsymbol{F}_S$ 有相同的幅值和空间位置。

坐标变换是必要的数学过程，它并不一定要能产生与实际电机相一致的状态变量。在很多情况中，建造一个与坐标变换中得到的电压值和电流值一致的感应电机甚至是不可能的。但是，用变量 i_d 和 i_q 表示一个新的虚拟的定子绕组电流有助于理解和使用新的模型。新的转换可以表示为，将定子绕组 α_S，β_S 去掉，安装新的定子绕组 d，q，它们的磁轴放置在新的坐标系的 d，q 上，如图 15.8 所示。这些新的 $d-q$ 绕组不能实际的制造出来，所以称它们是虚拟的是正确的。这些新的虚拟绕组电流 i_d 和 i_q 产生的磁

动势 F_S 必须要与之前的相电流 $i_{\alpha S}$和 $i_{\beta S}$产生的相等。

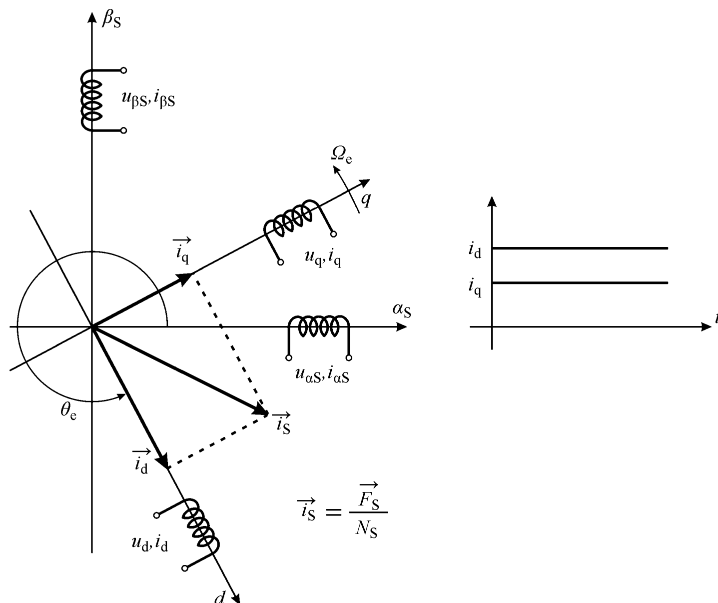


图 15.8　$d-q$ 坐标系的位置和虚拟绕组 d 和 q 中的相应稳态电流

在后面包含新的 $d-q$ 坐标系的图中，介绍新的概念，虚拟定子绕组用 d 和 q 表示，虚拟转子绕组用 D 和 Q 表示。新坐标系中的定子电流用 i_d 和 i_q 表示，转子电流用 i_D 和 i_Q 表示。电流在 $d-q$ 坐标的分量就是电流向量在 dq 轴的投影。如果绕组 dq 真的存在，电流 i_d 和 i_q 会产生与原电机中实际存在的定子磁动势相等的向量 F_S。不管是定子还是转子都没有实际属于 $d-q$ 坐标系的定子绕组。在图中标出它们的唯一目的是使由旋转变换得到的状态变量形象化，如 i_d 和 i_q，同时有助于模型的分析和使用。

15.21　变换矩阵

旋转变换的关系式可以由向量 $\boldsymbol{F}_S$ 不变的条件得到。在前面的图中，角度 θ_e 表示旋转的 d 轴与静止的 α_S 轴之间的角度偏移。电流分量 $i_{\alpha S}$在 d 轴上的投影为 $i_{\alpha S}\cos\theta_e$，电流 $i_{\beta S}$在相同的轴上的投影为 $i_{\beta S}\sin\theta_e$。因此，向量 $\boldsymbol{F}_S/N_S$ 在 d 轴上的投影是 $i_{\alpha S}\cos\theta_e + i_{\beta S}\sin\theta_e$。对于 $d-q$ 坐标系的变量，电流 i_q 产生了 $\boldsymbol{F}_S$ 在 q 轴方向上的分量，它与 $\boldsymbol{F}_S$ 在 d 轴上的分量无关。因此，电流 i_d 必须等于 $i_{\alpha S}\cos\theta_e + i_{\beta S}\sin\theta_e$ 才能保证向量 $\boldsymbol{F}_S$ 不变（图 15.9）。通过将 $i_{\alpha S}$和 $i_{\beta S}$在 q 轴上的分量相加，得到虚拟相绕组 q 上的电流 i_q 等于 $-i_{\alpha S}\sin\theta_e + i_{\beta S}\cos\theta_e$。帕克旋转变换总结为表达式（15.47）。转换矩阵的行列式等于 1。通过任意向量由静止坐标系向同步坐标系转换，得到的向量与之前的幅值相等。对电

压、电流和磁通采用相同的转换矩阵，可以得到 $d-q$ 坐标系中的相关变量（u_d，u_q，i_d，i_q，Ψ_d，Ψ_q）。该坐标变换的阻抗、电感和功率是不变的（$\Delta T=1$）。变量 Ψ_d 和 Ψ_q 表示在 dq 上的虚拟绕组上的总磁链。

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_S & \sin\theta_S \\ -\sin\theta_S & \cos\theta_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha S} \\ i_{\beta S} \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha S} \\ i_{\beta S} \end{bmatrix} \tag{15.47}$$

问题（15.10）：从表达式 $u_{\alpha S}=R_S i_{\alpha S}+\mathrm{d}\Psi_S/\mathrm{d}t$ 出发，可以得到 $u_d=R_S i_d+\mathrm{d}\Psi_d/\mathrm{d}t$ 吗？

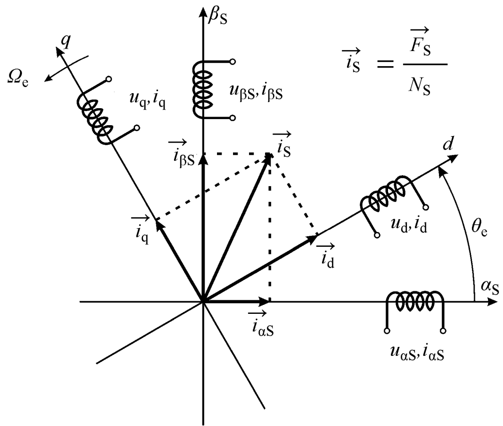


图 15.9　F_S/N_S 在静止和转动坐标系中的投影

解答（15.10）：相绕组 d 是虚拟绕组。即使，有可能列出由变量 u_d，i_d 以及 $d-q$ 坐标系的其他变量组成的电压平衡方程。因为转换的阻抗是不变的，希望出现不变的定子阻抗 R_S。但是，这不能得到 $u_d=R_S i_d+\mathrm{d}\Psi_d/\mathrm{d}t$。就是说，将电压平衡方程 $u=Ri+\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$ 应用于实际的或者可以制造出来的绕组中。在 $\alpha_S-\beta_S$ 坐标系建模时用到关系式 $u=Ri+\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。尽管原电机是三相，$\alpha_S-\beta_S$ 坐标系中的两相定子绕组可以实际制造出来。因此，定子绕组 α_S 和 β_S 可以被看作是实际的绕组。这样，$\alpha_S-\beta_S$ 坐标系中的电压平衡等式是 $u=Ri+\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。另一方面，$dq$ 坐标系中的绕组不能实际制造出来。之后进行的分析证明电压 u_d 不等于 $R_S i_d+\mathrm{d}\Psi_d/\mathrm{d}t$。$dq$ 坐标系中的实际电压平衡方程，描述的是虚拟电压，可以将变换矩阵代入方程 $u_{\alpha S}=R_S i_{\alpha S}+\mathrm{d}\Psi_{\alpha S}/\mathrm{d}t$ 和 $u_{\beta S}=R_S i_{\beta S}+\mathrm{d}\Psi_{\beta S}/\mathrm{d}t$ 得到。

15.22　转子变量变换

得到属于同一坐标系的定子和转子变量是有利的。为了达到这一目的，有必要对转子变量采用旋转变换，找到它们的 DQ 等效。

对定子相绕组 α_S 和 β_S 采用帕克变换得到 dq 坐标系中两虚拟定子相。同样的，有必要用属于 dq 坐标系的两虚拟转子相替代短路的笼形转子。为清楚起见，后面的概念中，定子变量都用小写下标 dq，转子变量都用大写下标 DQ。

有必要解释对定子和转子变量采用相同的同步旋转坐标系来转化的必要性。首先，要记得静止 $\alpha-\beta$ 坐标系中的电压平衡方程因为微分方程的变量系数很难处理。这些变量系数来自电感矩阵的变量元素，如 $L_{13}=L_m\cos(\theta_m)$。由于绕组间的相对位置变化，定子与转子绕组间的一些互感是变量（15.48）由于绕组的相对位置的变化。在式（15.45）中，这来自于 $\alpha_S-\beta_S$ 坐标与 $\alpha_R-\beta_R$ 坐标相对变化。只要两绕组之间的相对位置不变，它们之间的互感不变。因此，属于相同坐标系的一对绕组，不论是旋转的还

是静止的，不改变它们之间的相对位置，它们就会有恒定的互感。转子绕组由 $\alpha_R\beta_R$ 坐标系向 $d-q$ 坐标系的转换可以被描述为，移走原有的 $\alpha_R\beta_R$ 绕组，用一对标记为 DQ 的虚拟转子相来代替它们，属于相同 $d-q$ 坐标系的虚拟定子相标记为 dq。现在定子 dq 绕组相对于转子 DQ 绕组不动。因此，所有的自感和互感均恒定。与 dq 坐标系中的虚拟绕组一致的电感矩阵的元素是恒定的。因此，dq 坐标系的电压平衡方程没有变化参量，这将在后面介绍。

除了得到一个常数电感矩阵，为了得到有恒定稳态值的转子变量的数学模型，也需要将转子变量转化到 $d-q$ 坐标系。实际的笼形转子电流是交流，角频率是 $\omega_{slip}=\omega_e-\omega_m=\omega_e-p\Omega_m$。这些电流产生的磁动势和转子磁通会相对于转子以速度 Ω_{slip} 转动。当 $p=1$ 时，它们相对于定子的速度是 $\Omega_{slip}+\Omega_m=\omega_{slip}+\omega_m=\omega_e$。换句话说，转子磁动势和磁通向量与定子向量同速度旋转（同步）。稳态时可能会存在某些相和/或这些变量之间的空间转移。因此，转子变量在 $d-q$ 的投影在稳态时不会变化。因此，实际的转子变量应转化到 $d-q$ 坐标系。

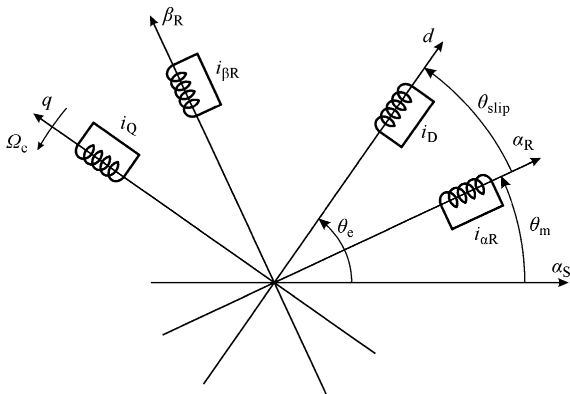


图 15.10　转子坐标系统和 dq 系统

转子变量的旋转变换如图 15.10所示。需要注意的是转子电流与绕组匝数的乘积 $N_R i_{\alpha R}$ 和 $N_R i_{\beta R}$ 等于转子磁动势 $\boldsymbol{F_R}$ 在转子坐标系的 $\alpha_R-\beta_R$ 轴上的投影。轴 α_S 和 α_R 之间的角位移由转子位置 θ_m 决定。同步旋转 $d-q$ 坐标系超前于转子 θ_{slip} 角度，这样，它超前于定子的角度为 $\theta_e=\theta_{slip}+\theta_m$。

转子变量的变换矩阵由转子磁动势的不变性得到。转子相电流在 d 轴上的投影等于 $i_{\alpha R}\cos\theta_{slip}$，转子相电流在相同轴上的投影为 $i_{\beta R}\sin\theta_{slip}$。因此，虚拟绕组 D 中的电流 $i_D=i_{\alpha R}\cos\theta_{slip}+i_{\beta R}\sin\theta_{slip}$。同样的，$i_Q=-i_{\alpha R}\sin\theta_{slip}+i_{\beta R}\cos\theta_{slip}$。这些表达式可以写成矩阵形式，见式（15.48）。同样的转换矩阵适用于所有的转子变量，得到虚拟转子绕组的电压 $u_D=u_Q=0$ 和总的磁链 Ψ_D 和 Ψ_Q：

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta_{slip} & \sin\theta_{slip} \\ -\sin\theta_{slip} & \cos\theta_{slip} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_{\alpha R} \\ i_{\beta R} \end{bmatrix} \tag{15.48}$$

15.23　向量和复数

帕克变换将在 $\alpha-\beta$ 坐标系中的向量的坐标与同样的向量在 $d-q$ 坐标系中的坐标联系起来。在 $\alpha\beta$ 坐标系中或者在 dq 坐标系中，所有的电压、电流、磁动势和磁

通都可以用向量表示。所有的向量都有两个分量，与两相绕组有关。每个电压、电流和磁通向量在一个轴上的投影与属于相应轴的相绕组的电压、电流和磁链一致。

当所有的向量都在一个平面时，可以对每个向量采用复数记法。就是说，一个向量可以用复数表示，用实部和虚部分别表示向量在两正交轴上的投影。这样，帕克变换记法可以被简化，变换矩阵简化为一个复数。例如，定子电流的向量直接在 α_S 轴上时，可以用它的 α_S 分量表示，直接在 β_S 轴上时，用 β_S 分量表示。如果把 α_S 轴标上实轴的属性，β_S 轴标上虚轴的属性，则 $\alpha_S-\beta_S$ 平面可以理解为复平面，这时电流向量可以用复数表示：

$$\overrightarrow{i_{\alpha\beta S}}=\overrightarrow{\alpha_0}i_{\alpha S}+\overrightarrow{\beta_0}i_{\beta S}\Rightarrow \underline{i}_{\alpha\beta S}=i_{\alpha S}+\mathrm{j}i_{\beta S}$$

同样地，对于 $d-q$ 坐标系中的电流向量，d 轴可以被标上实轴的属性，q 轴可以被标上虚轴的属性，这样可以将 $d-q$ 平面转化为复平面，电流可以用复数表示 $\underline{i}_{dq}=i_d+\mathrm{j}i_q$。电流向量的复数记法并不是唯一的。当 d 轴作为实轴时，得到数 $\underline{i}_{dq}$，与将 α_S 作为实轴时得到的复数 $\underline{i}_{\alpha\beta}$ 不同。

通过采用复数记法，帕克变换可以写成

$$\underline{i}_{dq}=i_d+\mathrm{j}i_q=\underline{i}_{\alpha\beta S}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_e}$$

$$\begin{aligned}\underline{i}_{\alpha\beta S}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_e}&=(i_{\alpha S}+\mathrm{j}i_{\beta S})(\cos(\theta_e)-\mathrm{j}\sin(\theta_e))\\&=(i_{\alpha S}\cos(\theta_e)+i_{\beta S}\sin(\theta_e))+\mathrm{j}(-i_{\alpha S}\sin(\theta_e)+i_{\beta S}\cos(\theta_e))\end{aligned}$$

逆变换为

$$\underline{i}_{\alpha\beta S}=\underline{i}_{dq}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta_e}$$

作为一个复数，复数 $\underline{i}_{dq}=i_d+\mathrm{j}i_q$ 是用定子变量 i_d，i_q 表示定子电流向量的一种简洁方法。选择实轴（d）和虚轴（q）与实际一致，实际情况中，q 轴超前 $\pi/2$，虚数单位 $\mathrm{j}=\exp(\mathrm{j}\pi/2)$ 表示 $\pi/2$ 的相位移。复数 $\underline{i}_{dq}$ 在稳态时也很重要。当 i_d 和 i_q 保持不变时，$\underline{i}_{dq}$ 的稳态值变为复常数，向量。这个向量的幅值和幅角决定了定子电流的幅值和初始相位。

15.24　*dq* 坐标系下的电感矩阵

采用帕克变换，转子和定子电流可被转换到同步旋转 $d-q$ 坐标系中。虚拟定子绕组用下标 d 和 q 表示，虚拟转子绕组用下标 D 和 Q 表示。$d-q$ 坐标系的旋转不改变定子和转子虚拟相的相对位置；这样，电感矩阵中所有的参数均为常数。定子绕组 d 的磁通由矩阵的第一列决定，$\Psi_d=L_Si_d+L_mi_D$。互感是常数因为绕组 d 和 D 的相对位置不改变。

旋转坐标系的角速度是 Ω_e，与旋转磁场的速度相等。转速 Ω_e 由定子电压和电流的角频率 ω_e 决定。对 2 极电机，$p=1$，$\Omega_e=\omega_e$。d 轴与 α_S 轴之间的角度等于

$$\theta_e = \theta_e(0) + \int_0^t \Omega_e \mathrm{d}\tau \tag{15.49}$$

定子电流是

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha S} \\ i_{\beta S} \end{bmatrix} \tag{15.50}$$

定子电流的复数形式是

$$\underline{i}_{dq} = i_d + \mathrm{j}i_q = \underline{i}_{\alpha\beta S}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_e} \tag{15.51}$$

转子电流是

$$\begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{slip} & \sin\theta_{slip} \\ -\sin\theta_{slip} & \cos\theta_{slip} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha R} \\ i_{\beta R} \end{bmatrix} \tag{15.52}$$

定子和转子绕组用 dq 坐标系中的虚拟的 dq 和 DQ 绕组表示。它们的磁轴重合，而且它们之间没有相对运动。因此，它们之间的互感不变。虚拟绕组 d 和 D 之间的互感为 L_m，绕组 q 和 Q 的互感也一样。正交轴上的绕组之间的互感，例如 d 和 Q，等于 0。电感矩阵是

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_D \\ \Psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_S & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_S & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_R & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \underline{L} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \tag{15.53}$$

问题（15.11）：作用于系统的转动部分包括几个磁耦合轮廓的电磁转矩由表达式 $T_{em} = \frac{1}{2}i^{\mathrm{T}}(\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}\theta_m)\ i$ 得出，这里的 $\boldsymbol{L}$ 是电感矩阵。考虑式（15.53）的电感矩阵，可得出 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}\theta_m$，带入转矩表达式，得到 $T_{em}=0$。这个想法正确吗?

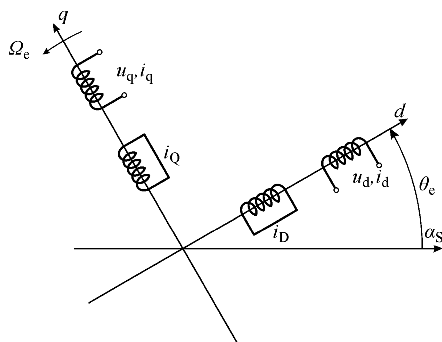


图 15.11　在 dq 坐标系中的定子和转子绕组

解答（15.11）：表达式 $T_{em} = \frac{1}{2}i^{\mathrm{T}}(\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}\theta_m)\ i$ 是由磁场能量的表达式出发和利用实际绕组的电压平衡方程得到的。相同的表达式用在虚拟的、不存在的绕组的电感矩阵和电流是没有根据的。转矩表达式 $\frac{1}{2}i^{\mathrm{T}}(\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}\theta_m)i$ 只能用于电感矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和电流与实际的绕组一致的情况。因此，用（15.53）代替转矩表达式是不对的。需要注意的是转矩表达式可以与 $\alpha\beta$ 变量一起用。这是因为可以用 $\alpha\beta$ 绕组建造一个实际的两相电机来表示原有的三相电机。虚拟绕组如 d，q，D 和 Q 不能存在于实际电机中。但是，它们是作为理解和使用帕克旋转变换的一种方法介绍的。

问题（15.12）：已知三相电机的定子相绕组的自感 L_S 和定子与转子之间的磁耦合系数 k。求如图 15.11 的绕组系统的电感矩阵参数。

解答（15.12）：式（15.53）中的电感矩阵是通过对原三相电机采用克拉克 $3\Phi/2\Phi$ 变换，然后对两相 $\alpha\beta$ 等效采用帕克旋转变换得到的。采用的变换的阻抗是不变的。因此，矩阵中的 L_{11} 和 L_{22} 等于 L_S。对于转子模型，一般假设短路的转子匝数与定子有相等的匝数，两个磁通沿着路线的磁阻近似相等；这样，$L_S=L_R$。互感参数等于 $L_m=k(L_SL_R)^{0.5}=kL_S$。

连续使用克拉克和帕克变换得到的变换叫布隆代尔变换。

15.25 *dq* 坐标系下的电压平衡方程

电气子系统的数学模型包括电压平衡方程，即表示实际相绕组中供电电压、电压降和磁动势平衡的微分方程。这些方程可以从 $\alpha\beta$ 坐标系转换到 dq 坐标系，与旋转磁场同步。在静止 $\alpha\beta$ 坐标系中，相绕组中的电压平衡方程是

$$u_{\alpha S}=R_S i_{\alpha S}+\mathrm{d}\Psi_{\alpha S}/\mathrm{d}t,\ u_{\beta S}=R_S i_{\beta S}+\mathrm{d}\Psi_{\beta S}/\mathrm{d}t \tag{15.54}$$

将上述两个方程乘以 j 之后相加，得到一个包括用复数表示的电压、磁链和电流的电压平衡方程

$$\begin{aligned}\underline{u}_{\alpha\beta S}&=(u_{\alpha S}+ju_{\beta S})+\mathrm{d}(\Psi_{\alpha S}+\Psi_{\beta S})/\mathrm{d}t\\&=R_S\ \underline{i}_{\alpha\beta S}+\mathrm{d}\ \underline{\Psi}_{\alpha\beta S}/\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.55}$$

采用帕克变换，可以由 $\alpha\beta$ 电压得到虚拟 d 相和 q 相的电压

$$\underline{u}_{dq}=u_d+\mathrm{j}u_q=\underline{u}_{\alpha\beta S}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_e}=(R_S\ \underline{i}_{\alpha\beta S}+\mathrm{d}\ \underline{\Psi}_{\alpha\beta S}/\mathrm{d}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_e} \tag{15.56}$$

通过采用帕克变换的反变换，静止坐标系的变量 $\underline{i}_{\alpha\beta S}$ 和 $\underline{\Psi}_{\alpha\beta S}$ 可以用 dq 变量表示，$\underline{i}_{\alpha\beta S}=\underline{i}_{dq}\exp(-\mathrm{j}\theta_e)$，得到

$$\begin{aligned}\underline{u}_{dq}&=(R_S\ \underline{i}_{dq}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta_e}+\mathrm{d}(\underline{\Psi}_{dq}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta_e})/\mathrm{d}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_e}\\&=R_S\ \underline{i}_{dq}+\mathrm{d}\ \underline{\Psi}_{dq}/\mathrm{d}t+j\omega_e\ \underline{\Psi}_{dq}\end{aligned} \tag{15.57}$$

因此，dq 坐标系中的虚拟定子相绕组的电压平衡方程没有形式 $u=Ri+\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。它们包括一个新的部分，帕克变换的结果。上面的包括复数的等式可以分为实部和虚部，得到两个标量方程。同样的方法可用于转子绕组的电压平衡方程，但是角度 θ_e 要替换成 θ_{slip}。这是因为原转子坐标系（$\alpha_R-\beta_R$）与目标 dq 坐标系之间的角度是 $\theta_{slip}=\theta_e-\theta_m$。对于虚拟转子绕组（$DQ$），得到下面的电压平衡方程

$$\begin{aligned}\underline{u}_{DQ}&=(R_R\ \underline{i}_{DQ}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta_{slip}}+\mathrm{d}(\underline{\Psi}_{DQ}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta_{slip}})/\mathrm{d}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_{slip}}\\&=R_R\ \underline{i}_{DQ}+\mathrm{d}\ \underline{\Psi}_{DQ}/\mathrm{d}t+\mathrm{j}\omega_{slip}\underline{\Psi}_{DQ}\end{aligned} \tag{15.58}$$

15.26 电气子系统

这部分总结了用同步 dq 坐标系的表示感应电机的电气子系统模型，这里稳态是的

状态变量是常数，虚拟绕组的电感矩阵的元素也是常数。在个模型的基础是对感应电机建模时采用 4 个近似条件。它们在前面的章节中详细介绍过，包括：

1）忽略分布系数的影响；

2）寄生电容包含的电能忽略；

3）忽略铁耗；

4）铁磁材料的非线性特性 $B(H)$ 中的磁饱和忽略。

此外，在用两相等效代替原来的三相时用到的克拉克变换的前面的系数是 $K=2/3$。为了方便，后面的讨论中假设讨论的感应电机是 2 极的，$p=1$，电角频率与机械角速度相等，因为 $\omega=p\Omega$。

下面的方程给出了同步旋转 dq 坐标系中感应电机电气子系统的数学模型。两个含复数的电压平衡方程分解为 4 个含标量的电压平衡方程：

$$u_{\mathrm{d}}=R_{\mathrm{S}}i_{\mathrm{d}}+\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}-\omega_{\mathrm{e}}\Psi_{\mathrm{q}} \tag{15.59}$$

$$u_{\mathrm{q}}=R_{\mathrm{S}}i_{\mathrm{q}}+\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t}+\omega_{\mathrm{e}}\Psi_{\mathrm{d}} \tag{15.60}$$

$$0=R_{\mathrm{R}}i_{\mathrm{D}}+\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}t}-\omega_{\mathrm{slip}}\Psi_{\mathrm{Q}} \tag{15.61}$$

$$0=R_{\mathrm{R}}i_{\mathrm{Q}}+\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{Q}}}{\mathrm{d}t}+\omega_{\mathrm{slip}}\Psi_{\mathrm{D}} \tag{15.62}$$

虚拟绕组关于磁链和电流的电感矩阵：

$$\begin{bmatrix}\Psi_{\mathrm{d}}\\ \Psi_{\mathrm{q}}\\ \Psi_{\mathrm{D}}\\ \Psi_{\mathrm{Q}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{\mathrm{S}} & 0 & L_{\mathrm{m}} & 0\\ 0 & L_{\mathrm{S}} & 0 & L_{\mathrm{m}}\\ L_{\mathrm{m}} & 0 & L_{\mathrm{R}} & 0\\ 0 & L_{\mathrm{m}} & 0 & L_{\mathrm{R}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{\mathrm{d}}\\ i_{\mathrm{q}}\\ i_{\mathrm{D}}\\ i_{\mathrm{Q}}\end{bmatrix} \tag{15.63}$$

问题（15.13）：从转矩表达式 $T_{\mathrm{em}}=(3/2)(\Psi_{\alpha\mathrm{S}}i_{\beta\mathrm{S}}-\Psi_{\beta\mathrm{S}}i_{\alpha\mathrm{S}})$ 出发，在 dq 坐标系中将转矩 T_{em}表示为磁通和电流的函数。

解答（15.13）：在向量表达式中用复数替换，即 $\Psi_{\alpha\beta\mathrm{S}}=\Psi_{\alpha\mathrm{S}}+\mathrm{j}\Psi_{\beta\mathrm{S}}$和$\underline{i}_{\alpha\beta\mathrm{S}}=i_{\alpha\mathrm{S}}+\mathrm{j}i_{\beta\mathrm{S}}$，转矩可以写成 $T_{\mathrm{em}}=(3/2)I_{\mathrm{m}}(\Psi^{*}_{\alpha\beta\mathrm{S}}\underline{i}_{\alpha\beta\mathrm{S}})$，这里 I_{m} 表示函数式复数的虚部部分，$\Psi^{*}_{\alpha\beta\mathrm{S}}$是复数的共轭值，虚部的符号相反。在帕克变换表达式的基础上，$\underline{\Psi}_{\mathrm{dq}}=\Psi_{\mathrm{d}}+\mathrm{j}\Psi_{\mathrm{q}}=\exp(-\mathrm{j}\theta_{\mathrm{e}})\Psi_{\alpha\beta\mathrm{S}}$和$\underline{i}_{\mathrm{dq}}=i_{\mathrm{d}}+\mathrm{j}i_{\mathrm{q}}=\exp(-\mathrm{j}\theta_{\mathrm{e}})\underline{i}_{\alpha\beta\mathrm{S}}$，可以得到

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{em}}&=\frac{3}{2}I_{\mathrm{m}}[(\underline{\Psi}_{\mathrm{dq}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{e}}})^{*}(\underline{i}_{\mathrm{dq}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{e}}})]\\ &=\frac{3}{2}I_{\mathrm{m}}[\underline{\Psi}_{\mathrm{dq}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_{\mathrm{e}}}\underline{i}_{\mathrm{dq}}e^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{e}}}]\\ &=\frac{3}{2}I_{\mathrm{m}}[\underline{\Psi}^{*}{}_{\mathrm{dq}}\underline{i}_{\mathrm{dq}}]=\frac{3}{2}I_{\mathrm{m}}[\Psi_{\mathrm{d}}i_{\mathrm{q}}-\Psi_{\mathrm{q}}i_{\mathrm{d}}]\end{aligned}$$

第 16 章　感应电机的稳态运行

这一章主要介绍感应电机的稳态运行，其目的是掌握感应电机的等效电路与机械特性。稳态运行源于电机的动态模型，在上一章中已有所阐述与发展。稳态下的电压平衡方程被用于笼形电机的稳态等效电路的构建。同时，等效变压器的概念也会被介绍并用于其中。等效电路的作用是确定稳态的电流、转矩、功率、损耗与磁链。典型的电路阻抗，以及测量和预测的实验步骤将在本章进行阐述和讨论。相关标幺值系统以及其基于实用性所体现出的优势也会在本章有所展现。在学习标幺值系统以及将具体值转换成标幺值的基值时，将会通过特例以提升相关技巧。这些与感应电机机械特性相似的功能以及典型机械负载将会被介绍并进行分析，诸如起动模式、额定模式、空载模式之类的自然机械特性将会进行分析。同样，电机阻抗对起动转矩、制动转矩、制动转差率以及功率因数的影响同样将会在本章有所阐述。本章将围绕绕组、磁路、机械等因为旋转导致的损耗开展讨论。稳态损耗的计算将基于稳态等效电路展开，损耗将在工作于电动机模式下的电机能量平衡图中展现出来。通过将气隙能量区域划分成转子损耗和与转差率有关的机械功率，我们可以推导出简化的功率平衡关系。在这一章的末尾，将给出感应发电机的能量平衡图，并对感应电机的工作模式进行讨论。

16.1　输入功率

感应电机有一个短路笼型转子和一套三相绕组。三相绕组由三相电源u_A、u_B、u_C供电，转子侧没有电源对其进行供电。定子绕组提供的电功率为$p_e = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C$。使用克拉克变换，三相电机可以被两相等效取代。根据克拉克变换系数 $K = 2/3$，电机的输入功率为

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{3}{2}(u_{\alpha S} i_{\alpha S} + u_{\beta S} i_{\beta S}) \\ &= \frac{3}{2}\mathrm{Re}(u_{\alpha S} + \mathrm{j}u_{\beta S})(i_{\alpha S} - \mathrm{j}i_{\beta S}) = \frac{3}{2}\mathrm{Re}[(\underline{u}_{\alpha\beta S})(\underline{i}_{\alpha\beta S})^*] \end{aligned}$$

使用帕克变换，α_S和β_S可被虚拟同步坐标系下的 d 轴和 q 轴取代。由于$i_{dq} = \exp(-\mathrm{j}\theta_e) i_{\alpha\beta S}$，以及$u_{dq} = \exp(-\mathrm{j}\theta_e) u_{\alpha\beta S}$，电机的输入功率因此可以用 dq 轴的电压和电流，表示为

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{3}{2}\mathrm{Re}[(\underline{u}_{\alpha\beta S})(\underline{i}_{\alpha\beta S})^*] = \frac{3}{2}\mathrm{Re}[(\underline{u}_{dq}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_e})(\underline{i}_{dq}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_e})^*] \\ &= \frac{3}{2}\mathrm{Re}[\underline{u}_{dq}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_e}(\underline{i}_{dq})^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_e}] = \frac{3}{2}\mathrm{Re}[\underline{u}_{dq}(\underline{i}_{dq})^*] = \frac{3}{2}(u_d i_d + u_q i_q) \end{aligned}$$

从表示电源输入功率的$p_e=(3/2)(u_d i_d+u_q i_q)$ 表达式开始，计算输入功率，就可以确定电磁转矩。通过使用定子电流平衡这一约束条件，我们可以得到p_e为

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{3}{2}(u_d i_d+u_q i_q) \\ &= \frac{3}{2}R_s(i_d^2+i_q^2)+\frac{3}{2}\left(\frac{d\Psi_d}{dt}i_d+\frac{d\Psi_q}{dt}i_q\right)+\frac{3}{2}\omega_e(\Psi_d i_q-\Psi_q i_d) \\ &= p_{Cu1}+\frac{dW_m}{dt}+p_\delta \end{aligned}$$

成分p_{Cu1}表示定子的铜损。成分 dW_m/dt 表示功率的维度，代表从磁场中收集的能量的变化率，它是磁场能量的一阶导数。电机工作时，气隙磁通发生变化。因此dW_m/dt的瞬时值在磁通增加时为正，减少时为负。dW_m/dt 的平均值必须为零，因为收集的能量既不能无限增加，也不能无限减少。当磁路中的定子铁耗p_{Fe}变得重要的情况下，它与 dW_m/dt 一起占用并从源功率中分离出去。源功率中剩下的被标记为p_δ的，称作*气隙功率*，或*旋转磁场功率*的部分，将会被传送至转子。这对预测气隙功率的特性、确定机械功率和电机通过旋转传送至机械负载的转矩，是很有意义的。

16.2　转矩表达式

dq 参考坐标轴计算的源功率为

$$u_d i_d+u_q i_q=R_s(i_d^2+i_q^2)+\frac{d\Psi_d}{dt}i_d+\frac{d\Psi_q}{dt}i_q+\omega_e(\Psi_d i_q-\Psi_q i_d) \tag{16.1}$$

由于克拉克变换存在系数 $K=2/3$，这样计算的功率要乘以 3/2 以便于源电机上的输入功率对应。等式右侧的第一项是p_{Cu1}，表示定子绕组的铜损；第二项是 dW_m/dt，剩下的一项是通过气隙传送给转子的功率。原动机的气隙功率为

$$p_\delta=\frac{3}{2}\omega_e(\Psi_d i_q-\Psi_q i_d) \tag{16.2}$$

气隙功率也可以表示成包含转子在内的圆柱曲面的坡印廷矢量 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的积分。实际上，气隙功率表征的是穿过气隙指向转子的向量 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的通量。当 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 径直指向转子时，气隙功率为正。气隙功率与生成的电磁转矩相等，旋转磁场的角速度$\Omega_e=\omega_e/p$ 也被称为*同步速度*。这样，用p_δ除以同步速度就是转矩。也就是，$T_{em}=p_\delta/\Omega_e$，结果为

$$T_{em}=\frac{3}{2}p(\Psi_d i_q-\Psi_q i_d) \tag{16.3}$$

通过牛顿运动方程，可以确定其速度变化为

$$J\frac{d\Omega_m}{dt}=T_{em}-\sum T_L \tag{16.4}$$

16.3　转差率

若感应电机的转子以一个不同于磁场旋转角速度Ω_e的速度$\Omega_m\neq\Omega_e$旋转，转差速度

就是$\Omega_{slip}=\Omega_e-\Omega_m$。转子速度在过渡阶段发生变化，并代表一个稳态下的变量。稳态下，转子以一个恒定速度旋转。转差速度Ω_{slip}表征转子电流的角频率，$\omega_{slip}=p\,\Omega_{slip}$。比值$s=\omega_{slip}/\omega_e=\Omega_{slip}/\Omega_e$叫*转差率*。对于一个接于工频 50Hz 的两极电机，其同步速度为 50rev/s 或 3 000r/min（每分钟转速）。如果转子以 2 700r/min 的速度旋转，转差率即为$s=300/3\ 000=0.1$。对堵转（转子不转动）的感应电机，转差率$s=1$。

16.4　机械功率与损耗

电磁转矩T_{em}作用于以速度Ω_m旋转的转子上。对应的机械功率$p_{mR}=T_{em}\Omega_m$也被叫做内功率。机械功率$p_m=T_m\Omega_m$通过转轴转化成外功率时，两者有细微的不同。$p_{mR}=T_{em}\Omega_m$和$p_m=T_m\Omega_m$的不同，在于感应电机内部的损耗。这些损耗包括空气阻力、轴承间的阻力、以及电机其他的机械子系统产生的损耗。这样，电磁转矩T_{em}和通过转轴传送出去的转矩T_m有差别。关于感应电机损耗更为细致的分析将在 16.16 节和 16.24 节给出，图 16.17将一并给出功率平衡图。

机械功率p_{mR}与气隙功率p_δ的不同，在于一系列转子绕组和转子磁路的损耗。电流通过转子导条时，产生的损耗和电流的二次方成正比，$R\,i^2$。虽然转子导条多用铝铸，但在笼形转子中的损耗常被叫做*铜损*，用P_{Cu2}表示。除了转子绕组中的损耗，还有一些存在于转子磁路中的损耗，用P_{FeR}表示。转子磁路与定子磁路一样，都是由钢片制成。它包含按正弦规律以角速度ω_{slip}变化的磁场，和因磁滞和涡流产生的损耗。ω_{slip}比ω_e要慢得多，故而一般忽略转子中的铁耗。但当$\omega_{slip}\ll\omega_e$的假设不成立，意即$s\ll1$的条件不成立时，这个近似将不适用。

一个转子铁耗不能被忽略的例子，就是将一个不转动的感应电机连接到电网上。这是感应电机最常用的一种起动方法。对于不转动的转子，$\Omega_m=0$，$s=1$。转子导条上的电流频率和电网频率、以及转子磁路的磁感应强度B的变化频率相对应。

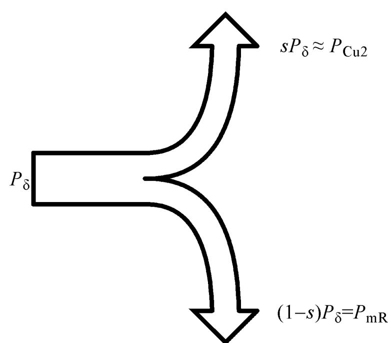


图 16.1　气隙磁场的成分

稳态工作时，转差频率相较于电网频率要低得多。这样，转子磁路中的铁耗也非常低。转子的总损耗主要是将转子的焦耳热加到转子磁路的铁耗上去。稳态情况下，机械功率$P_{mR}=T_{em}\Omega_m=T_{em}\Omega_e(1-s)=(1-s)P_\delta$。这样，剩下的$s\,P_\delta$部分就是转子的损耗：

$$P_{Cu2}+P_{FeR}=s\,P_\delta \tag{16.5}$$

问题（16.1）：一个两极电机由电网供电，工作于稳定状态。已知转子磁路的铁耗不能被忽略，定子铜耗为P_{Cu1}，电动机从电网吸收的功率为S，电流落后电压的相角为φ，试确定气隙转矩和输出电磁转矩。

解答（16.1）：在稳态下，磁场能量随时间的变化率 $\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}/\mathrm{d}t$ 的平均值等于零，气隙功率等于$P_{\delta}=S\cos(\varphi)-P_{\mathrm{Fe}}-P_{\mathrm{Cu1}}$，电磁转矩为$T_{\mathrm{em}}=p\,P_{\delta}/\omega_{\mathrm{e}}=P_{\delta}/\Omega_{\mathrm{e}}$，其中$\omega_{\mathrm{e}}$为电网工频。

问题（16.2）：一个由电网供电的两极电机，以 2 700r/min 的速度旋转，试预测机器的效率。

解答（16.2）：转差速度为 $s=(3\,000-2\,700)/3\,000=0.1$。忽略定子损耗，传送的有用功率可认为接近输入功率的 90%，转子损耗约占输入功率的 10%。

16.5　稳态运行

定子变量帕克变换的目的，是确定感应电机的数学模型，因其各定子变量是恒定值。对感应电机所有的两相表现形式，像电压、电流、磁通一类的变量都是 $\alpha\beta$ 或 dq 坐标系上，对应的向量的投影。经过帕克变换，dq 坐标系随着磁场同步旋转。这样，所有的 dq 坐标系的变量在稳态下都是恒定值，它们的一阶导数均为零。dq 坐标系的模型有助于导出表现电机稳态运行下的等效电路。电压平衡方程用相关向量的复数形式在式（15.57）和式（15.58）中给出。将其一阶时间导数用零替代，电压平衡方程将简化成$\underline{U}=R\,\underline{I}+\mathrm{j}\omega\,\underline{\Psi}$。稳态时，复数形式的$\underline{u}_{\mathrm{dq}}$，$\underline{i}_{\mathrm{dq}}$，$\underline{i}_{\mathrm{DQ}}$，$\underline{\Psi}_{\mathrm{dq}}$和$\underline{\Psi}_{\mathrm{DQ}}$全部变成了复常数，这样，它们可以被表示成$\underline{U}_{\mathrm{S}}$，$\underline{I}_{\mathrm{S}}$，$\underline{I}_{\mathrm{R}}$，$\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}$和$\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}$。这些常数可以被当做相量，因为它们的量值既表示它们的幅值，也表示它们做正弦变化时的相角。它们与普通相量的不同在于它们是用来表示三相绕组系统中的向量。另外，普通相量的幅值和正弦均方根值有关，但$\underline{U}_{\mathrm{S}}$，$\underline{I}_{\mathrm{S}}$，$\underline{I}_{\mathrm{R}}$，$\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}$和$\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}$的幅值却是与相关正弦变化的最大值挂钩。意即，相量$\underline{I}_{\mathrm{S}}$的绝对值和电流$i_{\alpha\mathrm{s}}(t)$ 和$i_{\beta\mathrm{s}}(t)$ 的最大值相关。此外，如果克拉克变换的系数 K 不为 2/3，上述关系将发生改变。总的说来，定子电压的方均根值和其常数$\underline{U}_{\mathrm{S}}$绝对值$U_{\mathrm{S}}=(U_{\mathrm{d}}^2+U_{\mathrm{q}}^2)^{0.5}$之间的比值，由 $3\Phi/2\Phi$ 变换的系数决定。本书的所有假设和考虑都是基于 $K=2/3$，这样模型U_{S}的结果可以和相电压的峰值相等。

$$\underline{u}_{\mathrm{dq}}=R_{\mathrm{s}}\underline{i}_{\mathrm{dq}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\Psi}_{\mathrm{dq}}+\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{e}}\underline{\Psi}_{\mathrm{dq}}$$

$$0=R_{\mathrm{R}}\underline{i}_{\mathrm{DQ}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\Psi}_{\mathrm{DQ}}+\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{slip}}\underline{\Psi}_{\mathrm{DQ}}$$

$$\underline{u}_{\mathrm{dq}}=\underline{U}_{\mathrm{S}},\ \underline{i}_{\mathrm{dq}}=\underline{I}_{\mathrm{S}},\ \underline{i}_{\mathrm{DQ}}=\underline{I}_{\mathrm{R}},\ \underline{\Psi}_{\mathrm{dq}}=\underline{\Psi}_{\mathrm{S}},\ \underline{\Psi}_{\mathrm{DQ}}=\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}$$

为了有助于感应电机稳态运行的分析，有必要列写出稳态等效电路下的电压平衡方程。但这里有一个“怎么做”的问题。定子方程包含角频率ω_{e}，而转子方程包含角频率ω_{slip}。如果两个方程需要用同一个相量电路来表示稳态下的电压平衡关系，这个电路必须有相同的角速度。意即，相量的概念在电流电压都有相同角速度的关系时，才能适用。定子电流和电压有着ω_{e}的角频率：

$$\underline{U}_{\mathrm{S}}=R_{\mathrm{s}}\underline{I}_{\mathrm{S}}+\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{e}}\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}$$

这样，相同的角频率也需要被用于描述转子绕组的电压平衡方程中。在稳态运行条

件中，转差率 $s=\omega_{\mathrm{slip}}/\omega_{\mathrm{e}}$ 是恒定的：

$$s=\frac{\omega_{\mathrm{slip}}}{\omega_{\mathrm{e}}}=\frac{\Omega_{\mathrm{slip}}}{\Omega_{\mathrm{e}}}$$

当转差率为零时，笼型转子的短路线圈中没有电动势感应，转子中的电流也为零，这种状态叫*空载状态*，此时转子以同步速和磁场一同旋转。其他的情况下，转差率 s 不等于零。当 $s\neq 0$ 时，转子方程可被转差率 s 分解，转子电压的平衡方程可表示为

$$0=\frac{R_{\mathrm{s}}}{s}\underline{I}_{\mathrm{R}}+\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{e}}\underline{\Psi}_{\mathrm{R}} \tag{16.6}$$

这样定子电压平衡方程式依然是

$$\underline{U}_{\mathrm{S}}=R_{\mathrm{s}}\underline{I}_{\mathrm{S}}+\mathrm{j}\,\omega_{\mathrm{e}}\underline{\Psi}_{\mathrm{S}} \tag{16.7}$$

磁通也可以像绕组的电流方程一样表示：$\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}=L_{\mathrm{R}}\underline{I}_{\mathrm{R}}+L_{\mathrm{m}}\underline{I}_{\mathrm{S}}$，$\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}=L_{\mathrm{S}}\underline{I}_{\mathrm{s}}+L_{\mathrm{m}}\underline{I}_{\mathrm{R}}$。注意在这样的两相等效笼型转子中，无论是 $\alpha_{\mathrm{R}}-\beta_{\mathrm{R}}$ 还是 $D-Q$，都可能有任意多的线圈匝数 N_{R}，现有的分析假设 $N_{\mathrm{R}}=N_{\mathrm{S}}$。这与变压器很像。定转子的电流之和 $\underline{i}_{\mathrm{m}}=\underline{i}_{\mathrm{s}}+\underline{i}_{\mathrm{R}}$ 也可以被当成励磁电流来分析。现在我们就可以写出 $\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}=L_{\gamma\mathrm{R}}\underline{I}_{\mathrm{R}}+L_{\mathrm{m}}\underline{I}_{\mathrm{m}}$，和 $\underline{\Psi}_{\mathrm{s}}=L_{\gamma\mathrm{s}}\underline{I}_{\mathrm{s}}+L_{\mathrm{m}}\underline{I}_{\mathrm{m}}$ 了，其中，$L_{\gamma\mathrm{R}}=L_{\mathrm{R}}-L_{\mathrm{m}}$ 和 $L_{\gamma\mathrm{s}}=L_{\mathrm{s}}-L_{\mathrm{m}}$ 分别是相应绕组的漏感，$\underline{\Psi}_{\mathrm{s}}=L_{\mathrm{m}}\underline{I}_{\mathrm{m}}=\underline{\Psi}_{\mathrm{md}}+\mathrm{j}\,\underline{\Psi}_{\mathrm{mq}}$ 是励磁磁通。磁通穿过气隙，环绕并同时包含定转子绕组。励磁磁通也被叫做气隙磁通。式（16.6）和式（16.7）提供了感应电机电压、电流、磁通之间的相互关系。为了确定稳态等效电路，我们有必要把磁链像绕组电流方程和自感参数方程一样表示出来：

$$\begin{aligned}\underline{\Psi}_{\mathrm{s}}&=L_{\gamma\mathrm{s}}\underline{I}_{\mathrm{s}}+L_{\mathrm{m}}\underline{I}_{\mathrm{m}}\\ \underline{\Psi}_{\mathrm{R}}&=L_{\gamma\mathrm{R}}\underline{I}_{\mathrm{R}}+L_{\mathrm{m}}\underline{I}_{\mathrm{m}}\end{aligned} \tag{16.8}$$

定转子的稳态电压平衡方程可以用图 16.2 的等效电路图表示出来。电压 $\underline{U}_{\mathrm{S}}$ 从电路的左手侧输入，$\underline{U}_{\mathrm{S}}=\underline{U}_{\mathrm{dq}}=U_{\mathrm{d}}+\mathrm{j}U_{\mathrm{q}}$，其中 U_{d} 和 U_{q} 分别是 U_{a}、U_{b} 和 U_{c} 经过 $3\Phi/2\Phi$ 变换后得到的。相量 $\underline{I}_{\mathrm{s}}=I_{\mathrm{d}}+\mathrm{j}\,I_{\mathrm{q}}$ 和 $\underline{I}_{\mathrm{R}}=I_{\mathrm{D}}+\mathrm{j}\,I_{\mathrm{Q}}$ 确定了稳态下定转子电流的幅值和相角。电阻 R_{s} 和电感 $L_{\gamma\mathrm{s}}$ 代表定子绕组的电阻和漏感，电阻 R_{R} 和电感 $L_{\gamma\mathrm{R}}$ 代表着变换后的等效两相转子绕组的电阻和漏感。参数 R_{R} 和 $L_{\gamma\mathrm{R}}$ 都被*换算至定子侧*。这意味着，等效两相转子绕组的线圈电阻 R_{R} 和电感 $L_{\gamma\mathrm{R}}$ 每相都有着和定子侧绕组相同的匝数。意即，短路的笼型转子被

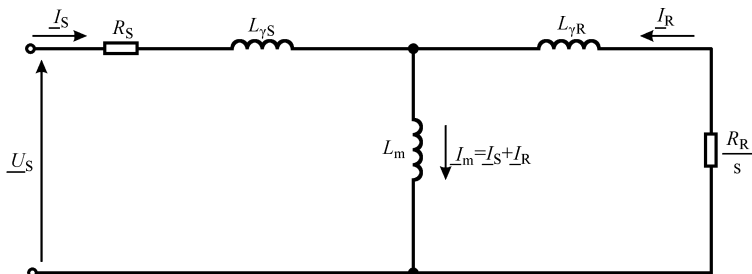


图 16.2　稳态等效电路

一对和定子绕组有着相同匝数的短路绕组α_R和β_R替代。

将转子参数换算至定子侧，有些类似于功率变压器的二次电路阻抗按比例折算至一次电路。二次电路的阻抗为Z_2，变压器的电压比 $m = N_1/N_2$，则二次电路折算的等效阻抗变成$m^2 Z_2$。对感应电机而言，变压器的二次绕组是一个短路的笼型转子，定子绕组对应的就是一次绕组。这个相绕组有$N_R = 1$ 匝线圈。假设短路绕组的电阻$R_2 = 1\text{m}\Omega$，定子绕组有$N_S = 40$ 匝线圈，则转子电阻换算至定子侧就变成$R_R = 1\text{m}\Omega \cdot (N_S/N_R)^2 = 1.6\Omega$。这个“短路笼型转子被一个$N_R = N_S$的两相绕组代替”的假设将被用于之后所有的讨论中。这样，所有的转子变量都被毫无保留地换算至定子侧。

16.6　与变压器的类比

感应电机的稳态等效电路可以用一个变压器来做类比，定子绕组代表变压器的一次绕组，转子绕组代表二次绕组。由于感应电机有三相绕组，因此类比可以用一个二次短路的三相变压器进行。

感应电机的工作不同于变压器的地方，在于定、转子电流的角频率不同，原因是转子的运动。这对研究一个两极电机连接至三相对称的ω_e角频率的电网的情况是有帮助的。电机内磁场旋转的速度为$\Omega_e = \omega_e$，对于堵转的转子（$\Omega_m = 0$），磁场相对于定子和转子，都是以Ω_e的相对速度旋转。这样，在笼型转子中感应的电动势的角频率等于电网角频率ω_e。转子电动势和电流的角频率也叫做转差频率，它可以用式子$\omega_{slip} = s\,\omega_e$计算出来，其中 $s = (\Omega_e - \Omega_m)/\Omega_e$叫做转差率，在堵转状态它的值为 1。这样，在堵转状态下，感应电机就完完全全变成了一个二次侧短路的三相变压器。当转子以一个$\Omega_m > 0$的速度旋转时，情况就会发生改变。由于转子与磁场的旋转同方向，$\Omega_e - \Omega_m$的差值减小。这样，笼型转子及其感应电动势和电流相对于磁场转速，存在着$\omega_{slip} = s\,\omega_e$的角频率，因为 $s < 1$，所以ω_{slip}要比ω_e要小。由于转子运动的关系，感应电机的运行，就类比成了一个含有围绕一次侧旋转、电流角频率为$\omega_{slip} = s\,\omega_e$的短路的二次绕组的三相变压器。定转子频率上存在的不同，是导出可以表示整台电机的等效电路的障碍。以下更深层次的讨论也是针对这个目标而言。

定转子电流导致气隙合成电动势和磁通Ψ_m发生变化。定转子电流之和$\underline{I}_m = \underline{I}_R + \underline{I}_S$代表励磁电流，这与变压器中一次电流$\underline{I}_1$和二次电流$\underline{I}_2' = (N_2/N_1)\ I_2$的总和$\underline{I}_m = \underline{I}_1 + \underline{I}_2'$构成变压器的励磁电流是一样的。在变压器里，$\underline{I}_2' = (N_2/N_1)\ I_2$表示二次电路的等效电流，或叫做换算至二次侧的电流。在感应电机模型中，笼型转子被一个和定子相有着相同匝数的短路转子绕组取代，这样$N_S = N_R$，才能使励磁电流写成$\underline{I}_m = \underline{I}_R + \underline{I}_S$的形式。将匝数与电流相乘，就可以得到电机合成磁动势，$\underline{F}_m = \underline{F}_R + \underline{F}_S$，这也是定转子绕组的磁动势之和。互磁通也被叫做气隙磁通，它同时包含定子绕组和转子绕组，并穿过气隙。它可以用表达式$\Phi_m = \underline{F}_m/R_\mu$计算，其中$R_\mu$是磁阻，$\Phi_m$是单匝线圈的互磁通。

线圈互磁通Φ_m由独立线圈中累加的互磁链确定。对集中绕组而言，所有的线圈都在同一个位置，故而它们有着相同的磁通Φ_m，绕组磁通即为$\underline{\Psi}_m = N_N \Phi_m$，其中$N_N$表示线圈匝数。对正弦分布绕组，单个的线圈的位置并不完全相同，它们的磁通也不完全相同。此时磁通的计算需要用积分确定。在之前的章节中介绍到，结果是$\underline{\Psi}_m = (\pi/4) N_N \Phi_m$。在感应电机的定子绕组中，磁通以电网电压的角频率做正弦变化。主电网供电的频率为ω_e。定子绕组中，因磁通$\underline{\Psi}_m$感应的电动势为$\underline{E}_S = \underline{U}_m = \mathrm{j}\,\omega_e \underline{\Psi}_m$。电压$\underline{U}_m$也被叫做*励磁*电压，它出现在图 16. 3中横跨L_m的两侧。定子电压平衡方程为$\underline{U}_S = R_S \underline{I}_S + \mathrm{j}\,\omega_e L_{\gamma S} \underline{I}_S + \underline{E}_S$，举例说明于图 16. 3。

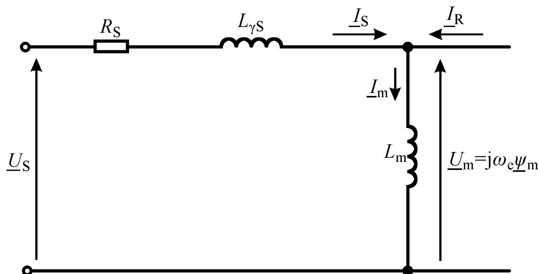


图 16. 3　定子电压平衡图示

由于$N_S = N_R$，同样的互磁通$\underline{\Psi}_m$也会存在于短路转子绕组。转子绕组中的互磁通也会以正弦变化。磁通相对于转子旋转的角频率是转差频率Ω_{slip}。这样，磁通频率就是ω_{slip}，磁通变化导致的转子电动势$\underline{E}_R = s\,\underline{U}_m = \mathrm{j}\,\omega_{slip} \underline{\Psi}_m$。转子电压平衡方程$\underline{U}_R = 0 = R_R \underline{I}_R + j\,\omega_{slip} L_{\gamma R} \underline{I}_R + \underline{E}_R$，如图 16. 4 所示。

在维持电路拓扑结构和电流不变的情况下，所有位于图 16. 4 转子等效电路中的阻抗都要被转差 $s = \omega_{slip}/\omega_e$除。修改了的电压和阻抗也需要除以 s。转子的励磁电阻换成R_R/s。电抗$\omega_{slip}L$ 由于$\omega_{slip}/s = \omega_e$的关系，使用$\omega_e L$ 作为新值，以帮助将定子和转子电路联系起来。这样，电动势$\underline{E}_R = s\,\underline{U}_m$就变得和$\underline{U}_m$一样了。在阻抗都被 s 除了之后，转子等效电路就变成了图 16. 5 的形式。

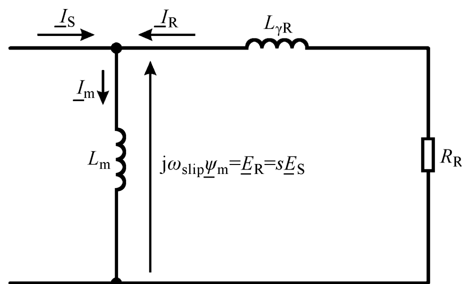


图 16. 4　转子电压平衡图示

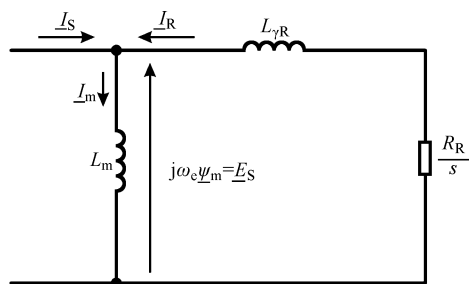


图 16. 5　阻抗除以 s 之后的转子电压平衡图示

将定子等效电路和乘以 $1/s$ 之后的转子等效电路连接起来，就得到了图 14. 6 的稳态等效电路。它代表着稳态下感应电机的电流、电压和磁链之间的关系。

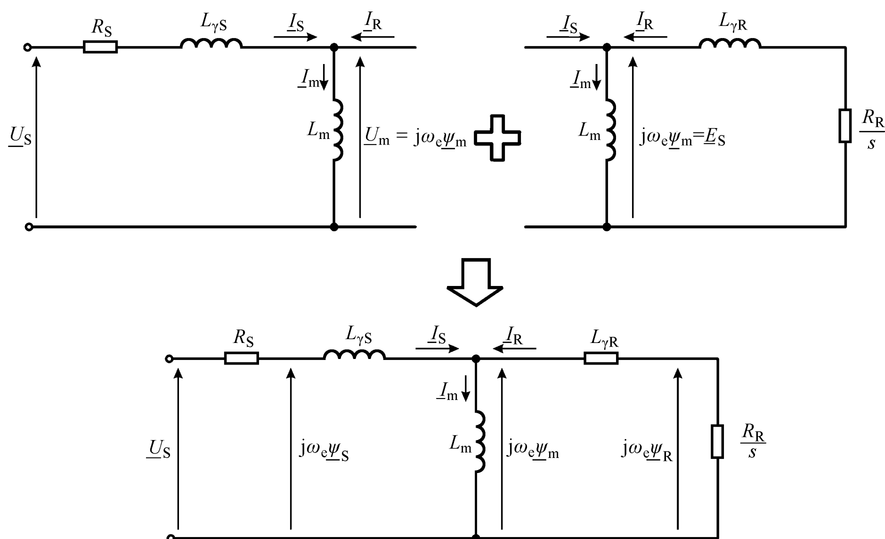


图 16.6　稳态等效电路

16.7　转矩和电流的计算

等效电路的转子之路包含一个和速度有关的电阻R_R/s，转差率 $s=(\Omega_e-\Omega_m)/\Omega_e=\omega_{slip}/\omega_e$依赖于转子速度，它的改变直接影响电阻$R_R/s$。这样，等效电路的电流和功率都与转子速度有关。等效电路可以用于找到转速和气隙功率之间的关系。气隙功率又可以被用于计算和确定稳态下的电磁转矩$T_{em}=P_\delta/\Omega_e$和机械特性$T_{em}(\Omega_m)$。为了完成这个任务，我们有必要分析等效电路，并计算出稳态下气隙功率的值。式（16.2）展示了在 dq 坐标系统下气隙功率与磁链和电流的关系，式（16.2）中的变量可以和图 14.6 等效电路中的联系起来，因为$\underline{U}_S-R_S\underline{I}_S=j\,\omega_e\underline{\Psi}_S=j\,\omega_e(\Psi_d+j\,\Psi_q)$。

数学模型和等效模型都忽略了铁耗。在稳态下，源功率等于（3/2）$\mathrm{Re}(\underline{U}_S\underline{I}_S^*)=(3/2)(U_dI_d+U_qI_q)=P_{Cu1}+P_\delta=(3/2)R_SI_S^2+P_\delta$，其中相量$|\underline{I}_S|$的幅值相当于相电流$i_a(t)$的最大值。通过对等效电路的仔细检查，可以标注出来的是，源功率P_e有一部分功率消耗在定子损耗中，剩下的那部分功率$P_e-(3/2)R_SI_S^2$消耗在了等效电路的电阻R_S/s两侧。这样，气隙功率P_δ可以从等效电路中通过式$P_\delta=3/2(R_S/s)I_S^2$确定，其中$I_R^2=I_D^2+I_Q^2$。电磁转矩计算得：

$$T_{em}=\frac{3}{2}\frac{1}{\Omega_e}\frac{R_S}{s}I_R^2=\frac{3}{2}\frac{p}{\omega_e}\frac{R_S}{s}I_R^2 \tag{16.9}$$

在前述分析中，变量I_R^2是等于$I_D^2+I_Q^2$的，其中I_D和I_Q是 dq 参考坐标系统转子电流的

分量，假设克拉克变换的首系数为2/3，在励磁电流的幅值远小于定子电流幅值的情况下，意即$|\underline{I}_{m}| << |\underline{I}_{S}|$，可做出$I_{R}^{2}\approx I_{S}^{2}$的推断假设。转子电流和励磁电流可以表示成用定子电流表示的形式：

$$\underline{I}_{R1} = -\underline{I}_{R} = \frac{j\omega_{e}L_{m}}{j\omega_{e}L_{m}+j\omega_{e}L_{\gamma R}+R_{S}/s}\underline{I}_{s}$$

$$\underline{I}_{m} = \frac{j\omega_{e}L_{\gamma R}+R_{S}/s}{j\omega_{e}L_{m}+j\omega_{e}L_{\gamma R}+R_{S}/s}\underline{I}_{S}$$

在电机的转差s非常小时，电机阻抗的电阻部分要比其电抗部分要大得多，即$R_{S}/s >> \omega_{e}L_{\gamma R}$。这种情况下，励磁电流和转子电流可以近似为

$$\underline{I}_{m}\approx\frac{R_{R}/s}{j\omega_{e}L_{m}+R_{S}/s}\underline{I}_{S},\ \underline{I}_{R1}\approx\frac{j\omega_{e}L_{m}}{j\omega_{e}L_{m}+R_{R}/s}\underline{I}_{S}$$

基于这样的假设，转子电流$\underline{I}_{R}$比励磁电流$\underline{I}_{m}$超前π/2个角度。也因为这个角度的存在，电流$\underline{I}_{m}$对定子电流幅值的影响显著降低。由于$I_{S}^{2}=I_{m}^{2}+I_{R}^{2}$和$I_{m}^{2} << I_{R}^{2}$，定转子电流的幅值近似相等，意即$I_{R}^{2}\approx I_{S}^{2}$。这样，电磁转矩的近似表达式就为$T_{em}=3R_{R}I_{S}^{2}/(2s\Omega_{e})$，气隙功率的近似值为$P_{\delta}=3/2(R_{S}/s)I_{S}^{2}$。

问题（16.3）：克拉克$3\Phi/2\Phi$变换的首系数等于$K=2/3$。试讨论定子电流$\underline{I}_{S}$和相电流$i_{\alpha S}$（t）、$i_{\beta S}$（t）的关系；以及三相绕组系统中，气隙功率和功率表达式$u_{a}i_{a}+u_{b}i_{b}+u_{c}i_{c}$之间的关系。

解答（16.3）：$K=2/3$的克拉克变换的一个性质，就是使得变量在原有abc系统和两相$\alpha_{s}-\beta_{s}$参考坐标系统中有相同的峰值。这样，如果定子电流i_{a}、i_{b}和i_{c}的方均根值I_{rms}已知，则两相等效中相电流$i_{aS}(t)$和$i_{\beta S}(t)$的峰值就是$I_{rms}2^{0.5}$。相电流$i_{\alpha S}(t)$和$i_{\beta S}(t)$互差$\pi/2$个角度，这样$i_{\alpha S}^{2}+i_{\beta S}^{2}=2I_{rms}^{2}$。帕克坐标变换的电流向量$i_{\alpha S}(t)$和$i_{\beta S}(t)$的幅值不发生变化，所以$I_{S}^{2}=I_{d}^{2}+I_{q}^{2}=2I_{rms}^{2}$。气隙功率$P_{\delta}=3/2(R_{R}/s)I_{S}^{2}$可以写成$P_{\delta}=3(R_{R}/s)I_{rms}^{2}$，相当于三相星接对称电阻性负载$R_{S}/s$的功率，其电流的均方根值等于电动机相电流的均方根值。

16.8 稳态转矩

感应电机稳态下的电磁转矩和源电压、转子速度Ω_{m}、机器参数都有关。它可以通过以下步骤确定：

1）确定转差率$s=(\Omega_{e}-\Omega_{m})/\Omega_{e}$；

2）引入等效电路中的源电压$\underline{U}_{S}$和阻抗R_{R}/s，计算稳态转子电流$\underline{I}_{R}$；

3）确定气隙功率$P_{\delta}=3/2(R_{R}/s)I_{R}^{2}$；

4）将其除以同步速度，确定功率$T_{em}=P_{\delta}/\Omega_{e}$。

由于我们假设$I_{R}^{2}\approx I_{S}^{2}$，意即，励磁电流非常小$|\underline{I}_{m}| << |\underline{I}_{S}|$，定转子电流等于

$$\underline{I}_{S}\approx\frac{\underline{U}_{S}}{(R_{S}+R_{R}/s)+j\omega_{e}(L_{\gamma R}+L_{\gamma S})}\approx\underline{I}_{R}$$

$$\underline{I}_S^2 \approx \frac{U_S^2}{(R_S + R_R/s)^2 + \omega_e^2 (L_{\gamma R} + L_{\gamma S})^2} \approx \underline{I}_R^2 \tag{16.10}$$

电磁转矩的值等于气隙功率和磁场旋转速度Ω_e（又称同步速度）的商。考虑到目前为止我们只讨论两极感应电机，abc 三相在空间互差 $2\pi/3$，相电流i_a、i_b和i_c拥有相同的幅值，它们的相角互差 $2\pi/3$，两极感应电机有一个以$\Omega_e = \omega_e$的速度旋转，磁极互差 π 的磁场。每组线圈所产生的磁场都有一个 S 极和一个 N 极，所以也叫做*两极*线圈。它们是构成多对极线圈的方法。随着两个或多个部分沿着机器的圆周构成相绕组，创造一个多对极磁场是可行的。总的来说，定子绕组可以有 $2p$ 个磁极，参数 p 是极对数。感应电机到目前为止只分析了 $p=1$ 的情况，所以才有$\Omega_e = \omega_e$的结果。

多对极的感应电机转速比两极电机要慢，$p>1$ 的感应电机的同步速等于$\Omega_e = \omega_e/p$。更详细的分析稍后会进行。除非其他说明的情况，我们假设分析的电机对象始终是转速$\Omega_e = \omega_e$的两极电机（$p=1$），因为Ω_e代表了电流和电压的频率，ω_e代表了磁场的角速度。虽然有极对数，但电磁转矩依然是气隙功率和磁场旋转速度（同样也称同步速度）的商：

$$T_{em} = \frac{1}{\Omega_e} P_\delta = \frac{1}{\Omega_e}\frac{3}{2}\omega_e (\Psi_d I_q - \Psi_q I_d) = \frac{3p}{2}(\Psi_d I_q - \Psi_q I_d) \tag{16.11}$$

转子的机械旋转速度用Ω_m表示，转子速度电等效后是$\omega_m = p\,\Omega_m$。对于两极电机而言，由于 $p=1$，所以$\Omega_m = \omega_m$。将机械速度和电角频率的记号分开的方法同样也适用于转差速度。电等效的转差速度也就是转子电流的角速度，用ω_{slip}标识。转子落后于同步速度的那部分，用Ω_{slip}标识。对于两极电机而言，$p=1$，转差速度和转子电流速度有相同的值，即$\Omega_{slip} = \omega_{slip}$。

基于$|\underline{I}_m| \ll |\underline{I}_S|$的假设，电磁转矩即为

$$T_{em} = \frac{P_\delta}{\Omega_e} = \frac{3}{2\,\Omega_e}\frac{R_R}{s}\frac{U_S^2}{(R_S + R_R/s)^2 + \omega_e^2 (L_{\gamma R} + L_{\gamma S})^2} = \frac{3p\,R_R}{2\,\omega_e s}\frac{U_S^2}{(R_S + R_R/s)^2 + \omega_e^2 (L_{\gamma R} + L_{\gamma S})^2} \tag{16.12}$$

在上述表达式中，U_S是相电压的峰值；p 是极对数；ω_e是定子电压的频率；R_S和$L_{\gamma S}$是定子绕组的参数；R_R和$L_{\gamma R}$是转子绕组换算至定子侧的参数。

为了确定电机的机械特性，我们需要计算出相对转差 $s=(\Omega_e - \Omega_m)/\Omega_e = (\omega_e - \omega_m)/\omega_e$，并在上面的叙述中引入 s，从而计算转矩。

问题（16.4）：试从稳态等效电路中直接确定电磁转矩表达式，并且假设$|\underline{I}_m| \ll |\underline{I}_S|$不成立，但成分$R_S R_R/s$ 相对于$X_{\gamma S} X_{\gamma R}$可以被忽略。

解答（16.4）：电磁转矩实质是气隙功率和同步转速Ω_e的比值。气隙功率P_δ的值等于消耗在电路右侧，电阻R_R/s 上的功率。为了在没有习惯性假设$|\underline{I}_m| \ll |\underline{I}_S|$的情况下计算气隙功率，我们就有必要找到转子电流，然后计算出$P_\delta = 3/2(R_R/s)\underline{I}_R^2$。通过采用这样

的表示法：$\underline{Z}_S=R_S+j\,\omega_e L_{\gamma S}=R_S+j\,X_{\gamma S}$，$\underline{Z}_R=R_R/s+j\,\omega_e L_{\gamma R}=R_R/s+j\,X_{\gamma R}$和$\underline{Z}_m=j\,\omega_e L_m=j\,X_m$，定子电流可以表示成如下形式：

$$\underline{I}_S=\frac{\underline{U}_S}{\underline{Z}_S+\dfrac{\underline{Z}_R\underline{Z}_m}{\underline{Z}_R+\underline{Z}_m}}=\frac{\underline{U}_S(\underline{Z}_R+\underline{Z}_m)}{\underline{Z}_S\underline{Z}_m+\underline{Z}_R\underline{Z}_m+\underline{Z}_R\underline{Z}_S}$$

转子电流可以表示成：

$$\underline{I}_R=\frac{-\underline{U}_S\underline{Z}_m}{\underline{Z}_S\underline{Z}_m+\underline{Z}_R\underline{Z}_m+\underline{Z}_R\underline{Z}_S}$$

$$=\frac{-\underline{U}_S j\,L_m\omega_e}{(R_S+j\,L_{\gamma S}\omega_e)j\,L_m\omega_e+(R_R/s+j\,L_{\gamma R}\omega_e)j\,L_m\omega_e+(R_R/s+j\,L_{\gamma R}\omega_e)(R_S+j\,L_{\gamma S}\omega_e)}$$

采用将转子参考方向定位从右向左的设定，可以用阻抗$j\,\omega_e L_m$将分子和分母分开：

$$\underline{I}_R=\frac{-\underline{U}_S}{(R_S+j\,L_{\gamma S}\omega_e)+\left(\dfrac{R_R}{s}+j\,L_{\gamma R}\omega_e\right)+\left(\dfrac{L_{\gamma S}}{L_m}\dfrac{R_R}{s}+\dfrac{L_{\gamma R}}{L_m}R_S\right)+j\left(\dfrac{L_{\gamma R}L_{\gamma S}\omega_e}{L_m}-\dfrac{R_R R_S}{s\,\omega_e L_m}\right)}$$

由于忽略掉了相对于成分$L_{\gamma R}L_{\gamma S}\omega_e$很小的$R_R R_S/(s\,\omega_e)$部分，所以$R_R R_S/s$相对于$X_{\gamma S}X_{\gamma R}$也是可以忽略的，这样就是：

$$\underline{I}_R=\frac{-\underline{U}_S}{R_S\left(1+\dfrac{L_{\gamma R}}{L_m}\right)+\dfrac{R_R}{s}\left(1+\dfrac{L_{\gamma S}}{L_m}\right)+j\left(L_{\gamma S}\omega_e+L_{\gamma R}\omega_e\left(1+\dfrac{L_{\gamma S}}{L_m}\right)\right)}$$

$$=\frac{-\underline{U}_S}{R_S\dfrac{L_R}{L_m}+\dfrac{R_R}{s}\dfrac{L_S}{L_m}+j\left(L_{\gamma S}\omega_e+L_{\gamma R}\omega_e\dfrac{L_S}{L_m}\right)}$$

系数$\nu^S=L_S/L_m>1$和$\nu^R=L_R/L_m>1$被引入，它们的值接近于一。当出现$L_S=L_R$的情况时，互感等于$L_m=k\,(L_S L_R)^{0.5}=k\,L_S$；这样，$\nu^S=\nu^R=1/k$。线圈的耦合系数$k$近似等于一，这样$\nu^S=\nu^R\approx 1$。考虑到这些，电磁转矩可以用下面的公式确定：

$$T_{em}=\frac{P_{ob}}{\Omega_e}=\frac{3}{2\,\Omega_e}\frac{R_R}{s}I_R^2$$

$$=\frac{3}{2\,\Omega_e}\,\frac{R_R}{s}\,\frac{U_S^2}{(\nu^R R_S+\nu^S R_R/s)^2+\omega_e^2(\nu^S L_{\gamma R}+L_{\gamma S})^2}$$

$$=\frac{3p\,R_R}{2\,\omega_e s}\,\frac{U_S^2}{(\nu^R R_S+\nu^S R_R/s)^2+\omega_e^2(\nu^S L_{\gamma R}+L_{\gamma S})^2}$$

当出现$\nu^S=\nu^R\approx 1$的情况是，表达式可以采用式（16.12）这样的形式：

$$T_{em}=\frac{3p\,R_R}{2\,\omega_e s}\,\frac{U_S^2}{(R_S+R_R/s)^2+\omega_e^2(L_{\gamma R}+L_{\gamma S})^2}$$

这个形式将被用在随后的讨论和考虑中。感应电机中漏电感的增加，和耦合系数k的减少，都可以导致参数ν^S和ν^R增加。

16.9　标幺值

绕组电阻和电抗 $X=L\omega$ 的绝对值都可以用欧姆做单位。参数$R_S=1\Omega$ 既不表示在定子电阻上的压降，也对确定定子铜损帮助不大。因为要确定的话，像额定电压和额定电流一类的信息也需要知道。在这件事上，定子电阻的相对值可以提供更多的信息。相对值或标幺值，是一群无单位的数字，它们通过将绝对值除以对应*基值*得到。这样，基值被写作 100%，或 1 个单位，也有写成 1［pu］的。假设电机阻抗的基值是$Z_B=2\Omega$，定子电阻的阻值是$R_S=1\Omega$，则其相对值就是$r_S=R_S/Z_B=0.5$pu 或 50%。

为了帮助预测定子绕组中电阻的压降，电机阻抗的基值选取通常参照式子$Z_B=Z_n=U_n/I_n$，其中额定电压U_n和额定电流I_n必须知道。如果一个电机的$U_n=220$V，$I_n=2.2$A，电阻$R_S=1\Omega$，那么定子电阻的相对值就是$r_S=0.01$。在额定工作状态，压降R_SI_n是额定电压的 1%，铜损也是额定功率的 1%。不管电机的尺寸和类型如何，r_S上的信息提供了预测压降和铜损相对值的依据。R_S的绝对值不能用于此目的，除非有额外的数据给出。举例来说，一个电阻同样为$R_S=1\Omega$ 但额定电压和电流分别为$U_n=110$V 和$I_n=22$A 的电机就有着很大的压降，大约为额定电压的 20%。

定子绕组的压降和铜损可以通过定子电阻的相对值用这种方法直接被确定。这个相对值被记做r_S或R_S^{rel}。如果阻抗的基值是通过额定电压和电流得出，即$Z_B[\Omega]=Z_n[\Omega]=U_n[V]/I_n[A]$，那么转子阻抗的相对值等于$r_S=R_S^{rel}=R_S[\Omega]/Z_n[\Omega]$。由于$r_S=R_SI_n/U_n=R_SI_n^2/(U_nI_n)=R_SI_n^2/S_n$，故可以总结出，定子电阻的相对值$r_S=0.01$ 标志着额定电流在定子电阻两侧产生 1% 的压降，以及定子的铜损占到的额定功率S_n的比值为 1%。阻抗基值通常是由相电压和相电流的方均根值的比值确定：

$$Z_B[\Omega]=Z_n[\Omega]=\frac{U_{n,rms.}^{phase}[V]}{I_{n,rms.}^{phase}[A]}\Rightarrow\frac{R_SI_n}{U_n}=R_S^{rel}=r_S \tag{16.13}$$

对于一个星形接法、线电压为 380V，相电压为 220V，额定电流为 10A 的感应电机，其阻抗基值为$Z_B=Z_n=22\Omega$。转子电阻R_R［Ω］是完全换算至定子侧的，其相对值用这种方式计算：

$$r_R=R_R^{rel}=\frac{R_R[\Omega]}{Z_B[\Omega]}=\frac{R_R[\Omega]}{Z_n[\Omega]} \tag{16.14}$$

定转子的电压和电流在额定值的基础上都被标准化（变得相互关联），这样，1% 或 100% 的相对值，都是相对于额定电流或电压而言：

$$i_S=I_S^{rel}=\frac{I_S[A]}{I_n[A]}\quad u_S=U_S^{rel}=\frac{U_S[V]}{U_n[V]} \tag{16.15}$$

这样，可以理解的是，电压U_S的方均根值要除以额定电压U_n的方均根值。用定子电压的峰值也可以，但也要对应除以额定电压的峰值。这样，一个方均根值为 110V 的电压可以被一个方均根值为 220V 的额定电压除，算出$U_s=0.5$。如果用峰值相除，得到的结果也会是一样的，115.56/311.12 = 0.5。

电阻和电抗的相对值是用它们的压降和它们的额定电压相除得到，假设通过它们的是额定角频率ω_n的额定电流。这样，值 X［Ω］就是被阻抗的基值相除得到。阻抗的相对值和电抗的相对值相同：

$$l_S = L_S^{rel} = \frac{L_S\omega_n I_n}{U_n} = \frac{L_S[H]\omega_n[rad/s]}{Z_n[\Omega]}, x_S = L_S^{rel} = X_S^{rel} \tag{16.16}$$

公式（16.16）可以写成包含电感基值L_B的形式：

$$l_S = L_S^{rel} = \frac{L_S[H]}{L_B[H]},\ L_B = \frac{Z_n}{\omega_n}$$

磁通的相对值可以用磁通相量的幅值和磁通基值Ψ_B相除得到。磁通相量的幅值就是对应绕组的磁通。基值Ψ_B可以用额定电压的峰值$U_{n(max)}$除以额定角频率ω_n得到。磁通基值是根据定子相绕组中的电压平衡方程$u_a = R_a i_a + \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t$ 推导出来的。忽略定子电阻上的压降，则$u_a = \mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t$。假设磁通有峰值$\Psi_S$，并以$\omega_S$的频率以正弦变化的方式运动，那么相绕组两端的峰值电压就是$U_{S(max)} = \Psi_S\omega_S$。这样基值$\Psi_B$就可以写成$U_{n(max)}/\omega_n$。

在稳态电流和电压都被标准化成它们各自的方均根值时，磁通却表示成它的最大值。不过，鉴于磁通在稳态下都是按正弦规律变化，故定义和使用它的方均根值也是没有问题的。迄今为止这种尝试很少采用。更深层次的讨论多假设定转子磁通Ψ_S和Ψ_R和它们的最大值有关。定子磁通的峰值和定子磁通向量的幅值有关，一般有$\Psi_S^2 = \Psi_{\alpha S}^2 + \Psi_{\beta S}^2$。磁通的标准化通常都是将磁通的绝对值除以它们的基值Ψ_B，它和电机工作于额定电压和额定频率下相绕组通过的磁通的最大值有关。基值Ψ_B的值和磁通的额定值Ψ_n非常接近，也就是说，都是在磁化曲线的膝点。它们之间有一个非常小的区别，由于压降的关系，$\omega_n\Psi_n$会比相电压峰值$U_{n(max)}$略小。这是因为定子电阻$R_S I_S$上的有限的压降，使得定子绕组的感应电动势和绕组电压存在着区别。因此，额定磁通Ψ_n的相对值略小于一。这样，额定状态下感应电机的定子磁通稳态峰值是略小于Ψ_B的，这才导致了$\Psi_n/\Psi_B < 1$ 的结果。

稳态下磁通的峰值可以通过图 16.6 的等效电路算出来。如果电压相量$\underline{U}_S$的绝对值和定子相电压最大值相同，那么从等效电路中算出来的复数$\underline{\Psi}_S$，$\underline{\Psi}_R$和$\underline{\Psi}_m$的绝对值，和定子磁通、转子磁通、互（气隙）磁通的峰值相等。通过解等效电路，求得定转子电流，互磁通$\underline{\Psi}_m$可以用$|\underline{\Psi}_m| = |\underline{L}_m\underline{I}_m| = |L_m\underline{I}_S + L_m\underline{I}_R|$的式子计算出来。类似地，定转子磁通的幅值也可以算出来。它们的相对值可以通过用绝对值除以基值Ψ_B算出来，源于$U_{n(max)}/\omega_n$：

$$\Psi_S^{rel} = \frac{\Psi_S[Wb]}{\Psi_B[Wb]},\ \Psi_R^{rel} = \frac{\Psi_R[Wb]}{\Psi_B[Wb]},\ \Psi_{\gamma S}^{rel} = \frac{\Psi_{\gamma S}[Wb]}{\Psi_B[Wb]},$$

$$\Psi_{\gamma R}^{rel} = \frac{\Psi_{\gamma R}[Wb]}{\Psi_B[Wb]},\ \Psi_m^{rel} = \frac{\Psi_m[Wb]}{\Psi_B[Wb]},\ \Psi_B[Wb] = \frac{U_n^{rms}\sqrt{2}[V]}{\omega_n[rad/s]} \tag{16.17}$$

转子速度的相对值通常由式子$\Omega_n^{rel} = \omega_n^{rel} = \Omega_m/\Omega_{en} = \omega_m/\omega_{en}$得到，$\omega_{en}$是在$\Omega_{en}$运行于同步速时的额定频率。这样选择速度基值，使得转差 s 可以直接用式子 $s = 1 - \Omega_m^{rel}$算出

来。另一方面，额定状态下，标准化的转子速度因为$\Omega_n < \Omega_e$略小于 1，值$\Omega_n/\Omega_S = 1 - s_n$也是略小于 1，其区别就在于相对转差$s_n$。除了选择额定同步速度$\Omega_{en}$为基值，也可以选择比额定同步速度略慢一点的额定速度Ω_n作为基值。在这种情况下，旋转速度的相对值就得用式子$\Omega_m^{rel} = \Omega_m/\Omega_n$来确定。额定同步速度要比 1 略大。这种方式很少被使用，绝大多数情况下都是选择额定同步速度作为基值。

电磁转矩的相对值也是将绝对值（以［Nm］做单位）和选定的基值T_B［Nm］相除得到。对于转矩的基值而言，可以选择额定转矩T_B。这样额定转矩的相对值就是 1（100%）。将额定转矩作为基值有以下缺点：公式$P_n = T_n\Omega_n$给出了电机的额定输出功率，但同时，$P_n = S_n \cdot \cos\varphi_n \cdot \eta_n$，其中$S_n$是额定视在功率，$\cos\varphi_n$是额定状态下的功率因数，$\eta_n$是额定效率。这样，要满足$T_B = T_n$的条件，额定效率和额定功率因数就都必须已知并带入计算。这样，在大多数情况下，转矩的基值一般都通过式子$T_B = S_n$［VA］/Ω_n［rad/s］$> T_n$ 确定，其中$S_n = 3\ U_{(f)n}I_{(f)n}$是感应电机的额定视在功率，$\Omega_n = \omega_{n/p}$是额定转速。

$T_B > T_n$的关系来源于额定视在功率和额定有功功率之间的关系。视在功率S_n要比额定功率要大。被感应电机通过转轴输送的额定功率等于$P_{en}\eta_n$，其中$P_{en} = S_n\cos(\varphi_n)$是电源功率。在额定状态下，$\eta_{nom} = P_n/P_{en} < 1$ 被称作效率系数。额定功率等于产出的额定转矩，作用于转轴上，额定转子速度为$\Omega_n = \Omega_{en}(1 - s_n)$，$s_n$是相对于额定同步速度$\Omega_{en}$的额定转差率。将$P_n = T_n\Omega_{en}(1 - s_n)$ 和$P_{en} = S_n\cos(\varphi_n)\eta_n$联系起来，$T_B = S_n/\Omega_{en}$和$T_n$的关系就可以导出来：

$$\frac{T_n}{T_B} = \frac{T_n}{\left(\dfrac{S_n}{\Omega_{en}}\right)} = \frac{\cos(\varphi_n)\eta_n}{1 - s_n} < 1 \tag{16.18}$$

问题（16.5）：试证明关系式 $\cos(\varphi_n)\eta_n/(1 - s_n) < 1$ 对所有三相感应电机都适用。

解答（16.5）：对于一个工作于额定状态下的感应电机，其气隙功率P_δ是把定子铜损和定子铁损从源功率中排除之后的产物，即$P_\delta = P_{en} - P_{Cu1} - P_{Fe1}$。气隙功率被分成两部分：转子损耗$s_nP_\delta$和把电能变成机械能形式的内功率$P_{mR} = (1 - s_n)P_\delta$。这个功率等于$P_{mR} = T_{em}\Omega_n$。由于摩擦和通风损耗，转矩$T_{em} > T_n$略高于额定转矩。假设定子铜损是$P_{Cu1}$，铁损$P_{Fe1}$，由于摩擦和通风引起的损耗忽略不计，输入功率和输出功率之间的关系可以简化成$P_n = P_{en}(1 - s_n)$，其中效率为$\eta_n = (1 - s_n)$。如若将所有忽略不计的消耗考虑在内，则必有$\eta_n < (1 - s_n)$。与此同时，$\cos(\varphi_n) < 1$，这样初始表达式就可以被证明了。因此，被基值$T_B = S_n/\Omega_{en}$标准化的额定转矩T_n的相对值就小于 1。

16.10　动态转矩的相对值

电磁转矩基值$T_B = S_n/\Omega_{en}$的选取使得额定转矩$T_n^{rel} < 1$ 的相对值小于 1。举例来说，额定工作状态的转矩有可能是 0.9% 或 90%。选择用$T_B = S_n/\Omega_{en}$代替$T_B = T_n$的优势在利用电流和电压的相对值确定相对转矩的表达式时更加明显。从暂态电磁转矩的表达式

入手：

$$T_{em}=\frac{3p}{2}(\Psi_d i_q-\Psi_q i_d)$$

通过对转矩用基值$T_B=T_n$进行标准化，并使用额定状态下定子电流和磁通的 dq 轴各值Ψ_{dn}，i_{qn}，Ψ_{qn}和i_{dn}可以得到：

$$T_{em}^{rel}=\frac{T_{em}}{T_{nom}}=\frac{(\Psi_d i_q-\Psi_q i_d)}{(\Psi_{dn} i_{qn}-\Psi_{qn} i_{dn})} \tag{16.19}$$

通过电流和磁通的基值$I_n=I_B$和$\Psi_n=\Psi_B$，将表达式的分子和分母分开，可以得到含有磁通和电流相对值的转矩T_{em}^{rel}的相对值表达式。表达式（16.20）的分母包含额定状态下，定子电流和定子磁通的相对值：

$$\begin{aligned}T_{em}^{rel}&=\frac{T_{em}}{T_n}=\frac{(\Psi_d^{rel} i_q^{rel}-\Psi_q^{rel} i_d^{rel})}{(\Psi_{dn}^{rel} i_{qn}^{rel}-\Psi_{qn}^{rel} i_{dn}^{rel})}\\&=K_{RM}(\Psi_d^{rel} i_q^{rel}-\Psi_q^{rel} i_d^{rel})\end{aligned} \tag{16.20}$$

其中

$$K_{RM}=\frac{1}{(\Psi_{dn}^{rel} i_{qn}^{rel}-\Psi_{qn}^{rel} i_{dn}^{rel})}$$

常数K_{RM}在前述的表述中是不等于 1 的。其值$K_{RM}>1$ 取决于额定转差、额定功率因数和额定效率。每台机器都有其独有的K_{RM}系数值。它的倒数 $1/K_{RM}$等于定子磁通相对值和定子电流相对值的相量积。额定状态下，定子电流的额定值为$I_n=I_B$，这样，其相对值等于 1。这样，相对值i_{dn}^{rel}和i_{qn}^{rel}就得满足等式$i_{dn}^{rel}\cdot i_{dn}^{rel}+i_{qn}^{rel}\cdot i_{qn}^{rel}=1$。由于是额定电压供电，定子磁通相对值$\Psi_S^2$由于压降$R_S I_S$的缘故略小于 1，这样，$dq$ 两轴的磁通的相对值就要满足关系$\Psi_{dn}^{rel}\cdot\Psi_{dn}^{rel}+\Psi_{qn}^{rel}\cdot\Psi_{qn}^{rel}=1$，即由于它们的角度的正弦关系，定子的磁通和电流的相量积，以及它们的幅值都要接近于 1。这样，如果$K_{RM}=1$，则这个角度必须是 π/2，这在额定稳态下是不可行的。定子磁通相量和定子电流相量的夹角可以由等效电路推算出。两个相量的稳态角取决于稳态电路中，对应相量的相角差。定子磁通相量接近励磁磁通相量，即励磁电流相量。忽略转子漏电感，转子电流超前励磁电流 π/2 个角度。定子电流是两者之和，$\underline{I}_S=\underline{I}_m+\underline{I}_{R1}$。这样，它超前磁通的角度不可能是 π/2，因为$I_m\neq 0$。

问题（16.6）：试估算额定状态下，感应电机的定子磁通和定子电流之间的夹角。使用等效电路找到磁通相量和电流相量的相角差。为达到目的，认为定子电压和励磁支路的电压的差别可以被忽略。

解答（16.6）：从稳态电路出发，角度可以通过忽略定子阻抗（$R_S+\mathrm{j}\,\omega_e L_{\gamma S}$）$\underline{I}_S$确定。励磁支路上的压降$\underline{U}_m=\mathrm{j}\,\omega_e L_m\approx\underline{U}_S=\mathrm{j}\,\omega_e\underline{\Psi}_S$，亦因此可以近似等于供电电压。这样，励磁磁通就近似等于定子磁通$\underline{\Psi}_m\approx\underline{\Psi}_S$，定子电流可以近似等于励磁电流$\underline{I}_m$和转子电流$\underline{I}_{R1}=-\underline{I}_R$的和。初始相角和磁场$\underline{\Psi}_m\approx\underline{\Psi}_S$的空间定向由励磁电流$\underline{I}_m$的初始相角决定。转子电流$\underline{I}_{R1}$等于电压$\underline{U}_m=\mathrm{j}\,\omega_e L_m$除以转子电阻（$R_R/s+\mathrm{j}\,\omega_e L_{\gamma R}$）。转差 $s=s_n$远小于 1，因

而$R_R/s >> j\omega_e L_{\gamma R}$。因此，转子阻抗主要呈现电阻性，相对于电压$\underline{U}_m$而言，电流$\underline{I}_{R1}$落后的相角是非常小的，故 $\tan(\theta)\approx\theta$。这个相角差距近似等于$s_n\omega_e L_{\gamma R}/R_R$弧度。可以总结出的是，转子电流$\underline{I}_{R1}$领先$\underline{I}_m$的相角稍微比 π/2 小一点。定子电流$\underline{I}_S=\underline{I}_{R1}+\underline{I}_m$也将领先$\underline{I}_m$，同样的，也领先定子磁通$\underline{\Psi}_m\approx\underline{\Psi}_S$。这个相角领先的幅度接近 π/2。当励磁电流较小时，这个值会更接近，但绝不会达到 π/2。

更进一步的研究显示，感应电机处于额定工作状态下，定子磁通和电流的夹角不可能达到 π/2 的角度。这样，式（16.20）中的系数K_{RM}将比 1 要大。这个系数可以用含有φ_n，η_n和s_n的形式表示出来。系数K_{RM}要求转矩按照式子$T_{em}^{rel}=K_{RM}\left(\Psi_d^{rel}i_q^{rel}-\Psi_q^{rel}i_d^{rel}\right)$进行标准化，这里磁链和电流都是用的相对值表示。$K_{RM}$的计算有一个问题，因为$\varphi_n$，$\eta_n$和$s_n$是机器的特性，它们会随着机器的改变而不同。因为这个原因，更常用的转矩标准化通常不采用$T_B=T_n$的基值表达式。而用$T_B=S_n/\Omega_{en}$作为代替。

作为选择的结果，$T_B=S_n/\Omega_{en}$，用这个公式去计算和相对磁链、相对电流对应的相对转矩就变得很简单。这个公式是从（16.21）发展而来，其中U_n和I_n代表额定电压和电流的方均根值。转矩表达式使用的是 dq 轴的变量Ψ_d，i_q，Ψ_q和i_d。这样就有必要介绍 dq 坐标系下的磁通和电流成分的相对值。考虑到克拉克变化含有系数 2/3，相电流的峰值相当于 dq 轴定子电流的峰值，即$(I_d^2+I_q^2)^{0.5}$。同时，单相磁链的最大值相当于 dq 轴磁链的幅值。这样，i_d和i_q的相对值就可以通过用电流绝对值除以额定电流的峰值得到，$I_n\sqrt{2}$。同时，磁链的标准化可以用其绝对值除以$U_n\cdot\mathrm{sqrt}(2)/\omega_{en}$，其中$\omega_{en}$是额定频率：

$$T_{em}^{rel}=\frac{T_{em}}{T_B}=\frac{\frac{3}{2}p(\Psi_d i_q-\Psi_q i_d)}{\frac{S_n}{\Omega_{en}}}=\frac{\frac{3}{2}p(\Psi_d i_q-\Psi_q i_d)}{\frac{p}{\omega_{en}}3\,U_n I_n}$$

$$=\frac{(\Psi_d i_q-\Psi_q i_d)}{\left(\frac{U_n\sqrt{2}}{\Omega_{en}}\right)(I_n\sqrt{2})}=(\Psi_d^{rel}i_q^{rel}-\Psi_q^{rel}i_d^{rel}) \tag{16.21}$$

式子（16.21）没有使用任何类似于K_{RM}，3/2 或 p 一类的系数。相对转矩可以直接通过 dq 坐标系下，标准化的定子电流和标准化的定子磁通的向量积得到。任何时候只要牵涉到用［Nm］表示的绝对转矩，则相对转矩都要乘以$T_B=S_n/\Omega_{en}$，这样可以使有关$T_B=S_n/\Omega_{en}$的分析更加简单。唯一不足的情况，就是额定转矩的相对值小于 1，$T_n^{rel}<1$，即，低于 100%。

交流电机的转矩基值选取遇到的问题和直流电机选取T_B遇到的问题不一样。直流电机输入电枢绕组的功率等于电枢电流和电枢电压的乘积，这个结果不需要乘上一个功率因数 $\cos\varphi$，但交流电机就要遇到这种情况。直流电机中 $\cos\varphi$ 的缺失使其功率和转矩的计算包括的更少。

16.11 稳态电路的参数

稳态电路的分析需要相关参数R_S，R_R，$L_{\gamma S}$，$L_{\gamma R}$和L_m的知识。这有助于我们建立一

个对其范围的大致认识，从而研究测量相关参数，和利用从电机铭牌上读取的数据进行计算的方法。星形接法的定子电阻的测量，可以通过在三相定子中的两个定子端口通入直流电源实现。通过测量端口之间的电压，可以得出两相绕组中的压降，$2R_SI_{DC}=U_{DC}/I_{DC}$。定子电阻R_S的相对值通常在小型电机中较大，它会随着电机功率的增加而减小。对于一个几百瓦特的感应电机，R_S的相对值接近10%。然而对于一个接近300kW的感应电机，定子电阻的相对值可以低至0.1%。

问题（16.7）：是什么原因导致了大电机中的定子电阻的相对值更小？

解答（16.7）：在电机的磁路和电路中，都存在着损耗，也叫做铜耗和铁耗。单位铁耗就是单位体积的铁耗或单位质量的铁耗。它取决于磁感应强度B_m和磁路变化的频率。考虑两个具有相同磁密（磁感应强度B）和相同频率的电机，它们的单位铁耗是相同的。这样，P_{Fe1}和P_{Fe2}的比值就等于它们各自磁路的体积之比V_{1f}/V_{2f}，或者是质量之比m_{1f}/m_{2f}。

铜导体中的单位损耗就是单位体积的铜耗或单位质量的铜耗。它取决于电流密度［A/mm^2］和金属（铜）的电导率σ。考虑两个同电流密度、绕组材质也相同的电机，它们的单位铜耗是相同的。P_{Cu1}和P_{Cu2}的比值取决于制造绕组的材质质量，即，比值P_{Cu1}/P_{Cu2}取决于制造绕组的材料的质量之比m_{1Cu}/m_{2Cu}或体积之比V_{1Cu}/V_{2Cu}。

如果两台电机中，一台电机的尺寸是另外一台电机的两倍，那么它的体积就应该是另一台电机的8倍（$V\propto l^3$）。同时，我们可以做出这样一个假设：两架电机是相似的，大电机的磁路和绕组可以通过从小电机各自的部分出发，翻倍小电机的线性尺寸获得。假设两台电机拥有相同的电流密度，相同的磁感应强度B_m，和相同的工作频率f，那么大电机的损耗就是小电机的8倍。

电路和磁路损失的能量会产生热量，使电机的关键部分的温度增加。维护那些使电机保持完整和功能的部件，比如绕组的电绝缘材料、铁磁材料、轴承等，需要维持电机的温度在一个安全的范围。过高的温度会对电机的重要部件造成永久性损坏。这样，有必要对电机进行降温从而移除多余的热量，保持电机的温度在安全范围内。稳态下，电机的温度是一个恒定值，能量转换产生的热量和通过散热排出的热量相等。不同的散热方法，比如对流、传导、辐射，它们散出的热量与电机和环境的温度差有关。热传导也与电机和周围空气的接触面，或冷却液体的接触面有关。由于表面积是与$S\propto l^2$有关，这样，直径扩大一倍，轴长扩大一倍的大电机散发的热量是小电机的4倍。

可以总结出，电机的尺寸扩大l倍，发热量变成原来的l^3倍，散热能力是原来的l^2倍。在这个情况下，线性尺寸扩大l倍的电机的温度也将提升l倍。这个结论依赖于“单位功率损耗保持不变”的假设。以上推论显示，大型电机需要更有效的冷却方法和减少特殊损耗的方法。基于此，大型电机的绕组通常都设计有较小的磁感应强度，和较小的电流密度。这样，制造绕组的导体就有较大的横截面积，这样绕组的电阻就小了。因此，转子电阻的相对值相对于大电机而言，就小一些了。有必要指出的是，一个1MW的电机，$R_S^{rel}=0.001$，确切含义为定子绕组中的铜损为1kW，也就是说，每秒钟

有 1，000J 的能量转变成热能。以 1，000J 每秒散发的热量有可能需要强制冷却。任何其他的R_S的增加将额外的增加铜耗，并导致绕组温度的上升，甚至有可能影响电绝缘。

小型电机损耗功率和散热面积的比值要良好得多。这样，降温问题就提起的比较少，而且也没有必要使用更多的铜去增加导体的横截面。对于微型电机，R_S的相对值接近 10% 都是可以容忍的。这意味着有 10% 的额定功率转变成铜损，而这又会牵扯到效率问题。考虑到许多小电机都是断续工作对理解很有帮助，比如干手器的电动机，在绝大部分的时间都是断电状态。在这种情况下，被用于产生电动机绕组需要的电解铜的能量比铜损的能量，在电机的使用期限里，要更重要。

励磁阻抗L_m决定励磁电流$\underline{I}_m = \underline{I}_S + \underline{I}_R$，通过它可以求出磁链$\underline{\Psi}_m = L_m \underline{I}_m$。对大部分感应电机而言，励磁电流$\underline{I}_m$远比额定电流要小。通过对电力变压器的分析，考虑定子相当于一次绕组，转子相当于二次绕组，励磁电流相当于变压器的空载电流，即当二次绕组无任何电流时，一次绕组的电流。当感应电机没有连接机械负载，转子无任何外接电阻时，负载转矩T_L等于零。内在的机械损耗，如轴承摩擦、空气阻力，在大多数情况下可以忽略不计。这样，转子以一个非常接近同步速的速度旋转，其转差率 $s \approx 0$。阻抗R_R/s 的值非常大，这样转子电流可以被忽略，转子电路可以被认为是开路。此时感应电机的等效电路可以简化成定子电阻R_S、定子漏感$L_{\gamma S}$和励磁电感L_m的串联。

感应电机的实验要连接至有额定电压和额定频率，可以向定子绕组额定供电的电网上。由于转轴没有连接任何其他机械负载或工作中的电机，转子以额定速度旋转，这样的实验也叫做*空载试验*。稳态状况下，定子电流等于$\underline{I}_0 = \underline{U}_{Sn}/(R_S + j\,\omega_{en} L_S)$。忽略定子电阻和漏电感，可以得到$L_S \approx L_m \approx \underline{U}_{Sn}/(\underline{I}_0 \omega_{en})$。

对小电机而言，感应电机的空载电流是额定电流的 50%~70%，大功率电机的空载电流大约降低至额定电流的 20%。

问题（16.8）：是什么原因导致了大电机中的空载电流的相对值较小？

解答（16.8）：大功率电机在设计时，就针对磁路设计了较小的磁感应强度B_m，其冷却系统也更复杂。这样，电机在设计时，铁磁部分就含有较小的磁感应强度，铜导体里的电流密度也就更小。铁磁材料磁化特性（$B-H$ 曲线）的斜率 $\Delta B/\Delta H$ 在该区域中会更大，这块区域也接近 $B-H$ 平面的原有曲线。所以磁导率也就更高，这样磁路的磁阻$R_{\mu Fe}$就降低了。另外，气隙 δ 和机器直径 D，由于它们比值 δ/D 的关系，磁阻中的气隙部分也会小一些。更小的磁阻导致了更高的电感，反过来又因为 $L = N^2/R_\mu$的关系导致了更高的磁阻。定子绕组的自感L_S是和比值N^2/R_μ有关的，但励磁电感却因为$L_m = k\,L_S$的关系而略小，其中耦合系数 k 是略小于 1 的。可以总结出来的是，低磁阻高 δ/D 比值的大功率电机，可以推导出更高的励磁电感L_m相对值，以及更小的空载电流相对值。

定转子的漏电感是对应漏磁通和绕组电流的比例系数。由于$N_S = N_R$和$L_S = L_R$，$L_{\gamma S} = (1-k)L_S$，$L_{\gamma R} = (1-k)L_S$和$L_m = k\,L_S$。转子匝数N_R和代替笼型转子的虚拟等效转子绕组

的匝数有关。这样，大多数情况下，定转子的漏电感可以认为是相等的[㊀]，即$L_{\gamma S} \approx L_{\gamma R}$。当笼型转子被含有和定子相同匝数的等效转子绕组替代时，$N_S = N_R$，所有的转子参数因为变比$m = N_S/N_R = 1$的关系，可以免于换算直接转移至定子侧。定转子的电感都和匝数的二次方成正比，和磁阻成反比。磁路中定转子的互磁通和漏磁通在长度和横截面上大致相等。它们共享同一个气隙，由同样的铁片制成。由此可以做出$L_S \approx L_R$和$L_{\gamma S} \approx L_{\gamma R}$的假设。这个假设对大多数的感应电机都是成立的。当定转子槽的尺寸和形状的差距很大时才会是该公式的例外情况。

漏电感的近似值可以通过短路试验来确定。在实验中，感应电子的转子是堵转的，它不能转动，速度等于零。实验中，转子的运动通过机械方法被阻止了。在堵转状态下，$s = 1$。阻抗R_R/s变成一个很小的值R_R。忽略励磁电流，电动机的等效阻抗就变成$\underline{U}_S/\underline{I}_S = R_S + R_R + \mathrm{j}\,\omega_e L_{\gamma S} + \mathrm{j}\,\omega_e L_{\gamma R}$。假设电机的额定功率接近10kW，电阻$R_S$和$R_R$的相对值很小，可以被忽略。漏电感因而求得$L_{\gamma S} \approx L_{\gamma R} = 0.5\,U_S/(I_S\omega_e)$，其中$U_S$和$I_S$分别是短路试验中定子电压和电流的均方根值。对小电机而言，绕组电阻不能被忽略。在短路实验中，有必要确定电压和电流的相角差，从而确定短路阻抗的实部和虚部$\underline{Z}_K = R_S + R_R + \mathrm{j}\,\omega_e L_{\gamma S} + \mathrm{j}\,\omega_e L_{\gamma R}$。

短路电抗$\omega_{en}(L_{\gamma R} + L_{\gamma S})$在额定状况下一般在0.05 ~ 0.3之间浮动。更小的相对值可以在小功率低压（400V）电机中见到，高一些的相对值对应的是功率（6kV）左右，中压等级（1MW）的电机。在大功率高压电机中，定转子绕组的导体之间的距离会更大，这也是为了更有效的散热。同时，导体间的绝缘层也能因此而承受更高的电压。所以，定转子之间的耦合系数k会变小，同时由于$L_{\gamma S} \approx L_{\gamma R} \approx (1-k)L_S$的关系，漏电感会增加：

$$L_{\gamma S} = L_S - L_m,\quad L_{\gamma R} = L_R - L_m \tag{16.22}$$

这个感应电机的短路电抗近似等于定转子的漏电抗之和$\omega_{en}(L_{\gamma R} + L_{\gamma S}) = X_{\gamma R} + X_{\gamma S}$。它们两者的区别在于一个有限值$L_m\omega_{en}$。

短路阻抗的实际值可以通过考虑等效变压器的方法确定。感应电机的定转子绕组通过磁场耦合，其情形类似于变压器的一、二次绕组。一个短路感应电动机，其R_S，$R_R \ll \omega_{en}(L_{\gamma R} + L_{\gamma S})$可以等效成一个忽略绕组电阻、二次绕组短路的变压器。短路的感应电机的输入（等效）电感$L_{\gamma e} = X_{\gamma e}/\omega_{en}$，也称作*等效漏电感*，可以通过图16.17计算出来：

$$\begin{aligned} L_{\gamma e} &= L_{\gamma S} + \frac{L_m L_{\gamma R}}{L_m + L_{\gamma R}} = \frac{L_{\gamma S}L_R + L_m L_{\gamma R}}{L_R} \\ &= \frac{L_{\gamma S}L_R + L_m L_R - L_m L_R + L_m L_{\gamma R}}{L_R} = \frac{L_S L_R - L_m^2}{L_R} \end{aligned} \tag{16.23}$$

㊀ 确定互磁通（即：气隙磁通）的方法不唯一。计算磁感应强度面积分、寻找气隙磁通的平面穿过气隙，但它可以被放置在离定子或者是转子更近的地方。这样，同样的机器可以被不同类型的值（$L_{\gamma S}$，$L_{\gamma R}$，L_m）来建模。有必要指出的是，所有的这些设定都可以针对电机的行为进行一个正确的数学建模。

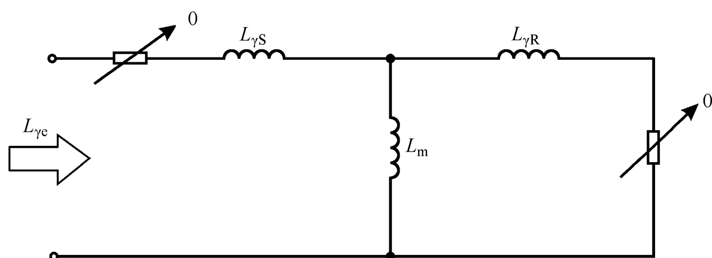


图 16.7　等效漏电感

获得的表达式与短路变压器已知一次绕组自感L_u、二次绕组自感（L_1）和互感（L_2）下的输入电感表达式很像。这个表达式写作$L_u=(L_1L_2-M^2)/L_2$。当$L_{\gamma R}<<L_m$时，它可以表示成（$L_{\gamma R}+L_{\gamma S}$）$\approx L_{\gamma e}$。

电抗$L_{\gamma e}\omega_{en}$的相对值非常小，大致在 0.05～0.3 的范围之间。电流的相对值近似等于电流和短路电抗的相对值之比。这样，通过将额定电压加到短路的感应电机上，可以看出工作电流比额定电流要大得多。由于高损耗的缘故，针对堵转电机进行的操作必须非常短，这是为了避免不良温升和绝缘层的损坏。基于此，短路试验一般在较低的定子电压下进行，以便可以在不损坏电机的情况下得到一个可以接受的定子电流。当短路试验中的定子电流等于额定电流（$I_S=1[\mathrm{pu}]$）时，此时的绕组两端的电压就是$U_S=X_{\gamma e}<<1$。当短路试验加载额定电压时，定子电压的相对值为$I_S\approx 1/X_{\gamma e}$，它远大于额定电流。甚至在短路试验中，通入额定电压测得的电抗和通入额定电流测得的电抗都会不一样。磁饱和引起的磁阻和电抗的改变是导致的原因。在超大的定子电流的作用下，漏磁通也非常的高。定子齿的磁感应强度 B 可能会达到饱和程度。这些齿都是漏磁通磁路的一部分。这样，定子齿的磁饱和降低了漏电抗和漏电感。类似的情况在转子电路中也会有体现。在短路试验中，定子电流近似等于转子电流$\underline{I}_{R1}$，这样，当定子电流很大时，转子漏磁通上的铁磁材料达到饱和，使磁阻增加，漏电抗减少。用逐渐升高的电流做出来的短路实验可以证明感应电机是一个非线性系统。自描述电机行为以来，数学模型和等效电路的完善显示，剩余的变量相当接近额定状态。类似大电流、高转速、大转差、高磁通幅值之类的情况，稳态等效电路中的参数不能被认为是恒定的。更进一步地，即使是稳态等效电路，也不能完全涵盖电机行为的所有方式。感应电机的非线性现象被故意排除在了这本书之外。

转子绕组的电阻换算至定子侧，用R_R注明。参数R_R的相对值常与R_S的相对值接近。在小功率电机中，R_R的相对值约为 10%，当感应电机的功率接近 1MW 时，这个值可以低到$R_R\approx 0.1\%$。实际上，转子导条的电阻确切值几乎测不出来。到现在为止，等效电路中的参数R_R也只能从等效电路中确定。伴随已知的$\underline{U}_S$和$\underline{I}_S$，已知所有其他的等效电路除R_R/s外的参数，从计算中确定出R_R/s用［Ω］表示的值是可能的。若转子速度也已知，转子电阻的准确值和转差都可以被计算出来，接下来的讨论将致力于找到一个快速

预测转子电阻的方法。

转子电阻R_R可以通过堵转试验测得的阻抗求出。阻抗$\underline{Z}_K = R_S + R_R + j\omega_e L_{\gamma S} + j\omega_e L_{\gamma R}$。获取堵转试验的实部，减去定子阻抗，就可以确定构成短路阻抗的参数R_R。这个值可能会和额定转差下的转子电流对应的转子电阻不太一样。在堵转试验中，转子电流的频率是工频，和定子电流一样。在额定状态下，转子电流的频率在$f_{slip} \sim 0.5$Hz 到$f_{slip} \sim 5$Hz 之间浮动。由于转子导体较大的横截面积，集肤效应即使是在工频下也要被列入考虑。转子导条的集肤效应将转子电流推向气隙一侧，并减少转子导条的电流深度。电流这种不均匀的分布增加了较高频率下的转子等效电阻。这样，$f_{slip} = 50$Hz 下，通过堵转测试测得的转子电阻，就比额定转差频率下的转子电阻要高得多。

另一个预测参数R_R的方法是确定转子电路的时间常数，$\tau_R = L_R/R_R$。转子时间常数τ_R可以通过定子绕组两端的电压变化确定，但电压需要在将电机与电源断开之后进行测量。这种情况下，定子两端的电压反应了感应电动势的变化，并与转子磁通成正比。规定条件下，磁通与时间常数τ_R一同衰减，这可以为R_R的预测提供基础。在开始测量之前，感应电机须处于空载状态（$T_L = 0$），并连接于可以提供额定电压和频率的电网上。假设电机加速至同步速度，则稳态得以建立，这样转矩、功率、转差都接近于零，同时励磁电流产生额定磁通。在这个工作点，在定子绕组的两端加上一个安全而独立的电压探针㊀，将电压导入数字存储示波器。一断开电机和电网的连接，定子电流马上就会降到零。考虑等效电路，定子绕组依旧开路，但剩下的转子电流通过励磁支路循环。这样，剩下的转子电流提供励磁电流和磁通。短路笼型转子阻碍所有的磁通变化，并试图维持断电瞬间的磁通。故转子反电动势和电流会被感应出来阻碍磁通变化。这对研究断网瞬间转子电流的变化很有意义。考虑断开前的等效电路，转子电流几乎为零，定子电流约定于励磁电流$\underline{I}_m$。在励磁电流转换至转子电流时，断开电网和定子绕组的连接，使定子电流降到零㊁。转子电流因为笼型绕组试图维持磁通不变的缘故而产生。这样，虽然电机和电网断开了，但磁链还是可以因为笼型转子的存在而得以维持。这样，剩余的磁通还是以转子的接近同步的速度旋转，最初，磁链的幅值没有变化的迹象，定子绕组中感应出电动势$\Psi_m \omega_e$。其幅值接近额定电压，频率接近供电频率，它可以通过开放的定子端口测量出来。我们假设，在缺失机械负载的前提下，转子速度在整个实验中保持不变。随着时间的推移，电动势的幅值逐渐衰减。由于定子电路断开，转子电流，意即励磁电流存在于由L_R，$L_{\gamma R}$，L_m构成的绕组中。这样，电流指数衰减的时间常数由电路电感和电流的比值决定，$\tau_R = L_R/R_R$。结果，包络电动势按照指数（$-t/\tau_R$）的规律下

㊀ 将定子绕组连接至电网的瞬间可能会在电压探针之间和开放截面之间出现过电压。因此有必要使用能承受接近额定电压的探针。对一个 0.4kV 的电机，一个 10kV 的探针已经足够。探针需要穿过电机表面和示波器之间的电流绝缘介质，但为确保安全，需要可靠接地。

㊁ 从开关闭合到电弧的熄灭，电流逐渐断开。大约有几毫秒的时间。电弧的出现是不可避免的，而且当漏电感较大时，它需要被重视起来。事实上，电弧燃烧掉了漏磁通的能量，$W_{\gamma e} \sim L_{\gamma e} i_S^2$。开关闭合的时间和电机动态时间相比非常短，在现有的讨论中被忽略。

降，这样，通过确定包络线电压，转子的时间常数可以通过幅值降低 e 倍需要的时间来确定，意即，降低至初值的 37% 所需要的时间。

通过电机铭牌计算R_R的近似值，也是有可能的。参数R_R可以通过等效电路，利用额定电压和电流计算出来。但在稳态状况下，需要针对等效电路做出一系列的假设。通过忽略定子电路和励磁电感，等效电路可以被简化成等效电抗$L_{\gamma e}\omega_{en}$和转子电阻R_R/s 的串联。在额定工作状态下，加载在等效电路中电阻 R_R/s 两侧的电压等于 $(U_n^2-(I_nL_{\gamma e}\omega_{en})^2)^{1/2}$。如果使用相对值，则$U_n=1$，且$I_n=1$。电抗$L_{\gamma e}\omega_{en}$的相对值在 0.05 ~ 0.25 之间浮动。相电压在电抗上的压降和相量I_nR_R/s 是正交的；因此压降$I_nL_{\gamma e}\omega_{en}$对电阻$R_R/s$ 上的电压没有实质性的影响。在$L_{\gamma e}\omega_{en}=0.25$ 和$U_n=1$ 的情况下，转子电压$I_n R_R/s$ 的相对值为 97%。这样，可以合理地假设额定状态下的转子电压的相对值接近于 1。随着定转子绕组中都是额定电流，阻抗R_R/s_n和$U_n/I_n=Z_B$相等。基于以上的近似，可以得到$R_R\approx s_nZ_B$。换句话说，转子电阻的相对值$r_R\approx R_R/Z_B$接近额定值下的相对转差s_n。这样，从感应电机的铭牌上读出数据$I_n=22\text{A}$，$U_{fn}=220\text{V}$（$U_{ln}=380\text{V}$），$f_n=50\text{Hz}$，$n_n=2\,700\text{r/min}$，可以估算参数R_R为$s_nZ_B=1\Omega$。

16.12　机械特性分析

感应电机的电磁转矩等于从定子转移至转子的气隙功率P_δ，和磁场旋转的同步速度$\Omega_e=\omega_e/p$ 的比值。通过对稳态等效电路的分析，转矩可以通过以下表达式计算出来：

$$T_{em}=\frac{P_\delta}{\Omega_e}=\frac{3}{2\,\Omega_e}\frac{R_R}{s}I_R^2$$

通过求解图 16.8 的等效电路，可以确定定子电流和转子电流。定子电流等于：

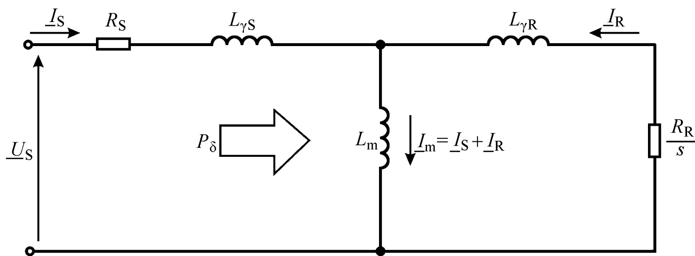


图 16.8　感应电机的等效电路

$$\underline{I}_{R1}-\underline{I}_R=\frac{-\underline{Z}_m\underline{U}_S}{\underline{Z}_S\underline{Z}_m+\underline{Z}_R\underline{Z}_m+\underline{Z}_R\underline{Z}_S} \tag{16.24}$$

其中

$$\underline{Z}_m=\text{j}\,\omega_eL_m=\text{j}\,X_m,\ \underline{Z}_S=R_S+\text{j}\,\omega_eL_{\gamma S},\ \underline{Z}_R=R_R/s+\text{j}\,\omega_eL_{\gamma S}$$

稳态下，转矩等于：

$$T_{em}=\frac{P_\delta}{\Omega_e}=\frac{3}{2\,\Omega_e}\frac{R_R}{s}I_R^2$$
$$=\frac{3p\,R_R}{2\,\omega_e s}\frac{U_S^2}{(\nu^R R_S+\nu^S R_R/s)^2+\omega_e^2(\nu^S L_{\gamma R}+L_{\gamma S})^2} \tag{16.25}$$

其中$\nu^S=L_S/L_m$，$\nu^R=L_R/L_m$。定子电压和转子电流分别用U_S和I_R表示，其绝对值相当于相量的峰值。当相量$\underline{U}_S$和$\underline{I}_R$的绝对值等于其对应的均方根值时，同样的表达式也可以被使用，只是这个时候上式的系数需要翻倍，即3/2要变成3。系数ν^S和ν^R是近似等于一的，它们取决于电机的漏电感。位于转矩表达式的分母位置的励磁电感L_m是漏电感$L_{\gamma S}$的几十倍。基于以上近似，转子电流和定子电流就等于：

$$\underline{I}_S\approx\underline{I}_{R1}\approx\frac{\underline{U}_S}{\left(R_S+\dfrac{R_R}{s}\right)+\mathrm{j}\,\omega_e(L_{\gamma S}+L_{\gamma R})} \tag{16.26}$$

转矩等于：

$$T_{em}=\frac{3p\,R_R}{2\,\omega_e s}\frac{U_S^2}{(R_S+R_R/s)^2+(\omega_e L_{\gamma R})^2}$$
$$=3\frac{1}{\Omega_e}\frac{R_R}{s}\frac{U_{S(eff)}^2}{(R_S+R_R/s)^2+(\omega_e L_{\gamma R})^2} \tag{16.27}$$

得到的表达式可以用来得到感应电机的机械特性$T_{em}(\Omega_m)$，它可以代表稳态下的转子速度和转矩之间的关系。为了确定$T_{em}(\Omega_m)$，需要：

1）确定转差$s=(\Omega_e-\Omega_m)/\Omega_e$。

2）确定相电压$U_{S(rms)}$的均方根值；

3）引入下列值作为选择：峰值$U_{S(rms)}\sqrt{2}$、同步速度$\Omega_e=2\pi f_s/p$，电阻R_R/s，以及其他式子里出现的参数。

4）根据公式计算转矩，如果使用电压的方均根值，公式系数为3；如果使用的电压峰值U_S，系数为3/2。

在稍后的公式（16.37）中，可以证明（16.27）中的转矩可以被表示成更多简洁的形式。诸如式（16.28）的形式可以通过更多合理的近似推导出来：

$$T_{em}(S)\approx\frac{K_1}{S+\dfrac{K_2}{s}} \tag{16.28}$$

机械特性如图16.9所示，纵坐标表示转矩，横坐标表示转子的机械速度。对于两极电机（$p=1$）而言，定子电压和电流的角频率ω_e等于旋转磁场的速度Ω_e，也称同步频率。这样，$\Omega_e=\omega_e/p=\omega_e$。同时$\Omega_{slip}=\omega_{slip}$，$\Omega_m=\omega_m$。对多对极感应电机而言，$\Omega_e=\omega_e/p$。除非其他稳态形式，所有更深层次的讨论都假设$p=1$。考虑到这个，机械特性的横坐标表示的是转子速度$\Omega_m$，也同时指代的用$\omega$或$\omega_m$表示的电角频率。

机械特性$T_{em}(\Omega_m)$是一个非线性函数。可以通过将横坐标划分成转差值很小的区

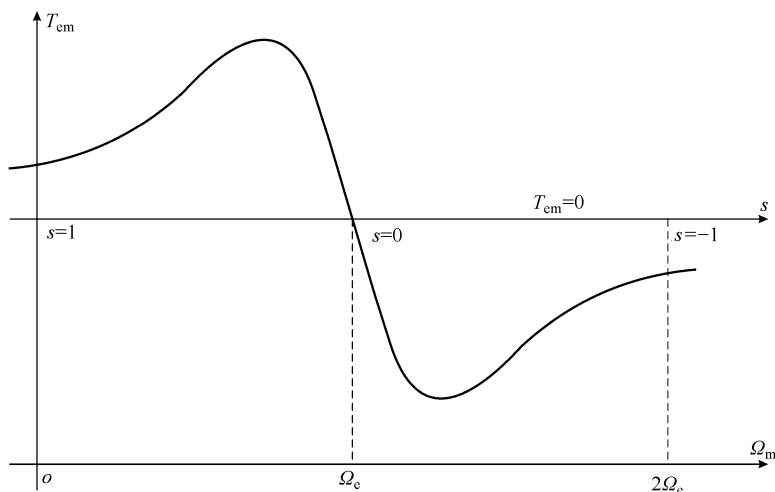


图 16.9　机械特性

域，和转差值很大的区域，通过合理的近似，来分析机械特性。转差率 s 很低的时候，电阻成分R_R/s 在转矩表达式中占主导地位。定子电流和转子电流都很接近值$U_S/(R_R/s)$，转矩可以表示成$T_{em}=(3/2)\ (s/R_R)(p/\omega_e)U_S^2$，其中$U_S$是相电压的峰值。

问题（16.9）：考虑转矩表达式中，相电压U_S的峰值被同一电压的均方根值取代的情况，系数 3/2 是否也要一同被替换？如果电机接入低压网络，它的相电压的均方根值是多少？

解答（16.9）：系数 3/2 需要被替换成 3，相电压的均方根值是 220V。

16.13　小转差率下的电机运行

前述对感应电机运行规则的讨论可以得出，在转差率的相对值很小时，转矩和转差率是成正比的（14.9，问题 14.1）。对于 $p=1$ 的两极电机，旋转磁场的速度Ω_e，也称作同步速度，等于电压的供电角频率ω_e。如果转差率很小，则转子速度接近同步速度，如图 16.10 所示。这种情况下，阻抗R_R/s 就是转矩表达式的分母中各项阻抗里最大的一项。这样，表达式可以简化为

$$T_{em}(s)\approx\frac{3}{2}\frac{1}{\Omega_e}\frac{R_R}{s}\frac{U_S^2}{\left(\frac{R_R}{s}\right)^2}\Rightarrow T_{em}(s)\approx\frac{3p}{2}\frac{s}{R_R}\frac{1}{\omega_e}U_S^2 \tag{16.29}$$

这样，转矩就和转差成正比。分子分母同时乘以角频率，就可以得到表达式：

$$T_{em}(s)\approx\frac{3p}{2}\frac{\omega_{slip}}{R_R}\frac{1}{\omega_e^2}U_S^2$$

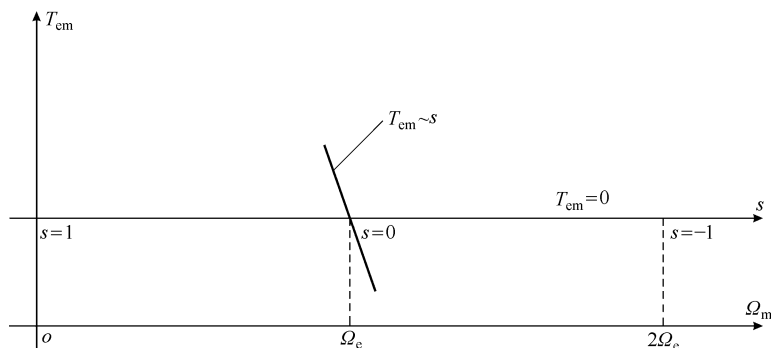


图 16.10　小转差率区域下的机械特性

基于定子电阻上的压降可以忽略这一假设，相电压U_S的峰值和定子频率ω_e之比代表了定子相绕组的磁通的峰值，又称定子磁通的幅值：

$$\Psi_S \approx \frac{U_S}{\omega_e} \Rightarrow T_{em} = \frac{3p}{2}\frac{\Psi_S^2}{R_R}\omega_{slip} \tag{16.30}$$

该式与前面章节介绍感应电机工作规则的方程式（15.3）相对应。这样，由于低转差的缘故，转矩$T_{em}=3p\,\omega_{slip}\Psi_S^2/(2R_R)$和转差成正比，与定子磁通的平方成正比，与转子电阻成反比。它可以总结成：感应电机在低转差频率状态下的机械特性是一块线性区域，其斜率和比值Ψ_S^2/R_R成正比。

16.14　大转差率下的电机运行

机械特性的横坐标显示转子速度$\omega_m=\Omega_m$。同样的坐标轴也可以用来显示相对转差，当$\Omega_m=\Omega_e$时其值为零。在机械特性的初始阶段，$\Omega_m=0$，转差率等于 1。

在大转差率的区域，转矩表达式中的主要部分是等效漏电感$L_{\gamma e}\omega_e$，它和供电频率有关。在额定供电频率情况下，电抗$X_{\gamma e}=L_{\gamma e}\omega_m$的相对值在 10% ~25% 之间。由于$\Omega_m=0$和$s=1$，定子电流近似等于$I_{ST}=U_S/X_{\gamma e}$，被称作起动电流，它可以达到 4 I_n到 10 I_n。当电机加速，速度Ω_m增加，转差率 s 随之降低。定子电流会一直很高，直到转差率 s 减小到一定值，使得阻抗R_R/s取代$X_{\gamma e}$成为主要电阻时才保持不变。这样，定子电流在很长的一段转差的范围内，近似等于$U_S/X_{\gamma e}$，而且它不和转子速度有关。这个转矩和电流的平方，以及电阻R_R/s成正比。因此，在大转差率区域，转矩和相对转差率是成反比的（见图 16.11）。旋转速度降低，相对转差增加，同时转矩按双曲规律降低：

$$\underline{I}_S \approx \frac{\underline{U}_S}{\mathrm{j}\,\omega_e L_{\gamma e}}$$

$$T_{em} \approx \frac{3p}{2}\frac{R_R}{s}\frac{1}{\omega_e}\frac{U_S^2}{L_{\gamma e}^2\omega_e^2} \tag{16.31}$$

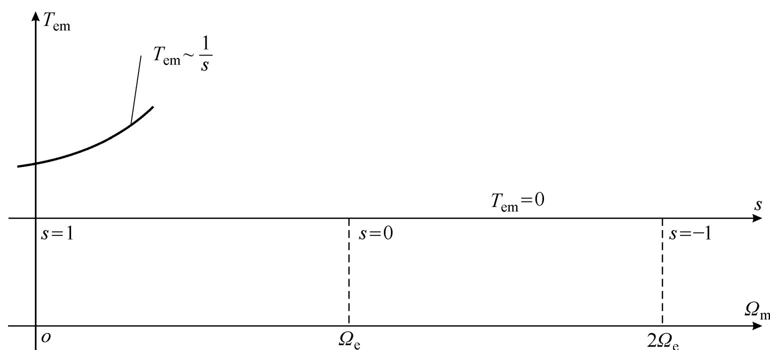


图 16.11　大转差率区域下的机械特性

速度$\Omega_m=0$、转差 $s=1$ 时产生的转矩叫做起动转矩。通过常规的近似，起动转矩的表达式可以写成$T_{em}=(3p/2)(R_R/\omega_e)(U_S/X_{\gamma e})^2$，其中$U_S$表示相电压的峰值，$\omega_e$表示定子电压的角频率。

16.15　并网的感应电机的起动

当静止状态的电机连接至线电压 400V，频率$f_e=50$Hz 的三相电网时，产生的起动电流为$I_{STrms}\approx U_{Srms}/X_{\gamma e}$，远超额定电流；并产生起动转矩$T_{em}=(3p/2)(R_R/\omega_e)(U_S/X_{\gamma e})^2$，驱动转子加速，并提升其速度$\Omega_m$。当该速度接近同步速度$\Omega_e$时，相对转差和定子电流逐步减少。相对转差的减少使$R_R/s$增加，并使定转子电流同时减少。由于缺少负载转矩$T_L$，当转子被加速至同步速度时，加速将会停止。同时定子电流降至空载电流$I_{0rms}=U_{Srms}/X_m$的水平，它沿等效电路的励磁支路运动。

如果起动转矩不足以克服负载转矩和摩擦，则转子不会转动，定子电流$I_{STrms}=U_{Srms}/X_{\gamma e}\approx 5I_n$的情况将会被维持。在这种状况下，其损耗比额定损耗要大很多。定子铜耗是额定状态的 25 倍。这样，电机的温升会非常快。如果这种状态没有得到及时的断开，绝缘和其他重要的部件将因过热而永久损坏。

16.16　极限转矩和极限转差

感应电机的机械特性在转子速度接近同步速度、转差率特别小的区域是线性的。当转子速度接近于零，转差率接近于 1，转矩和转差率成反比。在两个区域之间，机械特性有一个最大值，相当于定子侧提供的最大转矩。这个转矩的最大值被叫做极限转矩。极限转矩T_b可以通过转矩表达式，通过找到函数$f(s)=T_{em}(s)$的极值确定。对应极限转矩的相对转差值s_b叫极限转差。假设定子电阻R_s可以忽略，极限转差可以通过下式确定：

$$\frac{\mathrm{d}\,T_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{R_{\mathrm{R}}}{\omega_{\mathrm{e}}\cdot s}\frac{U_{\mathrm{S}}^{2}}{\dfrac{R_{\mathrm{R}}^{2}}{s^{2}}+\omega_{\mathrm{e}}^{2}L_{\gamma\mathrm{e}}^{2}}\right]=0$$

$$s_{\mathrm{b}}=\pm\frac{R_{\mathrm{R}}}{\omega_{\mathrm{s}}L_{\gamma\mathrm{e}}} \tag{16.32}$$

当 $s=+s_{\mathrm{b}}=+R_{\mathrm{R}}/X_{\gamma\mathrm{e}}$ 或 $s=-s_{\mathrm{b}}=-R_{\mathrm{R}}/X_{\gamma\mathrm{e}}$ 时，函数 $T_{\mathrm{em}}(s)$ 的一阶导数等于零，其速度为 $\Omega_{\mathrm{m}}=\Omega_{\mathrm{e}}(1-R_{\mathrm{R}}/X_{\gamma\mathrm{e}})$。这是电动机模式下转矩的最大值 $T_{\mathrm{em}}=+T_{\mathrm{b}}$，其中转矩为正，其速度稍微比同步速度慢一点。对于负的 s 值，当速度为 $\Omega_{\mathrm{m}}=\Omega_{\mathrm{e}}(1+R_{\mathrm{R}}/X_{\gamma\mathrm{e}})$ 时，可以得到发电机模式下的转矩最大值为 $T_{\mathrm{em}}=+T_{\mathrm{b}}$，转矩为负，转速略高于同步速度。在图 16.12 中，极限转差 s_{b} 要比碰到的大多数感应电机都要略高。

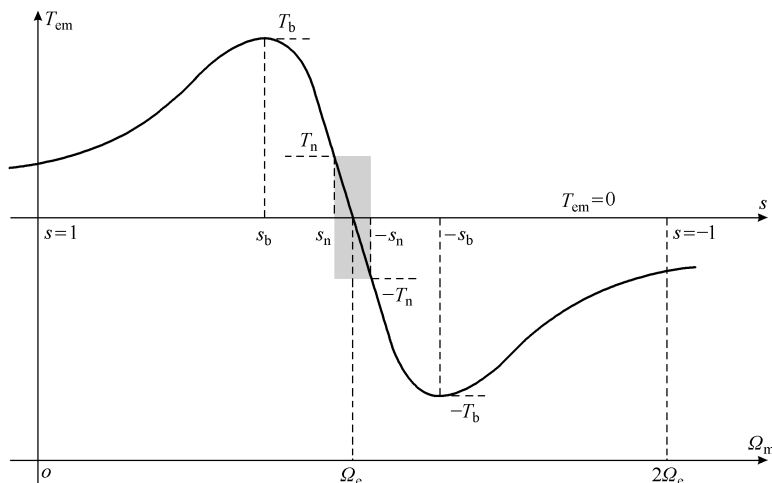


图 16.12 机械特性中的极限转矩和极限转差

极限频率 $\omega_{\mathrm{b}}=\omega_{\mathrm{e}}s_{\mathrm{b}}=R_{\mathrm{R}}/L_{\gamma\mathrm{e}}$ 不依赖于供电频率，它等于转子电阻和等效漏电感的商。在转矩表达式中，通过引入 $s=s_{\mathrm{b}}=R_{\mathrm{R}}/X_{\gamma\mathrm{e}}$ 的替换，和近似 $R_{\mathrm{s}}\approx 0$，可以计算出极限转矩。发电机模式下的极限转矩有着相同的幅值，但符号相反：

$$T_{\mathrm{b}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\Omega_{\mathrm{e}}}\frac{R_{\mathrm{R}}}{s_{\mathrm{b}}}\frac{U_{\mathrm{S}}^{2}}{(R_{\mathrm{R}}/s_{\mathrm{b}})^{2}+(\omega_{\mathrm{e}}L_{\gamma\mathrm{e}})^{2}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\Omega_{\mathrm{e}}}\frac{U_{\mathrm{S}}^{2}}{2\,\omega_{\mathrm{e}}L_{\gamma\mathrm{e}}}$$

$$=\frac{3p}{4\,\omega_{\mathrm{e}}}\frac{U_{\mathrm{S}}^{2}}{\omega_{\mathrm{e}}L_{\gamma\mathrm{e}}}=\frac{3p}{4\,L_{\gamma\mathrm{e}}}\frac{U_{\mathrm{S}}^{2}}{\omega_{\mathrm{e}}^{2}}=\frac{3p}{4\,L_{\gamma\mathrm{e}}}\Psi_{\mathrm{S}}^{2} \tag{16.33}$$

极限转矩可以根据定子磁通 $\Psi_{\mathrm{S}}\approx U_{\mathrm{S}}/\omega_{\mathrm{e}}$ 计算出来。上述表达式可以写入 $T_{\mathrm{b}}=(3p/4)\Psi_{\mathrm{S}}^{2}/L_{\gamma\mathrm{e}}$ 形式中，得到：

$$T_{\mathrm{b}}=\frac{3p}{2\,L_{\gamma\mathrm{e}}}\frac{U_{\mathrm{Seff}}^{2}}{\omega_{\mathrm{e}}^{2}} \tag{16.34}$$

这样，极限转矩和定子磁通的二次方成正比，与等效漏电感成反比。基于此，对定转子耦合系数 k 高的感应电机，极限转矩会更大。在设计连网起动的感应电机时，耦合系数和等效漏电感的选取是妥协的主要因素。即：较小的$L_{\gamma e}$可以提供更高的极限转矩，这是我们所需要的；但更高的起动电流$I_{STrms}=U_{Srms}/X_{\gamma e}$则是我们不需要的。

16.17　克劳斯方程

在极限转差s_b和极限转矩T_b已知的情况下，函数 $T(s)$ 可以表示成不出现电机参数的形式。从极限转矩和转差的表达式出发：

$$T_b=3\frac{1}{\Omega_e}\frac{U_{Srms}^2}{2\omega_e L_{\gamma e}},\ s_b=\frac{R_R}{\omega_b L_{\gamma e}} \tag{16.35}$$

电磁转矩的表达式可以简化成：

$$\begin{aligned}T(s)&=\frac{3}{\Omega_e}\frac{R_R}{s}\frac{U_{Srms}^2}{(R_R/s)^2+(\omega_e L_{\gamma e})^2}\\&=T_b\left(\frac{\Omega_e}{3}\frac{2\omega_e L_{\gamma e}}{U_{Srms}^2}\right)\left(\frac{3}{\Omega_e}\frac{R_R}{s}\frac{U_{Srms}^2}{(R_R/s)^2+(\omega_e L_{\gamma e})^2}\right)\\&=T_b\frac{R_R}{s}\frac{2\omega_e L_{\gamma e}}{(R_R/s)^2+(\omega_e L_{\gamma e})^2}\\&=T_b\frac{2}{\dfrac{R_R/s}{\omega_e L_{\gamma e}}+\dfrac{\omega_e L_{\gamma e}}{R_R/s}}=\frac{2T_b}{\dfrac{s_b}{s}+\dfrac{s}{s_b}}\end{aligned} \tag{16.36}$$

得到的表达式也被称作克劳斯方程。这是建立在忽略L_m的基础之上的。另外，它还假设漏电感$|\underline{I}_m|$很大，励磁电流相对于定转子电流可以被忽略。基于下式：

$$T(s)=\frac{2T_b}{\dfrac{s_b}{s}+\dfrac{s}{s_b}} \tag{16.37}$$

转矩计算相当简单，因为它只需知道两个参数：极限转矩和极限转差。

问题（16.10）：比较电动机模式下和发电机模式下的极限转矩。

解答（16.10）：根据克劳斯方程，即忽略定子电阻R_S的影响而计算的电磁转矩公式$T_{em}(s)$。电动机下的极限转矩和发电机下的不一样。两者不同的地方在于R_S不可忽略的情况。当R_S被考虑在内时，可以通过对等效电路的计算，得到对应的$T_{em}(s)$ 表达式，再找到其最小值。同样的结论也可以通过考虑磁通幅值上的压降$R_S\underline{I}_S$得到。从可以显示出与定子磁通成正比的极限转矩表达式$T_b=(3p/4)\Psi_S^2/L_{\gamma e}$出发，可以得到电动机下的最大转矩会比发电机下的略小。定子磁通相量可以通过式子$\underline{\Psi}_S=(\underline{U}_S-\underline{I}_S R_S)$ 确定。在电动机模式下，电流的有功分量直接来自供电电源，这样压降$\underline{I}_S R_S$会使定子磁通略小于U_S/X_e。在发电机模式下，电流方向反向，使磁通值增加至U_S/X_e以上，这样发电机的极

限转矩比电动机的绝对值要高。

机械转矩$T_{em}(s)$的最大值叫极限转矩，在电机处于$T_L = T_{em} = T_b$，转子速度$\Omega_m = \Omega_e(1 - s_b)$有向区域$\Omega_m < \Omega_e(1 - s_b)$过渡的趋势。该区域内的机械特性的符号是改变的。过渡至$\Omega_m < \Omega_e(1 - s_b)$和$s > s_b$的区域，会使转子速度不断降低，使转子逐渐停转。

16.18 静态平衡和非静态平衡

若电机的负载T_L一定，则极限转矩和极限转差将电机的机械特性分成两个部分。$s < s_b$的部分存在稳定平衡$T_{em} = T_L$，$s > s_b$的部分存在不稳定平衡$T_{em} = T_L$。该分析首先从牛顿运动方程开始：

$$J\frac{\mathrm{d}\,\Omega_m}{\mathrm{d}t} = T_{em}(\Omega_m) - T_L \tag{16.38}$$

图 16.13 标注了稳定区域和不稳定区域。点 UE 代表不稳定平衡状态的工作点。转子速度下降如图所示的$\Delta\Omega_m$，工作点将从右向左移动至 UE1。此时负载转矩T_L不变，电磁转矩$T_{em}(\Omega_m)$降低。注意T_{em}在工作点从 UE 向左移动时T_{em}是减少的。速度的一阶导数为$J\mathrm{d}\,\Omega_m/\mathrm{d}t = T_{em}(\Omega_m) - T_L$，在 UE1 点处为负数。这会导致转子进一步的减速。工作点将逐渐左移直到原点。这样一旦受到干扰，电机将不会回到工作点 UE。

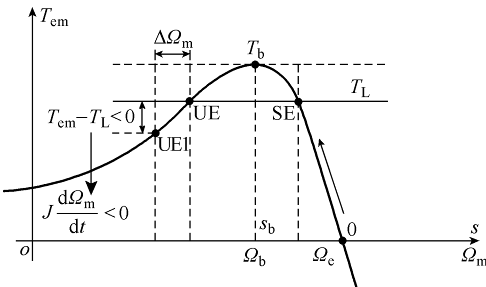


图 16.13 静态平衡区域和非静态平衡区域

在上图中，点 SE 是稳定平衡区域内的工作点。若转子速度因干扰而降低，工作点从右向左移动，负载T_L不变，电磁转矩$T_{em}(\Omega_m)$增加。速度的导数为正值，这样，工作点将会回到 SE。

极限转矩是可以达到的最大转矩。从空载点$s = 0$、$T_L = 0$、$\Omega_m = \Omega_e$开始，逐渐增加负载转矩T_{em}，从而使转子速度逐渐降低。同时，相对转差和转矩会逐渐增加，直到电磁转矩达不到负载转矩。当值T_{em}达到负载T_L时，就达到了稳定点 SE。当负载转矩达到极限转矩T_b时，电磁转矩T_{em}也会随之增加。$T_{em} - \Omega_m$图（图 16.13）上的工作点（T_b，Ω_b）位于极限点。任何其他的扰动都会使其偏离特性$T_{em}(\Omega_m)$的极限点。工作点向左偏移，进入不稳定区。这会导致转子速度逐渐降低。假设负载转矩不随速度发生变化，从而使转子速度会一直减少到零，并会向反方向加速。由于电抗性负载在两个方向上都会阻碍运动，所以转子会减速，并逐渐停下来。

16.19 连续工作的稳定区间

在定子电流没有超过额定电流的工作区间，感应电机可以持续工作。当$I_S > I_n$时，

机器的损耗超过可允许的范围。在一个可持久的、增加损耗的工作环境中，电机的温度会超过安全范围，使重要的部件遭到永久性破坏。可连续运行的区间如图 16. 14 所示。

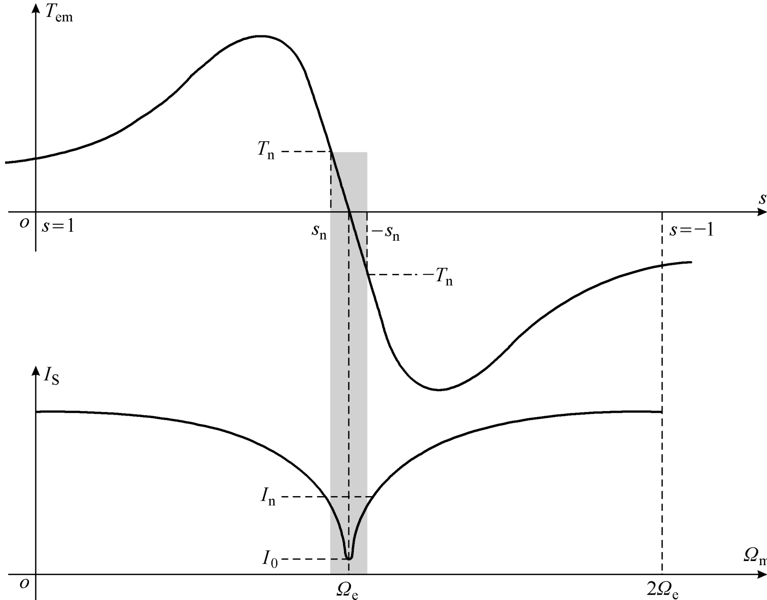


图 16. 14　稳态的电磁转矩和定子电流

空载状态，转差率接近零，定子绕组中存在空载电流$\underline{I}_0 = \underline{U}_{Sn}/(R_S + j\,\omega_{en}L_S)$。与额定电流相比，它相当的低。前述工作点对应图 16. 14 中横坐标和机械特性的交点。增大负载转矩T_L，转子速度降低，转差率增大，阻抗R_R/s减小，从而定转子电流增大。在额定转速 $s = s_n$，电机提供额定转矩T_n，并以额定速度$\Omega_n = \Omega_{en}(1 - s_n)$ 运行，定子电流为额定值I_n。

当转矩T_L为负值，它倾向于使转子加速，将转子速度提升至额定转速以上。转差率变成负值，阻抗R_R/s也一样，这使得气隙功率和转矩均为负值。电机工作于发电机状态，将机械能转变为电能。当转差为负的额定转差时，即 $s = -s_n$，感应电机的转矩为$-T_n$，其转子速度为$\Omega_{en}(1 + s_n)$，比同步转速高。定子电流为额定电流（I_n）。

在额定供电条件下，定子电流因转差率$|s| \leqslant s_n$的额定限制，即速度$\Omega_{en}(1 - s_n) \leqslant \Omega_m \leqslant \Omega_{en}(1 + s_n)$ 时，可以维持。对小功率感应电机，速度偏差在同步速度的 10% 以内时，定子电流都可以在额定范围内。对大中功率电机，转子速度允许的偏差值小于 1%。当定子电流一直维持在额定范围内时，即$|I_S| \leqslant I_n$，感应电机的连续运行是可以的。从图 16. 14 可以看出，条件$|I_S| \leqslant I_n$恰好符合转子速度在离同步速度很近的区域这一条件。这样，为使转子速度变化连续，有必要变化同步速度。这可以通过更改为电机供电的变频交流源的电压和电流频率得到。

16.20 损耗和功率平衡

在电机建模时，我们引入的一个假设，即是忽略磁路损耗，即铁耗。这些损耗一部分和B^2f^2成正比，由涡流电流产生；一部分和B^2f成正比，由 $B(H)$ 曲线的磁滞产生。功率平衡将在铁耗被考虑在内之后讨论。

对于里面含有转子的感应电机，其磁感应强度在转差频率相当低的时候会发生变化。这样，转子磁路的功率损耗就会非常小。定子磁路中的铁损在铁心磁场以供给频率ω_e变化时会非常大。除了铁耗和铜耗，机电转换部分的机械分系统部分也会有损耗。机械损耗包括运动阻碍，如空气阻力和轴承摩擦。

16.21 铜耗、铁耗和机械损耗

感应电机中最重要的损耗有：

1）定子绕组的铜耗，$R_S I_S^2$；

2）笼型转子绕组的损耗，$R_R I_R^2$；

3）定子磁路的铁耗，$\sigma_H f_e B_m^2 + \sigma_V f_e^2 B_m^2$；

4）转子磁路的铁耗，$\sigma_H f_k B_m^2 + \sigma_V f_k^2 B_m^2$；

5）旋转导致的机械损耗，$k_F \Omega_m^2$。

定子绕组的铜耗和定子电流的方均根值的二次方成比例，$P_{Cu1} = 3R_S I_{Srms}^2$。

定子磁路的损耗P_{Fe1}和磁感应强度的二次方成正比，它取决于定子频率f_e。若涡流损耗占主导，铁耗将和定子频率的二次方成正比。

转子导条中的电流产生的损耗和转子电流的平方成正比，$P_{Cu2} = 3R_R I_{Rrms}^2$。除了转子损耗，在转子磁路中同样存在铁耗，因其磁场变化的频率为ω_{slip}。转差频率ω_{slip}比定子频率要小得多，这样，转子铁耗经常被忽略。目前为止，讨论的运行状态中转子铁耗是被考虑在内且不可被忽略的。其中一个就是起动模式，当转子静止时电机连网，转差频率为$\omega_{slip} = \omega_e$，此时转子磁路中的铁耗很大。

由于旋转而引起的损耗主要因为轴承摩擦、空气阻力，以及其他感应电机中阻碍转子运动的机械分系统的其他现象。空气阻力产生的转矩和转子速度的二次方成正比，相应的功率和转子速度的三次方成正比。另一方面，因旋转导致的总损耗经常用近似公式$P_F \approx k_F \Omega_m^2$来模拟。由于相关转矩为$T_F = k_F \Omega_m$。摩擦转矩$T_F$已经从电磁力产生的电磁转矩$T_{em}$中扣除。这样，转轴上可用的转矩就是$T_m = T_{em} - T_F$，它会比$T_{em}$略低。

16.22 机械内功率

电源连入定子绕组，供给感应电机的输入功率为P_e。稳态下，输入电功率可以通过

式子$P_e=3U_{Srms}I_{Srms}\cos(\varphi)$确定出来，其中$U_{Srms}$是相电压的均方根值，$I_{Srms}$是相电流的均方根值，$\cos(\varphi)$是功率因数。损耗$P_{Cu1}=3R_SI_{Srms}^2$代表定子绕组的铜损，它取决于定子电流方均根值的二次方。定子磁路的损耗，即用P_{Fe1}标识的定子铁耗，取决于定子频率ω_e和磁感应强度 B。考虑到定子磁通和定子铁心的磁感应强度有关，定子铁耗可以被表示成和定子磁通幅值的二次方有关的形式。气隙功率$P_\delta=P_e-P_{Cu1}-P_{Fe1}$被定子传送至转子侧，它穿过气隙。电磁转矩$T_{em}=P_\delta/\Omega_e$由气隙功率除以磁场的旋转速度$\Omega_e$得到，也叫同步速度：

$$P_\delta=P_e-3R_Si_{S_{rms}}^2-P_{Fe1}=T_{em}\Omega_e \tag{16.39}$$

电磁转矩$T_{em}=P_\delta/\Omega_e$和转子速度Ω_m的乘积，就得到了机械内功率P_{mR}。这个功率比气隙功率略小，因为转子没有以同步速度旋转。气隙功率和机械内功率（见图 16.15）的不同在于转子损耗，意即，转子铜损和转子内相当小的铁损：

$$P_{mR}=T_{em}\Omega_m\Rightarrow P_\delta-P_{Cu2}-P_{Fe2}\approx P_\delta-P_{Cu}^{rot} \tag{16.40}$$

转子损耗为

$$P_{\gamma R}=P_\delta-P_{mR}=T_{em}(\Omega_e-\Omega_m)=sP_\delta=P_{Cu2}+P_{Fe2} \tag{16.41}$$

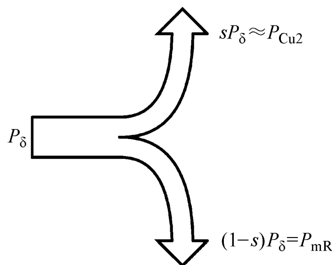


图 16.15　气隙功率分成转子损耗和机械内功率两部分

转子速度比同步速度低一个转差率。电机内部产生的机械功率$P_{mR}=T_{em}\Omega_m$。稳态下，机械功率$P_{mR}=T_{em}\Omega_m=T_{em}\Omega_e(1-s)=(1-s)P_\delta$，这样，$sP_\delta$就等于转子的损耗，它们分别是转子绕组损耗$P_{Cu2}$和转子磁路损耗$P_{Fe2}$。由于转子频率很小，通常假设$P_{Fe2}\approx 0$并使用表达式$sP_\delta=P_{Cu2}$。

有用的机械功率$P_m=T_m\Omega_m$和内功率$P_{mR}=T_{em}\Omega_m$是不同的，因为存在着因为旋转而导致的损耗。在机械子系统中也会存在损耗，比如轴承摩擦和空气阻力等。

如图 16.16 所示的感应电机的等效电路就进行了修改，以区分机械内功率P_{mR}中的转子损耗P_{Cu2}。为了达成这一目标，等效电路转子支路中的阻抗R_R/s被分成了两个部分：R_R和$R_R(1-s)/s$。假设I_R是转子电流的均方根值，损耗$3R_RI_R^2=sP_\delta$表示转子绕组的损耗，$3R_RI_R^2(1-s)/s$表示将电能转化成机械能的机械内功率。在发电机模式，机械内功率是负值。

16.23　电压和磁通的关系

图 16.16 的等效电路展示了如何通过等效电路计算出定子磁通$\underline{\Psi}_S$、互感磁通$\underline{\Psi}_m$和转子磁通$\underline{\Psi}_R$。电压$\underline{U}_S^1$等于$\underline{U}_S-R_S\underline{I}_S$，它通过$\mathrm{j}\omega_e\underline{\Psi}_S$来确定，并可以通过$\underline{U}_S^1/\mathrm{j}\omega_e$来计算定子磁通$\underline{\Psi}_S$。当变量$|\underline{U}_S|$，$|\underline{I}_S|$和$|\underline{I}_R|$代表电压和电流的方均根值时，磁通$\underline{\Psi}$的峰值，即磁通向量的幅值可以由$2^{0.5}|\underline{\Psi}|$来确定。电压$\underline{U}_m=\underline{U}_S-\mathrm{j}\omega_eL_{\gamma S}\underline{I}_S$等于$\mathrm{j}\omega_e\underline{\Psi}_m$，并允许通过计算$\underline{U}_m/\mathrm{j}\omega_e$来计算励磁磁通$\underline{\Psi}_m$。电压$\underline{U}_R=\underline{U}_m+\mathrm{j}\omega_eL_{\gamma R}\underline{I}_R$等于$\mathrm{j}\omega_e\underline{\Psi}_R$，并允许通过计

算$\underline{U}_R/\mathrm{j}\,\omega_e$来计算转子磁通$\underline{\Psi}_R$。

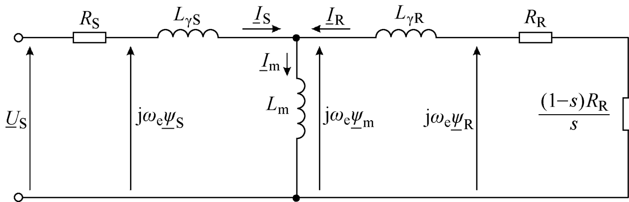


图 16.16　等效电路以及电压和磁通的关系

16.24　功率平衡

感应电机作为电动机时，功率平衡如图 16.17 所示。标注的P_e、P_δ、P_{mR}和P_m均为正值，其关系为$P_e > P_\delta > P_{mR} > P_m$。电动机工作状态下的效率系数为 $\eta = P_m/P_e$。

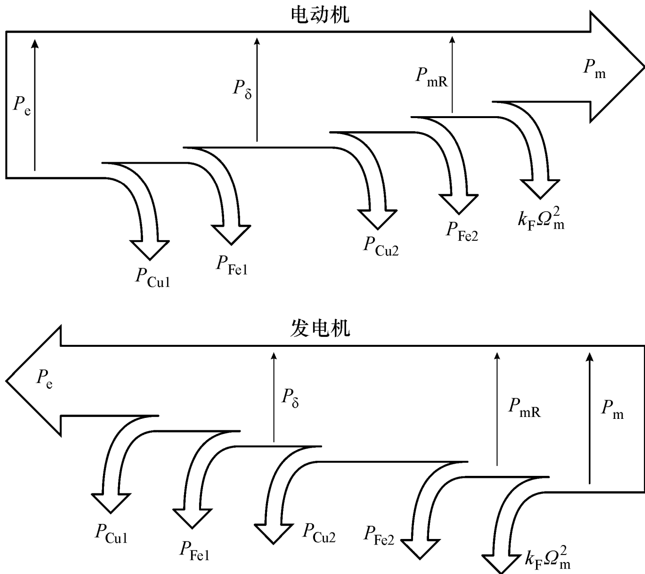


图 16.17　感应电机的功率平衡

通过转轴输出的有用的机械功率为

$$P_m = P_{mR} - k_F\Omega_m^2 \tag{16.42}$$

如果忽略定子铜耗、定子铁耗和旋转损耗，仅将转子绕组的损耗考虑在内。那么从电源，即从电网获取的电功率为

$$P_e \approx P_\delta \approx P_{Cu2} + P_m = s\,P_\delta + (1-s)P_\delta \tag{16.43}$$

发电机模式下，机器从转轴获取机械功率。这样，考虑到参考方向，输出功率 $P_m = T_m \Omega_m$ 为负值。在图 16.17 中，我们假设正的功率所描述的能量是从左向右流动的。标识的功率 P_e，P_δ，P_{mR} 和 P_m 在发电机模式下是负值。它们的关系是 $P_e > P_\delta > P_{mR} > P_m$，即 $|P_e| < |P_\delta| < |P_{mR}| < |P_m|$。

考虑发电机模式的参考功率流是从右向左流，负值被省略，机器的功率平衡也更明显。发电机通过转轴获得输入的机械功率 P_m。通过减去机械子系统中的损耗，如因旋转引起的损耗，可以得到被转换成电功率的机械内功率。转子绕组和转子磁路的损耗分别在向定子输入的电功率（$-P_{mR} > 0$）和的气隙功率（$-P_{ob} > 0$）中扣除。扣除定子铜耗和铁耗之后，就得到了发电机产生的电功率（$-P_e > 0$），并可以通过三相电网传输给用户使用。发电机模式下的效率系数等于 $\eta = P_e / P_m$。感应发电机常用于小型水力发电站和风力发电站。当电机联网，感应发电机产生一个以同步速 $\Omega_e = 2\pi \cdot 50/p$ 旋转的磁场。从水流或风中获得的机械能使转子加速，使其以一个高于同步速度的值旋转。这种制度下，转差为负值，等效电路的等效阻抗 R_R/s 也为负值。基于此，电机从电网吸收电功率为负，这也就意味着机器实际上是在向电网提供能量。这些能量是通过将机械做功转化为电能得到的。

第 17 章　异步电机变频调速

本章讨论感应电机的调速方法。无论是发电机还是电动机都需要速度调节。风力发电站中作发电运行的感应电机变速旋转。因此，电机和相关设备必须保证机械能可以以可变的速度向电能转换。通常用于运动控制作电动运行的电机，电机的转速必须连续可调。

本章的第一部分讨论了由电网供电的感应电机的调速方法。对于定子电压恒定频率运行的感应电机而言，调节转子速度是可能的。分析认为，机械特性和转子速度的变化是由电压振幅的改变所致。改变转子电阻可以改变绕线转子感应电机的转速。磁极对数 p 会影响同步速度 Ω_e 和转子速度 Ω_m，改变磁极对数可以改变转子转速。通过研究 $2p=4$ 级电机的磁极分布引入多级电机的概念。通过研究一个可以在 $2p=2$ 和 $2p=4$ 之间转换的绕组可以帮助设计具有多对磁极的定子绕组。同步转速、转子速度和转差频率的表达式可以表示为磁极对数的函数。由于建立困难，存在限制和能量损耗，所以对于恒定频率运行的感应电机的研究十分困难。

本章第二部分讨论的感应电机由变频电源供电，比如包含开关功率晶体管的脉冲宽度调制的三相逆变器。本章介绍了变频电源的一些基本问题并讨论了由变频静态功率变流器供电的感应电机的运行。简单回顾了给异步电机供电的功率变换器的拓扑结构以及为了获得预期的转子速度和磁通而连续改变定子电压幅值和频率的方法。

本章分别在恒定磁通区域和弱磁区域分析了电源频率的变化对机械特性的影响，概述了由变频静态功率变流器供电的感应电机的转矩、磁通和功率控制。在频率变化已知的前提下分析电机的机械特性。根据对电机和相关三相逆变器的运行限制的研究，为了研究变频运行的感应电机，我们将 T－平面划分为稳态工作区和瞬态工作区。电机的漏感描述了在弱磁模式下恒功率运行的电机的运行特性。最后，本章讨论了由电网供电和由逆变器供电的感应电机在结构和参数上的差异。

17.1　电网供电电机的转速变化

在大多数电机的应用场合，转子速度要求连续可变。比如机器生产中的运动控制，电动汽车、风机、泵和其他场合中的工业机器人和推进工作。

同步电机的转子速度和同步速度之间存在一个转差。感应电机由电网供电，转差率相对较小（$|s|\leq s_n$）时，定子电流保持在额定的范围内，即转速范围为 $\Omega_{en}(1-s_n)\leq\Omega_m\leq\Omega_{en}(1+s_n)$。因此，由电网供电的感应电机要在比较窄的速度范围内连续运行。对于中高功率的电机而言，额定转差率低于 1%；因此，在同步速度的 99%～101% 之间的速度范围内要保持 $I_s\leq I_n$。当转差频率很高时，定子和转子绕组会产生很大的损耗和

电流。当电机运行在 $|s| \leqslant s_n$ 和 $I_s \leqslant I_n$ 区域以外时，电机的温度会上升。由于这一原因，电机的持续运行必须在较低的转差率下才可以，Ω_m 接近于 Ω_e。同步速度为 $\Omega_e = \omega_e / p$，由定子电压角频率 ω_e 决定，即由定子绕组的电流频率决定。对于两极电机而言，极对数为 1，同步速度等于电源角频率，因此，要想改变转子的转速，就需要定子电压和电流的频率可变，我们可以采用三相交流电源供电。最常用的解决方法是使用采用半导体功率开关器件的三相逆变器作为电源转换器。逆变器一般与三相二极管整流器一起使用。三相二极管整流器由线电压 400V，频率为 $f = 50$Hz 或 60Hz 的电网供电。该整流器将交流线电压转换成直流电压。这个直流电压被馈送到三相逆变器，将直流电压转换成一组可变频率和可变幅度的三相交流电压。最后，在逆变器的输出端子输出频率和幅值可变的三相电压。当代的逆变器应用脉冲宽度调制控制和半导体开关器件，例如双极型晶体管（BJT）、MOSFET、IGBT。工业上使用这种装置起步于 20 世纪的后几十年。目前，采用功率晶体管的电源转换器是感应电机供电和调速标准的工业单元（见图 17. 10a）。

感应电机的使用已经超过 100 年。在工业使用感应电机的第一个世纪，没有半导体开关用来设计三相逆变器。因此，另一种组件、设备和技术被设计出来用于实现感应电机转速的连续可调。如果电机由工频为 50Hz 或 60Hz 的电网供电，就没有办法改变供电频率以调节电机转速。因此，大多数感应电机主要以恒定的转速运行。当需要改变电机转速时，就要使用特别的程序、方法和设备。所有的这些条件受到时代的限制。传统的调速方法包括：

1）调定子电压调速；

2）改变转子电阻调速；

3）变极对数调速。

此外，在某些情况下，感应电机通过具有齿轮或一些其他的机械传感器的传动装置连接到机械负载。如果传动装置的传动比可调，就可以在感应电动机转速接近同步转速并且保持恒定的情况下改变负载的速度。

稍后会回顾以上三种方法。

17. 2　电压改变

恒频供电时，感应电机在 $T_{em} - \Omega_m$ 平面内的机械特性的横坐标为 Ω_m，当 $T_{em} = 0$ 时，$\Omega_m = \Omega_e = 2\pi f_e / p$。（见图 17. 1）电机带载后，转差率增大，转速降低。电机做发电运行时，$T_{em} < 0$，$\omega_{slip} < 0$，转矩幅值 $|T_{em}|$ 随着转子转速超过 Ω_e 而增加。电磁转矩与转差率成正比，与定子磁通 Ψ_s 的二次方成正比。反过来，Ψ_s 与定子电压和角频率的比值成正比，$\Psi_s \approx U_s / \omega_e$。

定子电压下降，磁通会下降，机械特性 $S = \Delta T / \Delta \omega$ 的斜率也会下降。因此，相同的转矩对应更大的转速下降。转差率较小时，$T_{em} = k\,\omega_{slip} \Psi_s^2 / R_R$，因此，$\Psi_s$ 下降会使得转差速度 ω_{slip} 上升，转子转速下降。

改变电压可以在一定范围内改变转速，即在不超过临界转差频率 s_b 的范围内，电机的

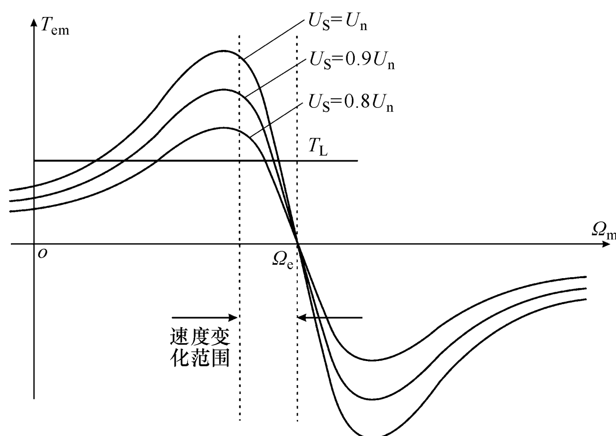


图 17.1　改变电压对机械特性的影响

转速可调。转差率上升，转速下降，转子的损耗就会上升，$P_{Cu2} \approx sP_\delta$，电机温升增大。

实际当中我们很少采用改变电压的方法来调节转速。这种电压控制有时用在风扇驱动场合，其机械功率正比于转子转速的三次方。转子转速较小的变化就会引起转矩和功率发生较大的改变。由于即使转子转速下降很小，气隙功率$P_\delta \sim \Omega_m^3$也会显著下降，因此，降定子电压调速不会产生很大的铜损，$P_{Cu2} \approx sP_\delta$。对于由感应电机驱动的小风扇，可以在定子绕组中串联可变电阻来降压，定子绕组和可变电阻器的串联由恒定电压供电。增大串联电阻的值可以降低定子绕组两端的电压，增加转差率，降低转子速度。这种方法的缺点是串联电阻存在焦耳损耗。

17.3　绕线转子电机

大多数感应电机有铸铝转子，由两个短路环组成笼形结构。另一方面，转子绕组也可以按照定子绕组的构成方法，在转子槽放置绝缘铜导体，将这些导体串联连接构成星形三相绕组。绕组的 3 个终端从定子侧引出。在大多数情况下，转子绕组的端部连接在固定在轴上的相互隔离的三个导电环上。导电环与轴同步旋转，但是与轴电气隔离。从定子侧看去，存在三个电刷固定在定子上与导电环相触。它们接触环的外表面并提供电触点。电刷沿着导电环的圆周滑动，引出导电环也称为集电环。具有集电环的感应电机也被称为绕线转子电机。这三个刷子将定子侧与转子绕组相连。通过在电刷中引入可变三相电阻可以改变转子电路的等效电阻。转子电路外接电阻相当于转子加短路笼引起的转子电阻。改变外接电阻就可以改变电机的机械特性，如图 17.2 所示。图 17.3 为绕线转子感应电机。

电刷短路，绕线转子就会短路。在这种情况下，电机的运行和机械特性同笼型感应电机。通过引入集电环和电刷，就可以在转子电路中引入附加电阻R_{ext}，增大转子等效电阻$R_{Re}=R_R+R_{ext}$，代替稳态等效电路中的R_R。

由于临界转矩$T_b \sim \Psi_s^2/L_{\gamma e}$，所以增大转子电阻$R_{Re}$并不影响临界转矩的值。机械特性的斜率 $\Delta T/\Delta\omega$ 反比于转子电阻，$T_{em} \sim k\,\omega_{slip}\Psi_s^2/R_{Re}$，因此，增大$R_{Re}$就可以降低机械特性的斜率$|\Delta T/\Delta\omega|$。临界转差率$s_b=R_{Re}/X_{\gamma e}$正比于转子电阻，因此，无论电机是电动运行还是发电运行，增大外接电阻R_{ext}就可以增大临界转差率。图 17.2 所示为改变转子

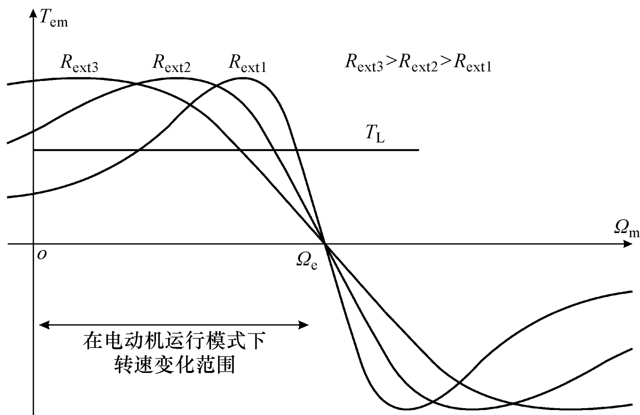


图 17.2　不同转子电阻的机械特性

电阻后的机械特性。由于机械特性的斜率通常会下降，当临界转矩保持不变时，临界转差率会增大。

关于转子电阻变化对转子速度的影响的研究是在假设负载转矩、电源频率以及同步速度不变的前提下进行的。图 17.2 中，负载特性为一条水平线。电机运行在负载特性和机械特性的交点。通过分析可以得出，转子等效电阻越大，两条特性的交点处速度越低。因此，通过集电环和电刷改变转子外接电阻的大小可以改变转子速度。如果该电阻连续可调，则转子转速就连续可调。与笼型电机不同，绕线式电机可以在很大的转差下运行。当转差率超过额定值时，笼型电机的定转子电流也会超过额定值，导致电机过热。对于绕线转子电机，转差率可以较大，等效电路中 R_{Re}/s 就会降低，但由于外部电阻的存在，$R_{Re}=R_R+R_{ext}$ 会上升，以确保定转子电流值不超过允许的范围。

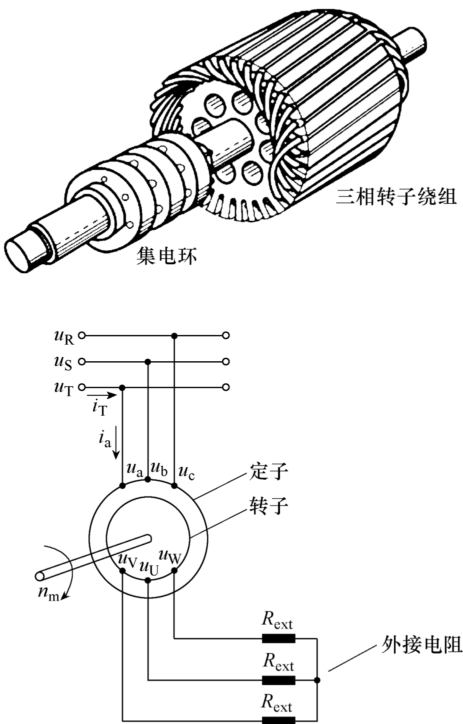


图 17.3　具有集电环和外接电阻的绕线转子

这种方法的缺点是由于外部电阻会损耗功率，从而效率比较低。保持同步转速 Ω_e 不变，控制转子转速 $\Omega_m=\Omega_e(1-s)$。转差率增大，转子速度相应减小，转子损耗 $sP_\delta=P_{Cu2}$ 相应增加。损耗 P_{Cu2} 的增加不会造成感应电机过热，因为这些损耗的绝大部分

都消耗在了外部三相电阻上。然而，这样就会使得系统的效率显著下降。由电网供电的两极感应电机的同步转速为$n_e = 3000\text{r/min}$。当转子速度降为 1500r/min 时，气隙功率的一半被消耗在转子电路中，而另一半被转换成机械功率。电机效率低于 50%，而这样低的效率就是由于转差功率 sP_δ很高。

由于转换为热能的转差功率很高，所以外串电阻的绕线转子感应电机效率很低。通过将转差功率回馈电网可以提高系统效率。在 20 世纪中叶，半导体二极管和适用于工业应用的晶闸管已开发并投入使用，运用二极管和晶闸管来设计静态功率转换器。将静态功率转换器接入转子电路，转差功率被转移到二极管整流器，如图 17.4 所示，该整流器通过电感L_d将交流的转子电流转换为直流。晶闸管变流器（C）将直流电流转换为交流并通过变压器（D）输送回电网。通过这种方法，转差功率回馈电网而非转化为热能消耗。连接到转子回路的转换器被称为同步串级[⊖]。

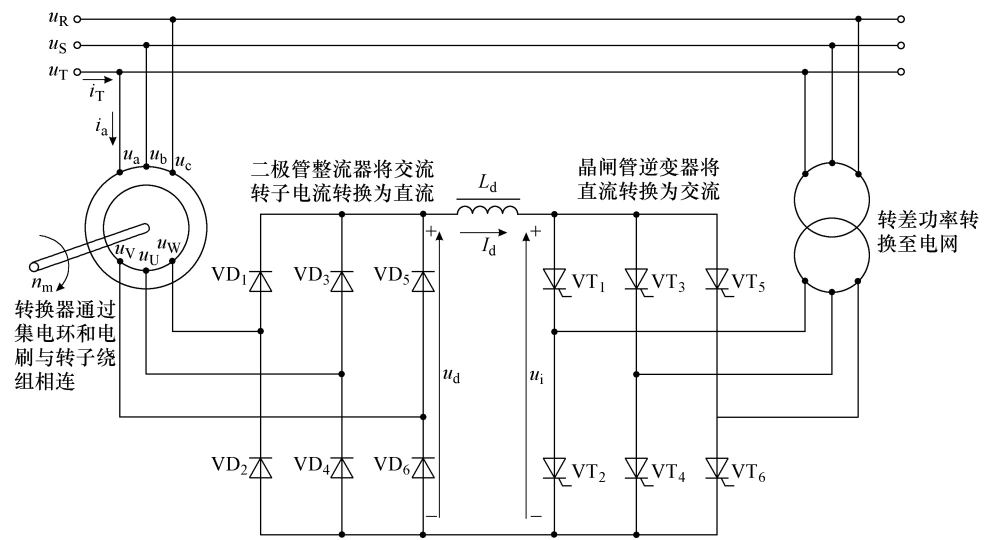


图 17.4　转子电流电路的静态功率转换器，改变转差功率

⊖ 如图 17.4 所示，通过在转子绕组引入集电环，可以将转差功率引出转子电路，也可以使用不同拓扑的静态功率转换器给转子电路供电。在这种情况下，转差功率和转差速度为负，$\Omega_m > \Omega_e$。存在两种拓扑结构被称为同步串级和超同步串级。在过去一个世纪，绕线转子感应电机转子电路中同时装有集电环和四象限（可逆）静态功率转换器。通过该四象限变流器，绕线式感应电机可以在$\Omega_m > \Omega_e$和$\Omega_e > \Omega_m$两个区域内运行。一些早期的风电解决方案中就用到了绕线转子异步发电机和转子电路的静态功率转换器。这种方法的优点是转差功率较低，使得半导体功率开关器件的电压和电流额定值较低。近期更多的风力发电机是基于笼型感应机和全功率晶体管为基础的静态功率转换器，该转换器是恒频电源和可变频定子电压之间的接口。

在 20 世纪的最后 25 年，适用于大功率逆变器的功率晶体管产生，使得感应电机由可变频率的三相电压供电。使得通过连续改变同步转速控制转子转速的变化成为可能。因此，对绕线转子感应电机和串级静态功率转换器的需求逐渐下降。

17.4　变极对数

笼型感应电机的转子转速接近于同步转速$\Omega_e = \omega_e/p$，其中ω_e为供电角频率，$2p$ 为电机磁极对数。由电网供电的感应电机以恒定频率运行，同步转速不变[㊀]。因此，改变磁极对数可以调速。对于 $p=1$，$f=50\text{Hz}$ 的电机而言，同步转速$n_e=3000\text{r/min}$。增加磁极对数使 $2p=4$，6 或 8，就可以得到同步速度 1500、1000 和 750r/min。因此，通过改变磁极对数可以同时改变同步转速和转子速度。

接下来分别讨论直流和交流电机的磁极对数。直流电机中，磁场是由永磁铁或励磁绕组产生。磁极的数目是由电机的设计决定，等于定子的极数，因此在运行过程中磁极数不可变。直流电机的磁极对数会影响机械换向器、电机绕组和磁路形式的设计。因此，除非改变整个电机的结构，否则磁极对数不可变。交流电机当中，磁场是由定子绕组中的电流产生。改变定子相的连接方式就可以改变磁极对数。因此，通过改变定子相绕组连接就可以同时改变同步转速和转子速度。

在驱动器的许多应用场合中，并不需要转子速度连续可调，有两个或三个确定的转速挡就可以。因此，感应电机由恒频电源供电，改变磁极对数就可以达到调速要求。对于感应电机而言，旋转磁场的磁极与磁回路的任何特定部分都不相关。相反，它们相对于定子和转子磁路旋转。磁极对数取决于电流在定子槽中的分布，而这种分布又取决于电源电流和定子绕组的连接方法。图 17.5 的上半部分为具有两个南北磁极的感应电机以及其产生磁场的定子电流分布。

图 17.5 的下半部分中直径方向上的导体中流过相同方向的电流。在直径方向上放置的导体中电流流向一种为⊙，另一种偏移 π/2 为⊗。由四导体系统创建的磁动势包括了两个区域，磁场线分别从定子到转子和从转子到定子。因此，本例中定子电流建立的磁场具有两个 N 极和两个 S 极。这个磁场称为四极场，$p=2$。

图 17.5 给出的例子表明，三相绕组中合适的导体分别可以形成四极旋转磁场。在图 17.6 左侧，三相定子绕组每相相隔 2π/3，在气隙中产生二极磁场。产生二极磁场的定子绕组通常被称为二极绕组。图 17.6 右侧为形成四极磁场的三相定子绕组。abc 每相被分成两部分，每一部分圈数相同，相位上相差 π，两个相邻绕组之间相差 π/3，是二极磁场的一半。

该四极定子绕组的 a 相由沿直径方向的两个部分串联组成，每一部分的导体承载相同的电流$i_a(t)$。每一部分绕组的参考点用点标出。参考点惯例如下：当电流由参考点

㊀ 当电机由功率晶体管构成的逆变器供电时，供电频率可变，因此，电机转子转速可变。

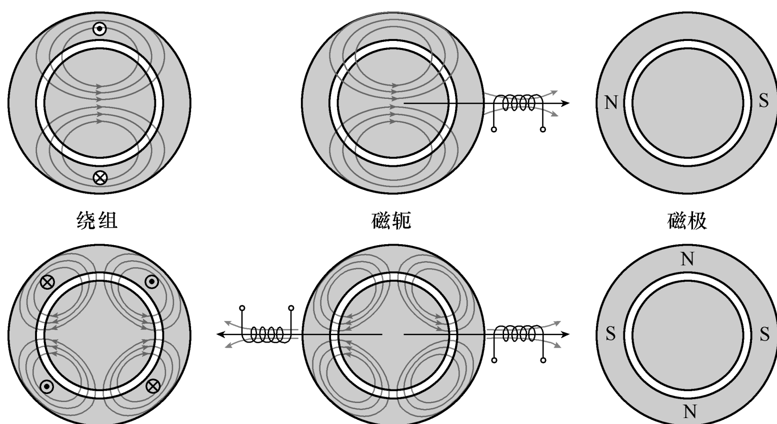


图 17.5　二极和四极电机磁场

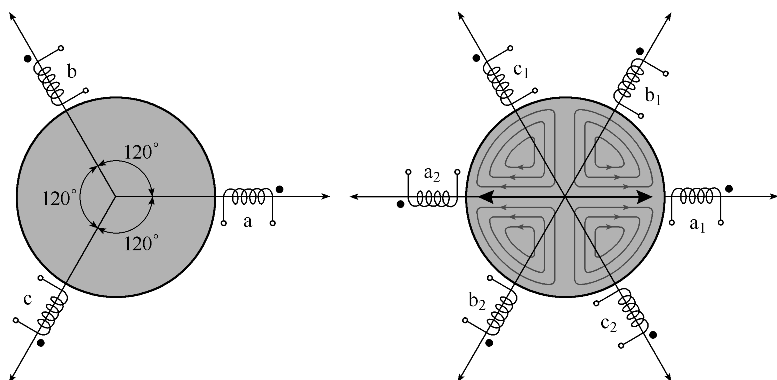


图 17.6　三相四极定子绕组

端流入绕组时，该绕组产生的磁动势和磁场的方向就为始于转子磁路，穿过气隙流向该部分绕组。当 a 相绕组的两部分a_1，a_2串联，a 相电流均从参考点流入时就会产生两个北极，两个南极。即，在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 的方向上，磁力线由转子指向定子。根据磁通守恒定律（$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$），在 $\theta=\pi/2$ 且 $\theta=3\pi/2$ 处，相应的磁力线必须从定子指向转子。通过这种方法，四极磁场就建成了，它具有两个南磁极和两个北磁极。相电流$i_a(t)$，$i_b(t)$，$i_c(t)$ 以相同的幅值和频率按照正弦规律变化，相位互差 $2\pi/3$，相应的磁场旋转速度由供电频率决定，且不改变幅值。通过分析可以得到四极磁场的旋转速度Ω_e是电源频率ω_e的一半。图 17.6 中显示，在 $t=0$ 时刻，一个磁极对准a_1，相电流$i_a(t)=I_m\cos\omega_e t$的值为$i_a(t)=+I_m$。磁极方向指向a_1，由箭头→表示。相电流$i_b(t)=I_m\cos(\omega_e t-2\pi/3)$衰减，在$t_1=2\pi/(3\omega_e)$ 时刻达到其最大值。$0<t<t_1$期间，磁极从a_1向b_1移动，t_1时刻

达到b_1。在$t_2=4\pi/(3\omega_e)$时，相电流$i_c(t)$达到其最大值。此时该磁极对准c_1。在$t_3=2\pi/\omega_e$时，最大值$i_a(t)=+I_m$再次出现在 a 相电流中，与此同时，该磁极对准a_2。在电压电流的一个周期$T=2\pi/\omega_e$内，电流的相位变化为$\Delta\theta_e=2\pi$，磁极空间位移为$\Delta\theta_m=\pi$。因此，磁场的旋转速度是供电频率的一半，$\Omega_e=\omega_e/2$。

值得注意的是在图 17.6 所示的四极场中径向方向存在两个形同极性的磁极。在一个周期当中，两个磁极都会偏移 π，因此，它们交换了位置。

一般情况下，改变定子绕组接法形成旋转磁场时，旋转磁场的同步转速为$\Omega_e=\omega_e/p$。由式（17.3）可以得出多极感应电机的转矩表达式$T_{em}=P_\delta/\Omega_e=pP_\delta/\omega_e$。

通过改变磁极对数，就可以改变绕组每相槽数和其他绕组成分，例如带因子及和弦因子，以及不同的磁感应强度、绕组电阻、漏感和自感。

p 表示一个电机的磁极数，感应电机的同步转速为

$$\Omega_e=\frac{\omega_e}{p} \tag{17.1}$$

转子转速为

$$\Omega_m=\frac{\omega_m}{p}=\frac{\omega_e-\omega_{slip}}{p}=\Omega_e-\Omega_{slip} \tag{17.2}$$

其中ω_{slip}为转子电流角频率。

电磁转矩为

$$T_{em}=\frac{P_\delta}{\Omega_e}=p\frac{P_\delta}{\omega_e} \tag{17.3}$$

17.5 多极电机的特性

多极电机（$p>1$）相比于二极电机更加充分地利用了铜和铁。在感应电机的一些应用场合，使用多极电机可以获得更加精确的转矩和功率，原因如下。

我们已知二极电机沿直径方向放置的相绕组相差$\Delta\theta\approx\pi$。当这些导体的一端处于磁场的北极之下时，另一端就处于南极之下。这两部分导体在电机的前后端通过端部连接，二极电机的端部较长，其长度为电机圆周的一半。导线越长，耗铜量就越大，绕组电阻就越大，铜损越大。在多极电机中，每圈导线之间互差$\Delta\theta\approx\pi/p$，对应于两个磁极之间的距离。多极电机端部较短，这样就降低了耗铜量，绕组电阻和功率损耗也会有所下降。

另外，多极电机更加有效地利用了铁磁材料。磁力线通过定子的北磁极的区域，穿越气隙，进入转子磁路，再次穿越气隙达到定子的南磁极。随后，该磁力线穿过定子轭返回北极。沿定子圆周切线方向，磁力线跨越的角度为$\Delta\theta\approx\pi$。沿切线方向的磁力线不通过定子槽的区域。相反，它们穿过被称为磁轭的定子磁路的外侧部分。该磁轭用来降低磁路的磁阻。另一方面，磁场穿过磁轭对电机的机电转换没有影响，它会增加铁的重量和机器的总质量。在多极电机中，两个磁极之间的磁力线路径更短，等于$\Delta\theta\approx\pi/p$。因

此，通过磁轭的磁通路径更短，从而铁的利用率提高。

17.5.1　电网供电的多极电机

由电网供电的多极电机的同步转速由电网频率f_e决定，$\Omega_e=2\pi f_e/p$。其具体的功率值取决于电机的极对数，可以通过考虑电磁转矩和电机尺寸之间的关系来确定。上面的章节已经指出，电机的转矩与其尺寸有关，$T_{em}\sim V\sim D^2L$㊀，其中D、L分别为电机的直径和轴向长度。由于$T_{em}=P_\delta/\Omega_e=pP_\delta/(2\pi f_e)$，所以$V\sim p\,P_\delta$，即对于电网供电的感应电机而言，增大极对数会增大电机的尺寸。给定气隙功率P_δ时，电机的尺寸满足$V\sim D^2L\sim pP_\delta$。当电机的功率确定时，其尺寸正比于p。例如，一台工作在线电压$U_s=400$V，额定频率$f=50$Hz的额定功率为1.1kW的感应电机，两个磁极时的质量为$m\approx 8$kg，四个磁极为$m\approx 13$kg，六个磁极为$m\approx 16$kg，八个磁极为$m\approx 23$kg。由于先前分析当中忽略的影响的存在，电机质量的实际值与预测值是不同的，$m\approx kp$。

17.5.2　由静态功率变换器供电的多极电机

对于由静态功率变换器供电的感应电机，可以根据需要来调整供电频率和同步速度。大多数的静态功率变换器使用脉冲宽度调制（PWM），来产生对称的、电压频率和幅度可变的三相系统。由于定子供电频率可调，极对数不同的电机可以获得相同的同步转速$\Omega_e=\dfrac{\omega_e}{p}$。因此，我们可以选择电机的极对数以提高铜和铁的利用率。2极电机比等效的四极和六极电机具有更低的转矩和功率。在样品电机中，电机转子速度为Ω_m，则定子电压产生的旋转磁场转速应为$\Omega_e\approx\Omega_m$。一种解决方法是选择一个2极电机，设定电源频率$\omega_e=\Omega_e$或者选择一个多极电机（$p>1$），电源频率设定为$\omega_e=p\Omega_e$。在这两种情况下，电机具有相同的同步速度，产生相同的电磁转矩，输出相同的功率。采用多极电机（$p=2$，3或4）时，由于铁和铜得到充分利用，电机功率更高。因此，多极电机更小更轻。但应注意的是，多极电机的这些优点在当极数很高时就不存在了。在这种情况下，定子频率$\omega_e=p\Omega_e$非常高，这就导致了铁损显著增加。高频率工作的感应电机的磁路不能由铁片制作，应使用铁氧体或其他特殊的铁磁材料。

17.5.3　多极电机的缺点

给定转子速度时，定子电流和电压的角频率取决于电机的极对数，$\omega_e=p\Omega_e$。想要得到$\Omega_m\approx\Omega_e$，定子频率应近似等于$p\Omega_m$。因此，对于由逆变器供电的电机而言，同样的转子速度可以通过较低的极对数和电源频率来实现，也可以通过较多的极对数和更高的供电频率来实现。众所周知，磁路中的涡流损耗正比于频率的二次方，磁滞损耗随着频率的增加线性增长。因此，多极电机的铜损要大于二极电机。在电机设计过程中，我

㊀ 电磁转矩正比于线性尺寸的4次方，$T_{em}\sim V^{4/3}$。

们有必要对电机进行适当的冷却或降低磁感应强度的峰值B_m，以确保损耗在允许的范围内。

多极电机要获得定子绕组的准正弦分布更加困难。在一个磁极下放置参考方向为⊗导线，在另一磁极下放置参考方向为⊙的导线构成定子绕组。二极电机的磁极宽度接近于 $\Delta\theta\approx\pi$，多极电机为 $\Delta\theta\approx\pi/p$，因此，相同参考方向的导线之间互差 $\Delta\theta\approx\pi/p$，宽度为二极电机的 $1/p$。定子导线放置在定子槽中。电机槽数为N_Z时，导线可以放置在确定的离散的位置上。因此，导线只是近似正弦放置，并非按照理想的正弦态分布。由于多极电机的$\triangle\theta\approx\pi/p$ 是二极电机 $\Delta\theta\approx\pi$ 的 $1/p$，当 $p>1$ 时，要获得导线的正弦分布就更加困难。其结果就是多极电机的电动势中高次谐波增加，齿槽转矩增加，由高次谐波引起的损耗增加。

问题（17.1）：多极感应电机的转矩为$T_{em}=P_\delta/\Omega_e=p\,P_\delta/\omega_e$。对于轴向长度为 L 和直径为 D 的感应电机而言，其定子绕组可以产生任意的磁极数。那么通过增加极对数可以增大转矩吗？

解答（17.1）：给定B_{max}和导体中允许的电流密度时，电机的转矩与l^4成正比，为线性尺寸的四次方，$V^{4/3}$，其中 V 是电机体积。因此，电机尺寸一定时，定子绕组的接法不会对电机转矩产生大的影响。换句话说，电机的转矩并不依赖于磁极的数目。这个结论也表示为，转子电流与由定子产生的磁场相互作用形成电磁转矩。由于对电流密度有所限制，转子电流不能增加，并且其限制是不受磁极数影响的。磁感应强度B_m是由铁片的特性所决定。电磁转矩与转子电流、磁感应强度、转子长度和半径有关。忽略次要影响可以得出，给定尺寸的感应电机的转矩与极对数无关，即与定子绕组的绕线方式无关。

问题（17.2）：由 3×400V、50Hz 的电网供电的四极电机的额定功率为P_n。定子槽中不放绕组，在同样的供电方式下设计定子绕组，使其产生两个磁极。估算新电机的额定功率。

解答（17.2）：功率是转子速度和电磁转矩的乘积。使用二极绕组的四极电机使得同步速度和转子转速加倍。转矩依赖于磁感应强度 B 和各槽电流的总和。假设气隙中的磁通密度 B 不发生大的变化，电流密度保持不变，则两极电机会产生相当于原始的四极电机转矩值的转矩。因此，两极电机具有输送 $2P_n$的潜力。

问题（17.3）：我们已知感应电机的定子绕组可以通过绕线产生四极或更多磁极的旋转磁场。改变磁极数会影响转子结构吗？

解答（17.3）：笼形感应电机含有大量的导体，它们通过转子端部的导电环被短路。短路转子的电动势和电流取决于转子相对磁场的旋转速度，即取决于转差速度 $\Omega_{slip}=\omega_{slip}/p$ 和气隙中的磁感应强度。旋转磁场的北磁极下，转子的感应电流为一个方向，而在旋转磁场的南磁极下，它们为相反的方向。因此，相应的转子磁场的磁极数是由定子磁场的极数决定的。换句话说，二极电机和多极电机可以使用相同的转子。

17.6　双速定子绕组

通过改变磁极数可以改变感应电机的同步速度和转子转速。而要改变定子磁动势的磁极数目，就要改变定子绕组的结构。在图 17.7 为一台感应电机的定子绕组接线，其三相绕组的每一相都由两部分组成。a 相绕组分为a_1和a_2，它们产生相同大小但不同方向的磁动势。图中右侧的接线会产生一个四极磁场，左图中a_1，b_1，c_1的相电流方向不变，a_2，b_2，c_2方向发生改变，每相中磁动势方向相同，形成二极磁场。

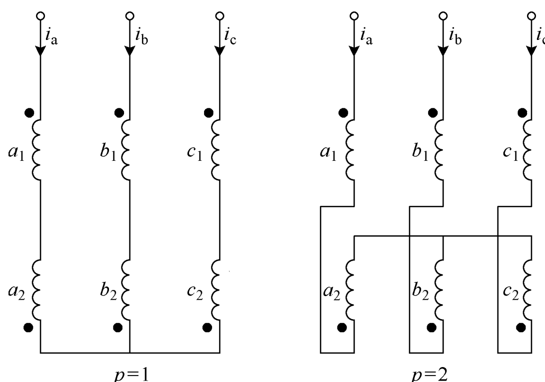


图 17.7　双速定子绕组。通过改变半相绕组连接方式可构成二极或四极磁场

图 17.8 二极和四极配置时，在电源电压周期 $T=1/f_e$的三分之一过程中定子磁通势矢量的运动

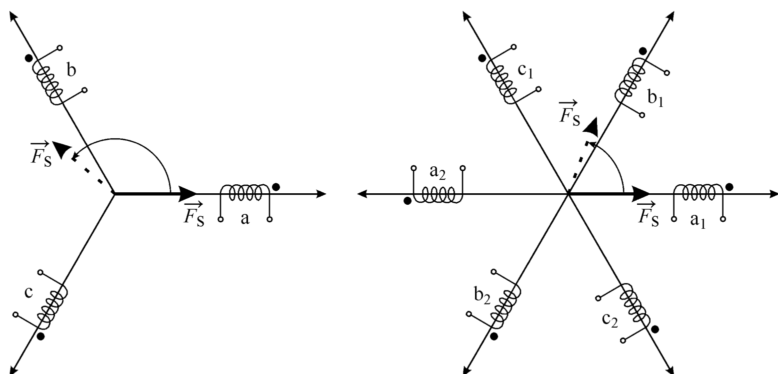


图 17.8　二极和四极磁场的磁动势旋转

通过改变极数来改变转子速度需要定子各部分之间的内部连接的换向。这种变化在电机运行过程中进行。为了获得这些变化，有必要对开关进行操作，打破各部分之间的

连接，实现了绕组重组以获得期望的极对数和同步转速。速度通常可以在没有操作者的前提下自动改变。因此，开关的状态由发出电压命令的数字控制器来控制。而对于数字控制开关的需要使得应用程序变得相对复杂。除此之外，变极对数调速的缺点是这种控制方式不具有连续性，即转子的转速不能连续变化。通过定子绕组的两三种结构，同步速度有两三个值可选。

由于脉冲宽度调制的变频器的出现，使得电源频率连续可调，从而减少了人们对变极对数调速的需求。

问题（17.4）：由电网供电的二极感应电机的临界转矩出现在$n_b = 2\ 000\text{r/min}$处。不再使用定子绕组而是以四极绕组取代，请确定该四极电机的临界转矩出现位置的转速。

解答（17.4）：电磁转矩等于气隙功率和同步速度的比值。在$s_b = R_R/(L_{\gamma e}\omega_e)$时，气隙功率达到其最大值，转子频率为$\omega_b = R_R/L_{\gamma e}$。因此，临界转矩与转子频率有关而与极对数无关。临界转差率的相对值为$s_b = \dfrac{n_e - n_b}{n_e} = 1/3$。对于二极电机，临界转矩出现时转速为$n_b = 2\ 000\text{r/min}$，对于四极电机，$n_b = n_e(1 - s_b) = 1\ 500(1 - s_b) = 1\ 000\text{r/min}$。

17.7　相关符号

先前分析使用小写字母 ω 来表示电流和电压的角频率。转子的机械速度、旋转磁场和磁通势的速度以及其他机械量由大写字母 Ω 表示。以下介绍多极电机符号的使用示例。二极电机的 $p = 1$，所有电气量 ω 等于机械量 Ω。除非另有说明，所有的量均以 rad/s 表示：

1）Ω_e——同步速度，磁场的旋转角速度；

2）ω_e——供电角频率，定子电压电流频率，$\omega_e = p\Omega_e$

3）Ω_m——转子转速；

4）ω_m——转子速度的电表示形式，$\omega_m = p\Omega_m$；

5）n——转数表示的转子速度（每分钟多少转），$n = 9.54\Omega_m$；

6）ω_{slip}——转子电流角频率，$\omega_{slip} = \omega_e - p\Omega_m$；

7）Ω_{slip}——转差速度，转子滞后于同步转速的速度，$\Omega_{slip} = \Omega_e - \Omega_m$。

对于额定频率$f_e = 50\text{Hz}$，额定转速$n_n = 1350\text{r/min}$的四极电机，在额定工作条件下的特征角频率和速度如下：

1）定子电压角频率——$\omega_e = 100\pi$；

2）同步转速——$\Omega_e = 50\pi$，$n_e = 1500\text{r/min}$；

3）转子电流角频率——$\omega_{slip} = 10\pi$；

4）转差速度——$\Omega_{slip} = 5\pi$，$n_{slip} = 150\text{r/min}$；

5）转子机械速度——$\Omega_m = 45\pi$，$n_n = 1350\text{r/min}$。

17.8　变频电源供电

前面的章节讨论了感应电机改变转子速度的传统方法，特别是：

1）变定子电压调速；

2）变转子电阻调速；

3）变极对数调速；

其缺点是：

1）实现困难；

2）高能量损失；

3）不能在很宽的范围内连续调速。

在很宽的范围内连续调速需要晶体管的开关构成的功率转换器。它使用脉冲宽度调制使供电频率连续可变，从而使得同步速度和转子速度连续变化。通过这种方式，就获得可变的速度而不再需要高转差频率的感应电机。因此，速度的变化没有增加转换损失。此外，也没有必要使用绕线转子，集电环或感应电机的任何特殊的设计。后续章节简要介绍了感应电机的变频供电。

17.9　变频电源

研究可变速电机的定子电压特性是有意义的，a 相定子绕组电流为$i_a(t)$，磁通为$\Psi_a(t)$。假设漏磁很小，a 相绕组的磁通即为旋转磁场产生的磁通。在旋转磁场矢量与 a 相的轴线对准的瞬间，磁通$\Psi_a(t)$ 达到其最大值Ψ_m。a 相绕组的磁通随着旋转磁场按正弦规律变化。相电压$u_a(t)=R_s i_a(t)+\mathrm{d}\Psi_a(t)/\mathrm{d}t$。图 17.9 为$u_a$的变化示意图。忽略

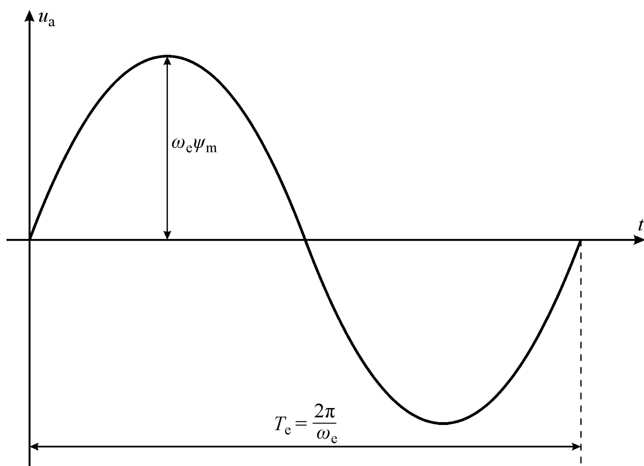


图 17.9　相电压理想波形

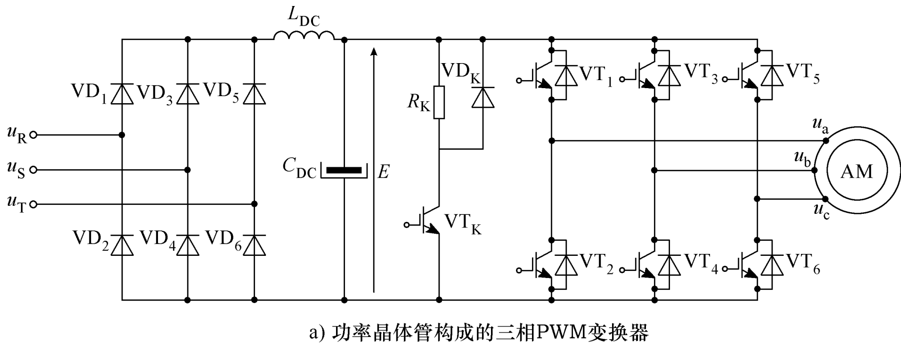
定子绕组电压降

$$u_{\alpha}=u_{a}\approx\frac{\mathrm{d}\Psi_{\alpha s}}{\mathrm{d}t}=\omega_{e}\Psi_{m}\sin(\omega_{e}t-\psi)\tag{17.4}$$

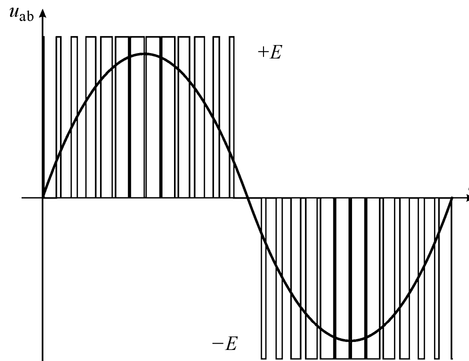
感应电机的转差率相对较小，因此，供电频率可以由转子速度得到$\omega_{e}=p\,\Omega_{e}=p(\Omega_{m}+\Omega_{slip})\approx p\,\Omega_{m}$。于是转子速度的变化需要定子绕组的供电电源的电压频率和幅值可变（$\Psi_{m}\omega_{e}$）。转子转速连续变化就需要该电压的频率和幅值连续可调。于是就需要 PWM 控制的三相逆变器以使得电压幅值$\Psi_{m}\omega_{e}$和周期$T_{e}=2\pi/\omega_{e}$连续可调。

17.10　电源转换器的拓扑结构

图 17.10a 所示为给感应电机供电的电源转换器的简化示意图，图 17.10b 为输出端的线电压波形。输出端两端电压的变化包含了一系列电压脉冲。这种脉冲波形的平均值按正弦规律变化。这种波形送到感应电机定子的终端用来产生可变的频率和幅值供给三相电机。转换器的拓扑结构中含有由 6 个二极管构成的三相二极管整流器，如该图左侧所示。它通过L_{DC}和C_{DC}将从三相交流电网获得的交流电压和电流转换成直流电压和电



a) 功率晶体管构成的三相PWM变换器



b) 线电压波形

图　17.10

流。这些部件放置在转换器的中间，即整流器和逆变器之间，称之为中间直流电路、直流母线或直流总线。将电容C_{DC}两端的直流电压 E 接到三相逆变器，该逆变器为转换结构，由 6 个功率晶体管构成。每个晶体管都是用在开关模式下，即它要么是打开（关闭，$i_{CE} \approx 0$）要么是关闭（打开，$u_{CE} \approx 0$）。晶体管功率开关分为三组，称之为逆变器相或逆变器臂。每个臂有两个晶体管开关，它们串联连接在直流总线的正负极之间。每个桥臂在一个时刻只有一个开关处于打开状态。如果一个桥臂的两个开关同时打开就会造成直流总线短路。打开上桥臂开关输出直流总线的正极，打开下桥臂开关输出负极。

17.11　脉冲宽度调制

设定直流母线电路的负极为参考电位，打开上桥臂开关得到$u_a = +E$，打开下桥臂开关得到$u_a = 0$，同样的方法可以得到相电压u_b和u_c。因此相电压的可能值为 $u \in \{0,\ +E\}$。同一时刻，线电压$u_{ab} = u_a - u_b$的可能值为 $u \in \{-E0,\ +E\}$。所以线电压的瞬时值不能连续可变，而是这三个值其中之一。然而，开关状态的快速变化会产生一系列可变宽度的脉冲。电压脉冲的宽度会影响电压波形的平均值。脉冲宽度连续变化时，电压的平均值也会连续变化。电压幅值在 $\{-E0,\ +E\}$ 之间快速变化时，线电压就变为一系列极性和宽度可变的脉冲，改变脉冲宽度即可改变线电压平均值。当脉冲宽度按照正弦变化时，由三相 PWM 逆变器供电的电机的运行特性就类似于该电机由平滑的定子端电压瞬时值呈正弦规律变化的理想电压源供电。

17.12　输出电压的平均值

三相逆变器的功率晶体管在每个电压周期内换相数次。在三相晶体管变换器中，半导体功率开关器件的换向频率f_{PWM}通常接近 10kHz 或更高。相电压$u_a(t)$ 为一系列脉冲，每隔 $1/f_{PWM}$重复一次。在一个开关周期 $T = 1/f_{PWM} = 100\mu s$ 当中，上桥臂开关的打开时间为t_{ON}，$0 < t_{ON} < T$，在剩下的时间内下桥臂打开，相电压波形如图 17.11 所示。每一个开关周期内的电压平均值正比于脉冲宽度t_{ON}。当直流母线的负极作为参考点时，$0 < t < t_{ON}$的时间段内相电压的值为 $+E$，而在开关周期剩下的时间段内$u_a = 0$。在 $0 < t_{ON} < T$ 时间段内连续地改变t_{ON}就可以使得平均值$u_a^{av} = E(t_{ON}/T)$ 在 0 到 $+E$之间变化。

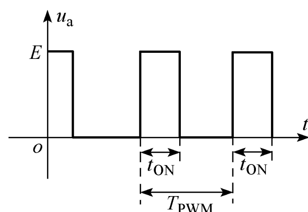


图 17.11　脉冲宽度调制，t_{ON}期间上桥臂打开

$$U_{av} = \frac{1}{T}\int_{NT}^{(N+1)T} u_a \mathrm{d}t = \frac{t_{ON}}{T}E \tag{17.5}$$

17.13　正弦输出电压

构成相电压的脉冲宽度是可变的，改变脉冲宽度称之为脉冲宽度调制（PWM）。由于$u_a^{av}=E(t_{ON}/T)$，所以通过平均电压u_a^{av}可以计算t_{ON}，而t_{ON}决定了一个开关周期中的相电压平均值。

为了改变$u_a^{av}(t)$，即在连续的开关周期内改变相电压大小，脉冲宽度t_{ON}应该按照$t_{ON}(t)=T\,u_a^{av}(t)/E$规律变化。事实上，写成$t_{ON}(t)$ 这种形式是不正确的，因为脉冲宽度为开关周期中的离散值，在周期 $[nT..(n+1)T]$ 中，t_{ON}应该表示为$t_{ON}(n)=T\,u_a^{av}(n)/E$。如果希望相电压频率为$f_e=50\text{Hz}$，$\psi$ 为初始相位，$0<A<1$ 为振幅，则脉冲宽度的变化规律为

$$t_{ON}(n)=\frac{T}{2}+\frac{T}{2}A\sin(2\pi f_e nT-\psi) \tag{17.6}$$

电压u_a^{av}的变化为

$$u_a^{av}(n)\approx\frac{E}{2}+\frac{E}{2}A\sin(2\pi f_e nT-\psi) \tag{17.7}$$

相电压频率为f_e，通过改变参数 A 改变幅值，其频率和相位由f_e和 ψ 来决定。实际中$f_e \ll f_{PWM}$，从$u_a^{av}(n)$ 的表达式可以看出，该电压含有直流分量$\frac{E}{2}$。这是由于选择直流总线的负极为参考电压V_0。打开图 17.10a 中的上桥臂开关VT_1，相电压u_a就等于 E；打开VT_2，$u_a=0$。参考点不同，u_a值就不同。

三相绕组的相电压直流分量是相等的，它并不影响感应电机的运行。定子绕组通过三个导体与三相逆变器相连，电机的运行由线电压决定，$u_{ab}=u_a-u_b$，两相电压相减就除去了直流分量。因此参考电动势的选择是任意的，不会影响电机的运行。为了证实这一结论，我们可以计算一下线电压$u_{ab}^{av}(t)$。式（17.7）已经给出$u_a^{av}(t)$，而

$$u_b^{av}(t)\approx\frac{E}{2}+\frac{E}{2}A\sin(2\pi f_e nT-\psi-2\pi/3)$$

它滞后$u_a$$2\pi/3$。$u_{ab}^{av}(t)=u_a^{av}(t)-u_b^{av}(t)$，因此直流分量 $E/2$ 消去

$$u_{ab}^{av}(t)\approx\frac{AE\sqrt{3}}{2}\sin(2\pi f_e nT-\psi+\pi/6)$$

不再含有直流分量。

脉冲宽度调制的参数 A、f_e和 ψ 以二进制形式存放在 RAM 存储器中，根据电机的运行需要进行调制。

由于相电压周期为$T_e=1/f_e$，所以脉冲的数量有限。调节这些脉冲的宽度使得$u^{av}(t)$按正弦规律变化。

通过脉冲宽度调制来得到近似正弦变化的相电压的过程类似于在槽中放置准正弦分布的分布绕组。

17.14 PWM 波形的频谱

PWM 正弦调制可以得到一系列宽度可变的脉冲，这些脉冲的平均值即为预想的f_e的相电压。当脉冲宽度按照正弦规律变化时，$t_{ON}(n)=\left(\frac{T}{2}\right)[1+A\sin(2\pi f_e nT-\psi)]$，则每个开关周期 $T=1/f_{PWM}$的平均值为

$$u_a^{av}(n)\approx\frac{E}{2}+\frac{E}{2}A\sin(2\pi f_e nT-\psi)$$

为了使得相电压在连续的开关周期内平滑连续地变化，以使得电机的运行状态接近于由理想电源供电，则$f_e \ll f_{PWM}$。相电压频率f_e决定了同步转速，将其称之为基频，它可以为每秒几十到几百转。f_{PWM}称之为换相频率或者开关频率，范围从 5 ~ 20kHz。

脉冲宽度调制的相电压脉冲的频谱包含：

1）直流分量 $E/2$；

2）缓变的交流分量频率f_e，由脉冲宽度的正弦变化产生，称之为基频分量；

3）换向频率$f_{PWM}=1/T$，由一系列可变宽度电压脉冲在每个开关周期内重复产生；

4）一系列幅值更小的频率分量，是开关频率f_{PWM}的整数倍 mf_{PWM}；

5）频率为 $mf_{PWM}\pm nf_e$的频率分量，由开关频率f_{PWM}和基频f_e产生。

所有相中相电压的直流分量是相等的，因此对线电压没有影响。我们希望得到基频下的交流电压分量，即定子两端所需电压，其幅值和频率可变。假设频谱中的高频分量可以忽略，PWM 控制的三相逆变器就可以看成是幅值和频率可变的正弦电压源。

频率$f_{PWM}=1/T\approx 10$kHz 时的频谱分量即为三相逆变器脉冲特性。开关频率处的电压分量幅值由直流母线电压 E 决定。由于幅值较高，所以该频率分量的影响不可忽视。通过分析脉冲供电对感应电机的影响来确立脉冲电压对电机运行特性的影响，并验证通过这样的方式给定子绕组供电是否可行。随后的分析表明，由 PWM 控制的三相逆变器供电的感应电机的定子电流、电磁转矩和转子速度与平滑正弦电压源供电时电机的电流、转矩和速度等效。因此，PWM 供电可以等同于理想正弦电压源，它可以提供类似于 $u(t)=(E/2)+(E/2)\cdot A\sin(2\pi f_e\cdot T-\psi)$ 的电压瞬时值。

17.15 电流纹波

A 相绕组的电压平衡方程为$u_a(t)=R_s i_a(t)+\mathrm{d}\Psi_a(t)/\mathrm{d}t$。磁通$\Psi_a$可以表示为互感磁通$\Psi_{ma}$的和，该互感磁通穿过气隙，同时交链了定子绕组和转子绕组。定子漏磁通正比于漏感L_γ。电压平衡方程为$u_a(t)=R_s i_a(t)+L_\gamma \mathrm{d}i_a(t)/\mathrm{d}t+\mathrm{d}\Psi_{ma}(t)/\mathrm{d}t$，其中$L_\gamma i_a(t)$ 为 a 相定子绕组的漏磁通。旋转磁场与 a 相绕组相对运动，因此，磁通Ψ_{ma}的由同步转速决定的频率呈正弦规律变化。出于这一原因，电动势 $\mathrm{d}\Psi_{ma}(t)/\mathrm{d}t$ 呈正弦变化，频率$\omega_e\approx\omega_m$，幅值为$\Psi_m\omega_e$，其中Ψ_m为互感磁通的最大值。由于$f_e \ll f_{PWM}$，相比于开关状态，

该电动势的变化是缓慢的。当我们考虑开关电源对电机运行特性的影响，忽略电动势的缓变时，电压平衡方程变为

$$u_a(t) = R_s i_a(t) + L_\gamma \mathrm{d}\, i_a(t)/\mathrm{d}t$$

对先前的微分方程进行拉普拉斯变换，即可得到$I_a(s) = U_a(s)/(R_s + s L_\gamma)$。$W(s) = 1/(R_s + s L_\gamma)$ 为定子绕组的传递函数，为定子电流和定子电压相函数的比值。已知定子电压的幅值和频率时，通过传递函数即可求得定子电流。电压激励的开关频率为f_{PWM}，忽略电动势的变化，可以用该函数来计算频率高达f_{PWM}时的响应，但是它不可以用来分析低频响应，例如基频f_e时的响应。

在 $W(s)$ 中引入 $s = j\omega$ 即可得到 $\omega = 2\pi/T = 2\pi f_{PWM}$时的电流电压比，传递函数的形式变为 $W(j\omega) = 1/(R_s + j\omega L_\gamma)$。开关频率为几千赫兹时，我们可以假设$R_s << \omega L_\gamma$，从而得到$|I(-j\omega)/U(j\omega)| \approx 1/(L_\gamma\omega)$。这个表达式表明电机表现为低通滤波器。当接入高频电压时，定子电流的响应就会变小。换言之，低频激励对定子电流的影响大于高频激励。$f_{PWM} \approx 10$kHz 时，电抗$L_\gamma \omega$ 会很大，使得电压脉冲对定子电流的影响非常小。图 17. 12为三相 PWM 逆变器供电的感应电机的相电流典型变化示意图。

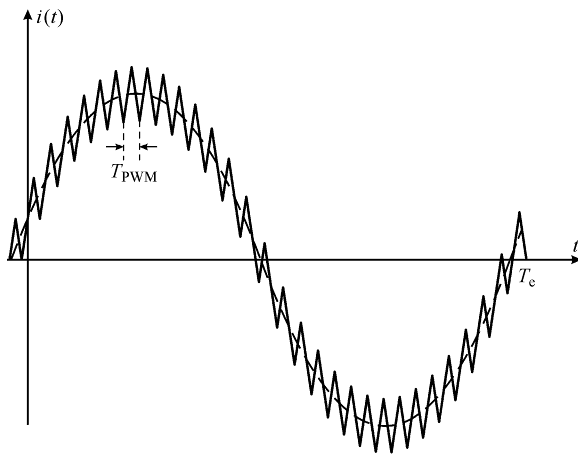


图 17. 12　定子电流纹波

使用脉冲电源时，相电压的值在t_{ON}期间会超过理想的正弦波，而在 PWM 开关周期的其余时间内则会下降。因此，定子电流在其平均值周围振荡。振荡频率$f_{PWM} = 1/T = \omega/(2\pi)$。当开关频率足够高时，振荡的幅度很小，因此对感应电机运行的影响可以忽略不计。通过$|I(j\omega)/U(j\omega)| \approx 1/(L_\gamma\omega)$ 来估计定子电流的振幅。这个表达式也适用于频率为 $\omega = 2\pi f_{PWM}$的正弦电压激励。三相逆变器在开关频率处并不输出正弦波形，而是产生周期为 $1/f_{PWM}$的矩形电压脉冲。然而，该公式可用于估算定子电流的振荡（也称为纹波）。在大多数情况下，电流纹波量为额定电流的 1% ~ 5%。

问题（17. 5）：额定频率为$f_{en} = 50$Hz 的感应电机的等效漏电抗为$\chi_{\gamma e} = 20\%$。电机由

开关频率为$f_{PWM}=10\text{kHz}$的三相逆变器供电。估计由脉冲电源引起的定子电流纹波。

解答（17.5）：由开关电源产生给定子绕组供电的脉冲电压幅值等于直流电路的电压 E，E 必须足够大以使得逆变器输出额定的交流电压。因此，直流环节的电压相对值应为 $E\approx1$。额定频率f_{en}下的漏电抗$\chi_{\gamma e}=0.2$，开关频率为额定频率的 200 倍，电抗与频率成正比。开关频率处，电抗的平均值为$\chi_{\gamma e(PWM)}=\chi_{\gamma e}(f_{PWM}/f_e)=40$，即 4000%。纹波电流为相对值为 1 的电压与开关频率处漏电抗之商，$\Delta I\approx1/\chi_{\gamma e(PWM)}=2.5\%$。

问题（17.6）：由三相逆变器供电的感应电机直流环节电压为 E，开关频率为$f_{PWM}=1/T$。转速为零，因此定子绕组中的感应电动势以及定子绕组电阻均可忽略。转子漏感$L_{\gamma e}$已知，假定直流母线正负极之间的星节点为参考节点，确定$t_{ON}=T/2$时定子电流的振荡波形和幅值。

解答（17.6）：选定以上的参考节点，则相电压的输出值要么为 $+E/2$ 要么为 $-E/2$。忽略定子绕组的电动势和电压降，相电压平衡方程变为$u_a=L_{\gamma e}\mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t$。在开关周期 T 的前二分之一，即t_{ON}时间段内，如果打开上桥臂开关，则$L_{\gamma e}\mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t=E/2$，电流线性变化。剩下的二分之一个周期内可以得到类似的结论，即$u_a=-E/2$。电流在其平均值I_{av}周围振荡，振幅为 ΔI。在前二分之一周期内，振幅由$I_{av}-\Delta I$增长到$I_{av}+\Delta I$，后二分之一周期内又重新降为$I_{av}-\Delta I$。因此，其每半个周期的变化量为 $2\Delta I$。由于电流呈线性变化，因此其斜率$\mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t$等于$2\Delta I/(T/2)=(E/2)/L_{\gamma e}$，从表达式中可以看出，$\Delta I=ET/(8L_{\gamma e})$。

17.16 频率控制

通过改变定子绕组的供电频率可以改变感应电机的同步转速Ω_e。当$T_{em}=0$，$s=0$时，转子以同步转速旋转，$\Omega_m=\Omega_e$。因此，连续地改变供电频率就可以连续地改变电机的空载转速。定子绕组的供电频率决定了电机的机械特性$T_{em}(\Omega_m)$与横坐标的交点，所以当电机带载时，改变定子供电频率也会改变转子的转速。图 17.13 为定子绕组不同供电频率时的机械特性。

除去空载转速，电机的机械特性还包括临界转矩、临界转差率和硬度 $S=|\Delta T_{em}/\Delta\Omega_m|$。临界转差率$\Omega_b=p\,\omega_b=p\,R_R/L_{\gamma e}$由电机参数来决定而与供电频率无关。临界转矩$T_b=(3p/4)\Psi_s^2/L_{\gamma e}$和机械特性硬度 $S=k\,\Psi_s^2/R_R$ 均取决于定子磁通的平方Ψ_s^2。定子磁通的幅值由供电电压和频率的比值决定。当电机的运行转速低于额定转速Ω_n时，我们希望磁通保持额定值不变，即电机可以获得最大的磁通值。当电机转速较高时，必须削弱磁场并使磁通与转速成反比关系。$\Omega_m>\Omega_n$时，必须降低磁通以使得定子电压U_s不超过其额定值U_n。

为了控制磁通，我们需要同时改变供电电压和频率。电压、频率和磁通之间的关系可以由等效电路获得。电机运行在稳态时的电压平衡方程为

$$\underline{U}_s=R_s\underline{I}_s+\mathrm{j}\,\omega_e(L_{\gamma e}\underline{I}_s+\underline{\Psi}_m) \tag{17.8}$$

忽略定子绕组电压降，稳态时的电压平衡方程就变为$\underline{U}_s\approx\mathrm{j}\,\omega_e\Psi_s=\mathrm{j}\,\omega_e L_s+\mathrm{j}\,\omega_e\Psi_m=\mathrm{j}\,\omega_e L_s\underline{i}_s+\mathrm{j}\,\omega_e L_m\underline{I}_m$

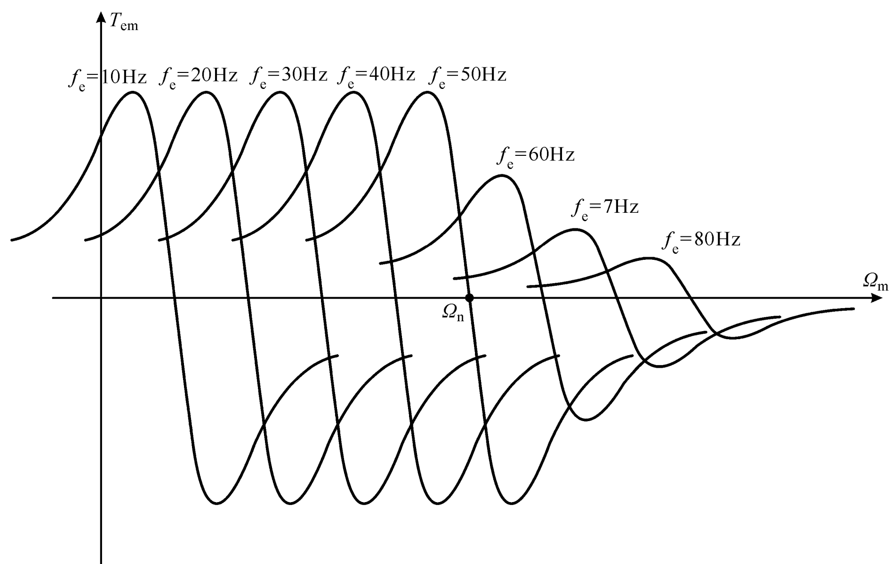


图 17.13　不同供电频率下的机械特性

磁通为电压最大值与供电频率的比值，$\Psi_s \approx U_s/\omega_e$。当定子绕组由三相逆变器供电时，同步转速由基频$\omega_e$决定，定子磁通的幅值由电压幅值与角频率$\omega_e$的商决定。在直流电机中，励磁磁通取决于励磁绕组中的电流，机电转换的电功率由电枢绕组提供。因此，直流电机具有两个电气端口，分别为励磁绕组端口及电枢绕组端口。感应电机只能从定子侧供电。因此，无论是电机的励磁还是机电转换的电功率都是通过三相逆变器输送到定子绕组。感应电机的磁通、转矩和功率都取决于供给定子端的电压。

回想一下不同工作条件下磁通幅值的选择标准。任何电机产生的转矩都可以视为磁通和电流产生的矢量。给定目标转矩T_{em}，则产生该转矩所需要的电流与T_{em}/Ψ_s成正比，即与磁通成反比。较低的电流会导致较低的损耗。因此，只要有可能，就应使得磁通值较大。三相逆变器供电时，磁通由电压和频率的比值决定，$\Psi_s \approx U_s/\omega_e$。磁通可以达到其最大值，$\Psi_{max} \approx \Psi_n$，即为图 17.14 的膝点。

磁通超过Ψ_{max}时就会导致磁路饱和。该课程中忽略了气隙磁通（互感磁通）与定子磁通的差值，即$\Psi_m \approx \Psi_s$，磁通由等效电路中励磁支路的磁化电流i_m决定。该电流为磁化曲线$\Psi_m(i_m)$的横坐标。电机在膝点之后进入磁饱和区，即为磁化曲线的右上侧区域，磁通微弱的增加都需要i_m增加很大的量。在实际应用当中，膝点之后的磁通的增大可以忽略，因为它所需的电流增加量太大。因此，当$\Psi_m > \Psi_n$时，磁通的增加需要很高的电流并且伴随铜损的增加。所以除非其他一些原因和特殊场合需要降低磁通

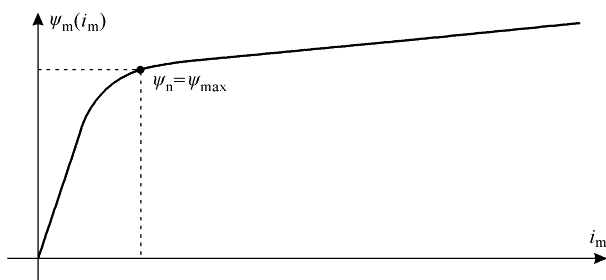


图 17.14　磁化曲线

$$\underline{\Psi}_m \approx \underline{\Psi}_s \approx \frac{\underline{U}_s}{j\,\omega_e} \tag{17.9}$$

其他场合应保持磁通为额定值不变，即$U_s/\omega_e=\Psi_n$。

17.17　弱磁

电机有时不可以运行在$U_s/\omega_e=\Psi_n$，当转子转速较高时，我们有必要降低磁通。$\Omega_m>\Omega_n$时，应该在额定值上增大定子频率。为了使磁通保持额定值，应使得定子电压$U_s=\omega_e\Psi_n$。由于$U_s/\omega_e=\Psi_n$，$\omega_e>\omega_n$，就应该在额定值之上增大定子电压。

稳态运行时，定子电压不能超过其额定值，否则，绕组的电绝缘性就会受到损害。因此，给定子绕组供电的三相逆变器的电压值应在$0<U_s<U_n$范围之内。如果电源提供的电压可能会导致机器损坏，那么这样做就是没意义的。因此，图 17.10 所示的三相逆变器的输出电压不可以超过电动机的额定电压。电机的运行速度超过额定转速时，$U_s\leqslant U_n$，$\omega_e>\omega_n$，磁通便不再是额定值，而是相对降低。当定子电压保持额定值不变，定子供电频率逐渐上升时，磁通与转子速度成反比。通过以下分析即可得到高速时的磁通表达式。

磁通为额定值时，电动势等于$\omega_e\Psi_n$，$\Omega_m\approx\Omega_n$时，电动势达到其额定值$U_n\approx\omega_n\Psi_n$。该讨论忽略了转差以及气隙磁通和定子磁通的差距。由于电压值不可再升，所以电机转速超过额定转速时，磁通不再是额定值。定子端所能承受的最高电压即为定子的额定电压U_n。转速为$\Omega_m\approx\Omega_e>\Omega_n$时，必须保证电动势不超过其额定值，即定子磁通不能超过$\Psi_s(\omega_e)=\Psi_n(\omega_n/\omega_e)$。在这种情况下，电动势等于额定电压。转速较高时，磁通与转子转速成反比，与供电频率也成反比，即$\Psi\sim 1/\omega$。

三相逆变器供电的感应电机中，可以通过改变定子电压和频率来获得所希望的转子转速。接下来从转子速度方面讨论定子电压幅值和频率的计算。

电机运行在额定频率以下时，$\omega_e<\omega_n$，定子电压$U_s\approx\omega_e\Psi_n$与频率成正比，低于其额定电压值，电机磁通保持额定值不变：

$$\Psi_m = \frac{U_s}{\omega_e} = \frac{U_n}{\omega_n} = \text{const} = > \frac{U}{f} = \text{const} \tag{17.10}$$

电机运行转速高于额定转速时，定子电压保持为额定值，即能够从三相逆变器获得最高电压。随着转速上升，定子频率上升，由于 $\Psi \sim 1/\omega$，所以磁通下降。电机工作在弱磁区域：

$$\Psi(\omega)\Big|_{|\omega| > \omega_n} = \frac{\omega_n}{\omega}\Psi_n \tag{17.11}$$

最终，磁通的变化为

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} \omega \leqslant \omega_n \geqslant \Psi_n \\ \omega > \omega_n \geqslant \dfrac{\omega_n}{\omega}\Psi_n \end{cases} \tag{17.12}$$

考虑到这一点，就可以得到频率变化时的一系列机械特性曲线。假设$\Omega_m \approx \Omega_e$，$\omega_e \approx \omega_m = p\,\Omega_m$就可以方便地解读图 17.15。因此，设定$\omega \approx \omega_e \approx \omega_m$即可去掉下标。

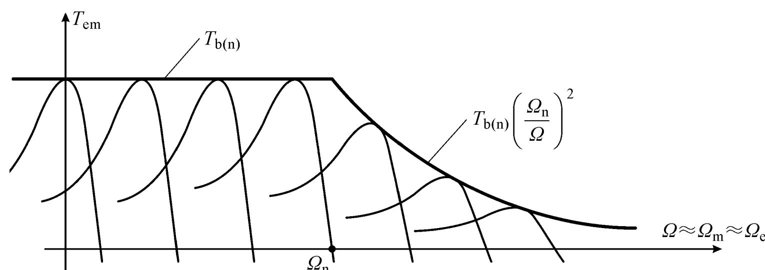


图 17.15　不同频率的机械特性

转速低于额定转速时，U_s/ω_e不变，磁通保持恒定。因此，当$\omega_e < \omega_n$时，所有的机械特性都含有相同的最大转矩和斜率。在$0 < \omega_e < \omega_n$的范围内改变供电频率，就可以得到一系列具有相同斜率和最大转矩的机械特性。绘制该机械特性簇时，可以先绘制额定频率下的自然特性曲线，再将其朝着 $T(\Omega)$ 平面的原点平移。转速高于额定转速时，感应电机运行在弱磁区域，定子电压为额定值，磁通按照$\Psi_s(\omega) = \Psi_n(\omega_n/\omega_e)$ 衰减。机械特性中的空载转速由定子供电频率$\Psi_e = \omega_e/p$ 决定。由于最大转矩T_b和斜率 S 磁通的平方成正比，所以它们随转速平方的上升成正比下降，$T_b \sim 1/\omega^2$，额定磁通时的最大转矩用$T_{b(n)}$来表示。在弱磁区域，$T_b(\omega_e) = T_{b(n)}(\omega_n/\omega_e^2)$，因此，弱磁区域内变频调速的机械特性与转速和频率的平方成反比，$T_b \sim 1/\omega^2$。

感应电机的转子转速Ω_m接近于同步转速Ω_e。为了改变转子转速的方向，就需要改变旋转磁场的方向，反转同步速度。对于电网供电的电机而言，改变相序可 S 使得$\Omega_e = -\omega_e/p$。而对于逆变器供电的电机，就无需改变相序。

供电频率ω_e可以取负值，其值存储在数字控制器的 RAM 中。根据式（17.6），可以通过它计算时间t_{ON}。ω_e为负时，三相定子电压系统就会产生相反方向的旋转磁场，

此时，同步转速和转子转速都会改变方向。

通过将供电频率置为负值来使得转速反向的方法不需要改变电机的接线，也就没有必要交换电机的两相绕组。在计算脉冲宽度的表达式$t_{ON}(n)=(T/2)[1+A\sin(\omega_e nT-\psi)]$中引入负的$\omega_e$就足够了。当$\omega_e<0$时，电机的机械特性就进入$T_{em}-\Omega_m$平面的二三象限。

17.18 稳态和瞬态运行区

通过改变定子电压的频率和幅值，就可以使得电机在$T_{em}-\Omega_m$平面的四个象限内运行。稳态运行区域包括了电机可以没有损害地持续运行的所有工作点。同样瞬态运行区域包含了短时运行工作点。感应电机在第一象限的稳态运行限制如图 17.16 所示，后续将做解释。

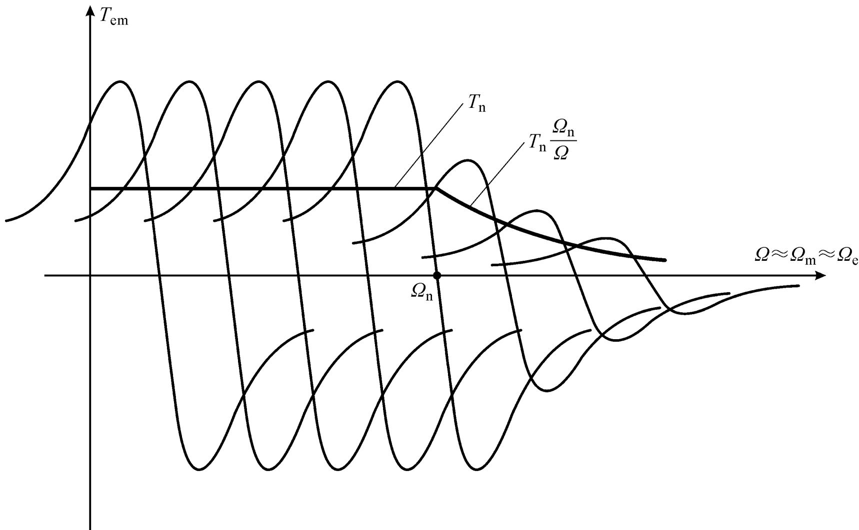


图 17.16 第一象限的稳态运行限制

电机在某个确定模式下持续运行时，必须保证电压和电流都在额定范围之内。同时，为了避免电机过热对电机有所损害，总损耗也应在额定范围之内。

电机运行在额定转速以下时，磁通保持为额定值。定子电压电流为额定值时，感应电机的轴上输出额定转矩T_n。当定子频率在额定范围之内时，即$|\omega_e|\leqslant\omega_n$，电机在任何转速上都可以获得额定转矩。

弱磁区域内，定子频率在其额定值之上，$|\omega_e|>\omega_n$，磁通表达式为$\Psi_s(\omega)=\Psi_n(\omega_n/\omega)$。因此，电机持续运行在弱磁区域时，转矩与转子转速成反比，即与定子频率成反比。弱磁区域内的转矩可以表示为

$$T_n \frac{\Omega_n}{\Omega} \tag{17.13}$$

它规定了高速稳态运行区域的边界。

17.19　稳态运行的限制

如图 17.17 所示为相关改变的稳态运行的限制。任何值都不能超过连续运行时的最大允许值。图中包括了电压、电流、定子频率、转矩、磁通，由变压变频电源供电的感应电机的功率。为了更加清楚起见，假设$\Omega \approx \Omega_e \approx \Omega_m$。区域$\Omega_m < \Omega_n$称之为恒磁通或恒转矩区，$\Omega_m > \Omega_n$称之为弱磁区域或者恒功率区。

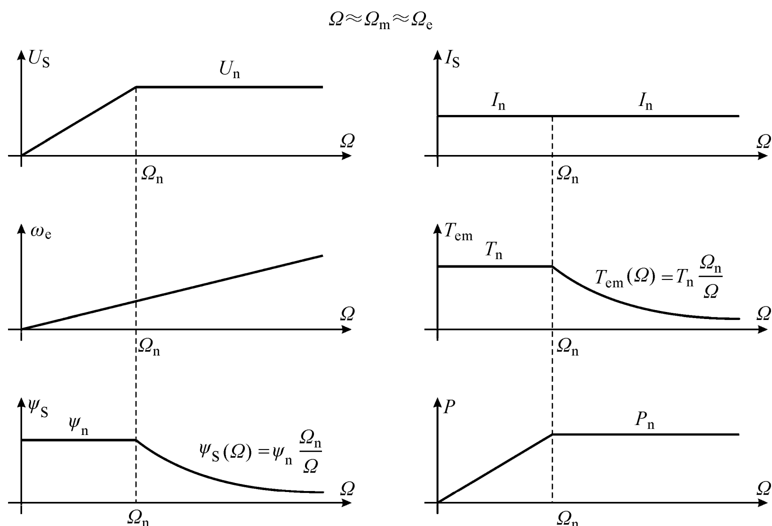


图 17.17　电压、电流、定子频率、转矩、磁通、功率的稳态运行限制

注：$\Omega_m < \Omega_n$区域内，磁通和转矩保持不变，弱磁区域内功率不变。

图 17.17 表示了稳态运行时U_s、I_s、T_{em}、P 和Ψ_s的变化规律，因此它们仅包括了$\Omega > 0$ 的第一象限。然而，例如$T_{em}(\Omega_m)$ 的限制在$T_{em} - \Omega_m$平面的四个限制均适用。因此，无论电机做发电运行还是电动运行，电机的旋转方向为哪个方向，连续运行所受的限制是相同的。从图中可以看出，定子频率ω_e随着转子速度的上升成正比增加。忽略转差，则转子速度和定子频率之间的关系为$\omega_e \approx p\,\Omega_m$。恒磁通区域内，转子速度低于额定转速，$U_s/\omega_e$恒定不变。在达到额定转速时，电压保持在额定值。如果转子速度进一步增加，电机就会进入弱磁区域，即电压保持恒定，而电源角频率不断增加，这将导致磁通下降。弱磁区域内，磁通的变化为$\Psi_s(\omega) = \Psi_n(\omega_n/\omega_e)$。

恒磁通区域内，转矩恒定，弱磁区域内，$T_{em}(\Omega) \approx T_n(\Omega_n/\Omega_e)$。恒磁通区域（$|\Omega_e| \leqslant \Omega_n$）的功率随着转速的上升线性增加，弱磁区域的转矩变化关系为$T_{em} \sim 1/\Omega$。因此，弱磁区域的功率恒定，$P(\Omega) \approx \Omega T_n(\Omega_n/\Omega) = P_n$，故而弱磁区也称之为恒功率区。第一次近似忽略了次生效应的存在，实际上弱磁区的功率要比额定功率较为高一点[㊀]。

17.19.1 *RI* 补偿

在计算定子电压的过程中，忽略定子电阻的电压降。为了清楚起见，作$\underline{U}_s = R_s\underline{I}_s + \mathrm{j}\omega_e\Psi_s \approx \mathrm{j}\omega_e\Psi_s$近似操作。由于定子电阻值相对较小，因此，只要转子转速足够高，电动势相比于R_sI_s很大，该近似就不会在计算上引起较大错误。转速较小时，电动势和电压降数量相当，不可以做此近似。

电机运行速度很低时，角频率也会很小。如果保持定子电压正比于供电频率，则电机的磁通就会低于其额定值。考虑这样一种情况，转速非常低时，尽管存在电阻性电压降，U/f比仍然不变，$U_s = \omega_e\Psi_n$。假设机械负载T_L接近于零，则$\underline{I}_R = 0$。由于$\underline{U}_s = U_s$，则$\underline{I}_s = U_s/(R_s + \mathrm{j}\omega_eL_s)$，$\Psi_s = L_s\underline{I}_s = L_s(U_s/(R_s + \mathrm{j}\omega_eL_s)) = \Psi_n(\mathrm{j}\omega_eL_s/(R_s + \mathrm{j}\omega_eL_s))$。当$\omega_eL_s \gg R_s$时，定子磁通幅值为$\Psi_n$，并且它并不依赖于参数$R_s$。转速很低时，由于电压降$R_sI_s$的存在，磁通会有所下降。

在图 17.17 中的$U_s(\Omega)$中，运行点$\Omega_e = \omega_e/p = 0$处，$U_s = \omega_e\Psi_n = 0$。由于$U_s = 0$，$R_s \neq 0$，所以定子磁通也为零。当供电频率较低时，$U_s = \omega_e\Psi_n$，实际的定子磁通会低于其额定值。低频时磁通较低就会降低起动转矩，对电机的低速运行造成不利影响。通过改变控制规律$U_s = \omega_e\Psi_n$，增大低速时的供电电压幅值（见图 17.18）可以减小这种影响。

17.19.2 临界转速

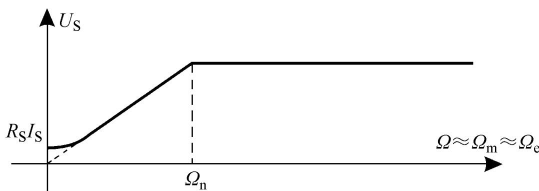


图 17.18　*RI* 补偿—转速很低时的电压增加

根据图 17.17，感应电机运行在弱磁区域时可以输出恒定的功率。这个数字是基于一定的假设前提之下得到的。其中之一是忽略了定子磁通和气隙磁通之间的差距，即忽略了漏感上的电压降。漏磁电抗的大小正比于电源频率。速度非常高时，工作频率会增大到漏抗不能忽略的程度。因此，电机对恒功率运行有所限制。转速Ω_{cr}为电机恒功率运行可以达到的最大转速。电机运行速度超过此转速时，电机的功率就会低于其额定值，Ω_{cr}称之为临界转速，为$T_s(\omega) = T_n(\omega_n/\omega)$和$T_b(\omega) = T_{b(n)}(\omega_n/\omega)^2$的交点。临界转速的近似值将在随后的分析中确定。为了简化分析，假设$p = 1$，ω的值等于其相对速度Ω。同时忽略转差频率和转差速度（$\omega_{slip} \ll \omega_e$，$\Omega_{slip} \ll \Omega_e$），则转子转速$\Omega_m$可以由同步转速$\Omega_e$来代替。

㊀ 由于弱磁区的磁通有所下降，磁化电流I_m会低于其额定值，这使得产生转矩的转子电流略有增加。

弱磁区域内恒功率运行要求$T_s(\omega) \approx T_n(\omega_n/\omega)$。函数$T_s(\omega)$限定了稳态运行的转矩，即$T_s(\omega)$决定了给定转速下的最大稳态运行转矩，由额定定子电流I_n决定。另一方面，最大转矩满足$T_b(\omega) \approx T_{b(n)}(\omega_n/\omega)^2$，其中$T_{b(n)}$为额定电源供电、额定磁通时的最大转矩。函数$T_b(\omega)$表示了给定转速下的最大瞬时转矩。该瞬时转矩$T_b$只能维持一小段时间，因为它需要定子电流$I_s > I_n$，而这样会增大损耗，增加温升。函数$T_s(\omega)$和$T_b(\omega)$在$\omega_{cr} = \omega_n(T_{b(n)}/T_n)$处相交。

转速高于ω_{cr}时，最大转矩$T_b(\omega)$小于连续运行时的允许转矩$T_s(\omega) \approx T_n(\omega_n/\omega)$。于是瞬时转矩极限低于连续运行的极限值，这是相互矛盾的。为了正确理解它们之间的关系，首先要明白函数$T_s(\omega)$和$T_b(\omega)$的不同之处。$T_s(\omega)$表示定子电流$I_s = I_n$时的给定转速ω处的转矩T_s。因此，在某种程度上，曲线$T_s(\omega)$表示$T(\omega)$平面内$I_s < I_n$的极限。只有当定子电流的实际值达到其额定值时，转矩$T_s(\omega)$才是可行的。另一方面，曲线$T_b(\omega)$为瞬时转矩的实际限制。在给定转速ω处，函数$T_b(\omega)$决定了给定参数的感应电机的峰值转矩。在临界转矩之上，曲线$T_b(\omega)$提供了$\omega > \omega_{cr}$时的峰值转矩，同时，由$T_b(\omega)$得到的值不能够达到$\omega > \omega_{cr}$。供电频率增大时，漏抗会增加。定子电压限制在额定值并且漏抗增加时，定子电流不能达到其额定值。因此，$\omega > \omega_{cr}$时，电机瞬态和稳态运行时的定子电流低于I_n，$T_s(\omega) > T_b(\omega)$。

变频供电的感应电机可以运行在临界转速之上，但其功率低于其额定值。在这一速度范围内，转矩反比于转子转速的平方，功率与转速成反比，即$P \sim 1/\omega$。感应电机的瞬态和稳态运行界限如图 17.19 所示。

做近似操作之后，临界转速为

$$\Omega_{cr} = \Omega_n \frac{1}{2\chi_{\gamma e}} = \frac{T_{b(n)}}{T_n} \qquad (17.14)$$

其中

$$\chi_{\gamma e} = \frac{X_{\gamma e}}{Z_n} = \frac{L_{\gamma e}\omega_n}{Z_n} = \frac{L_{\gamma e}\omega_n I_n}{U_n}$$

问题（17.7）：转子堵转时（$\Omega_m = 0$），与额定频率、额定电压的电压源相连的感应电机产生的定子电流为$I_p = 5I_n$。估计最大转矩和临界转速的相对值。

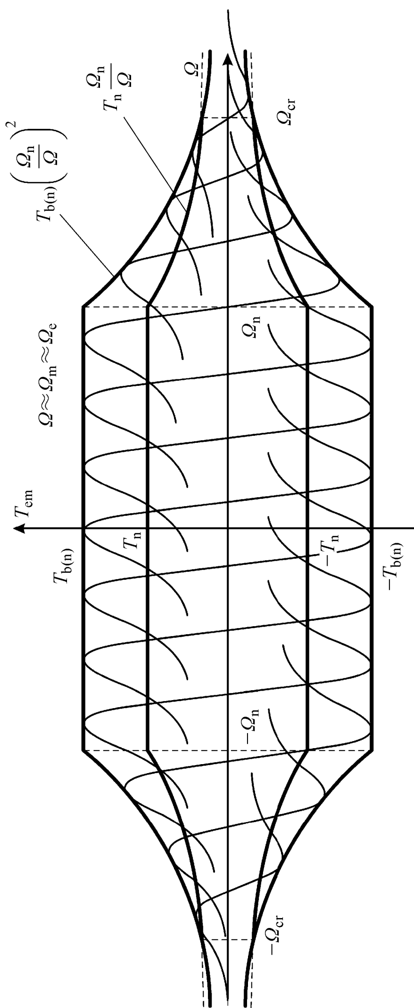


图 17.19　瞬态和稳态运行界限

解答（17.7）：额定电源供电时，最大转矩为

$$T_{b(n)}=\frac{3p}{\Omega_e}\frac{U_{Sn}^2}{2X_{\gamma en}}$$

其中，U_{Sn}为相电压的额定均方根值，$X_{\gamma en}$为额定定子频率时的漏感。近似认为$R_S=0$，$L_m>>L_{\gamma e}$，$(R_R/s_n)\approx U_N/I_n>>X_{\gamma en}$，则额定转矩为

$$T_{nom}=\frac{3p}{\Omega_e}\frac{R_R}{s_n}\frac{U_{Sn}{}^2}{\left(\frac{R_R}{s_n}\right)^2+X_{\gamma en}{}^2}\approx\frac{3p}{\Omega_e}\frac{R_R}{s_n}\frac{U_{Sn}{}^2}{\left(\frac{R_R}{s_n}\right)^2}\approx\frac{3p}{\Omega_e}\frac{U_{Sn}{}^2}{\left(\frac{R_R}{s_n}\right)}\approx\frac{3p}{\Omega_e}U_{Sn}I_{Sn}$$

其中s_n为额定转差率。

最大转矩的相对值等于之前两个表达式的比值

$$m_{b(n)}=\frac{T_{b(n)}}{T_n}=\frac{\frac{U_{Sn}{}^2}{2\ X_{\gamma en}}}{U_{Sn}I_{Sn}}=\frac{1}{2\chi_{\gamma e}}$$

其中$\chi_{\gamma en}$为漏电抗相对值。通过起动电流可以近似估计漏抗值为$\chi_{\gamma en}\approx 1/I_p=0.2$。初始转矩的相对值为$m_{b(n)}=2.5$。临界转速$\Omega_{cr}=\Omega_n(T_{b(n)}/T_n)$ 为获得额定功率时的最大转速。临界转速的相对值（Ω_{cr}/Ω_n） 等于最大转矩的相对值，因此$\omega_{cr}=2.5\ \omega_n$。

17.20　感应电机的结构

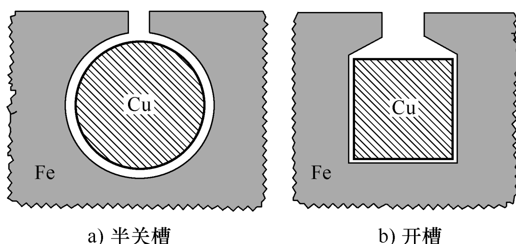
19 世纪末期，人们就开始使用感应电机。在其应用初期，用于变频电源的功率晶体管和其他器件还没有出现。因此，感应电机由频率恒定的电网供电。在这一时期，感应电机的设计和优化都是在恒频运行条件下。将感应电机连接到工频 50/60Hz 的电网即可起动电机。

17.20.1　电网供电的电机

由电网供电的感应电机起动时，转子速度$\Omega_m=0$，定子电压的频率和幅值为其额定值。定子绕组的起动电流为$I_p\approx U_{Sn}/X_{\gamma e}$，其中$X_{\gamma e}\approx X_{\gamma S}+X_{\gamma R}$为等效漏电抗。漏抗值小，起动电流高。

电抗$\chi_{\gamma e}\approx 10\%$使得电机的起动电流为其额定电流的 10 倍，从而使得定子铜耗为其额定运行时损耗的 100 倍。与此同时，起动电流很大就会使得电网电压出现很大的电压降，从而影响该线路中其他电气负载的运行。直到转子转速接近同步转速时，起动过程结束。此时，相对转差率 s 较低，等效电路中$R_R/s>>X_{\gamma e}$，定子电流降为允许值。加速时间取决于负载的转动惯量 J，它可以为几百毫秒到几秒。起动过程中的绕组损耗与起动电流的平方成正比，它使得电机的温度急剧上升。因此加速过程不能持续过长时间。除非电机可以很快达到其同步转速，否则就应该将其从电网中断开，以避免电机过热损坏电机。电机的起动电流远远大于其额定电流，这就对电机的组装、保险和布线提出较高的要求。电网供电的感应电机应在对电机没有损害的情况下产生较大的起动电流。

为了降低由电网供电的感应电机的起动电流，应使得电机的漏感较大。漏感正比于N^2/R_μ，其中 N 为相对绕组的转数，R_μ为漏磁通磁路的磁阻。通过降低R_μ就可以增大漏感和漏抗，从而控制电机的起动电流。其中一种实现方法如图 17.20 所示，转子磁路半关闭或关闭。



a) 半关槽　　b) 开槽

图　17.20

转子槽朝着气隙的方向开口会降低漏磁磁路的磁阻。由于转子槽的顶部较窄，穿越气隙的漏磁磁路会缩短，从而降低磁阻。漏感和漏抗的增加会降低起动电流但同时也存在副作用。漏感增加会降低最大转矩，最大转矩与漏抗成反比。在设计恒定频率工作的感应电机过程中，对漏抗的选择是无可奈何的。最终应产生合适的起动电流，但最大转矩不应衰减很多。

主电源供电的感应电动机起动时需要起动转矩T_P尽可能地高，使其超过运动阻力矩T_L促使电机加速。起动时，加速度等于 $d\Omega_m/dt=(T_P-T_L)/J$，它取决于起动转矩的大小。T_P数值越高，加速度越大，加速时间越短，热能损耗越少，温升越小。缩短起动时间会降低热应力，延长电机的使用寿命。起动转矩$T_P=(3p/\Omega_{en})R_R I_P^2$取决于起动电流的平方，与转子电阻$R_R$成正比。为了提高起动转矩，就需要增大转子电阻。因此，我们可以使用较小横截面积的积转子导条，或选取的材料具有较高的电阻率，例如黄铜。然而，增加转子电阻会影响转子绕组的稳态损耗。在额定工作条件下，转子铜损会更高。这将会降低电机的运行效率，增加温升，最终降低额定功率。电机想要在稳态区域高效运行就应使转子电阻尽可能地小。与此同时，想要起动转矩最大化又要求转子电阻尽可能地高。通过使用转子笼，获得与频率有关的转子电阻可以解决这对矛盾。

转子绕组可以设计成与频率有关。参数R_R取决于转子电流频率，即转差频率。在起动模式下，转差频率很高。由于相对转差率等于 1，转差频率等于电源频率。稳态下，电机的运行速度接近同步转速，转差频率很低，接近 1Hz。通过改变转差频率可以获得可变的转子电阻，以满足电网供电的感应电机的需求。

电机起动时，为了获得较高的起动转矩，应使R_R尽量高。转子电流频率与定子电流频率相等，即$f_{slip}=f_e=50$Hz。因此，有必要使用转子笼在线频率电流中产生相对高的电阻。

稳态时，电机转速接近其额定值和同步转速。转子电流的频率要低得多，接近于

$f_{slip}\sim1\text{Hz}$。转子笼的低频等效电阻应尽可能地低。

通过构建一个双笼，如图 17.21 所示，转子绕组电阻与频率有关。在转子磁路的深处放置由铜或铝制成的低电阻、大横截面的导体。内笼（B）对直流电流的电阻更小。接近表面处为横截面小的黄铜棒（A），它们的电阻要高得多。频率非常低，例如额定转差频率时，转子电流流过内笼，电阻很低。在电源频率为 50Hz 处，内笼电抗就会阻止转子电路穿过内笼。于是转子电路的起动电流即会通过更靠近气隙的黄铜笼，使得电阻值更高，起动转矩更大。

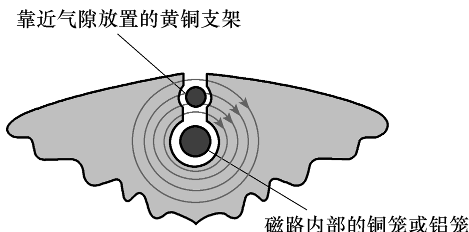


图 17.21 电网供电的双笼感应电机

内笼的漏抗比黄铜笼的漏电抗要高得多。图中画出了漏磁通的磁力线。铜条被大量的磁力线包围。因此，漏磁通、漏电感和漏电抗相对较高。由于黄铜的位置更接近气隙，周围的磁力线数量较少，它的漏磁通和漏电抗更小。起动时，转子电流频率为 $f_{slip}=f_e=50\text{Hz}$，从而增加了转子电抗的值 $X_\gamma=L_\gamma\omega_{slip}=L_\gamma\omega_e$。由于频率比较高，两个笼的电抗值都大于其电阻值，每个笼的阻抗主要是感应而得，$X_\gamma>>R_R$。由于黄铜笼的电抗相当小，所以转子的起动电流主要通过具有较高的电阻的黄铜笼。当电机进入稳定状态，转子电流的频率是相当小的，即 $f_{slip}\sim1\text{Hz}$。因此，每个笼的阻抗主要呈现电阻性，电阻远大于电抗，$X_\gamma=L_\gamma\omega_{slip}<<R_R$。由于下部（铜）笼子的电阻相当小，稳态时的转子电流主要通过低电阻的铜条。

通过以上分析，可以得出结论：双笼型转子的转子电流在起动过程中流过上部的黄铜笼，进入稳定状态时切换至下面的铜笼。稳态时，电机速度接近同步转速，转差频率很低。通过这种方式，转子电阻便与频率相关。在接近额定工作条件下的稳定状态中，等效转子电阻较低，而在起动时，等效转子电阻较高。制造双笼型转子增大了生产过程的复杂性，也增加了成本。因此，它主要用于要求有较大额定功率和/或较大起动转矩的电机。

通过增大转子槽的深度、降低转子槽的宽度可以得到双笼型转子类似的效果。图 17.22 所示为加大转子槽的深度。该槽中插入矩形横截面的转子导条。转子频率很低时，漏抗的影响可以忽略，认为转子电流平均分布在转子导条的横截面上。通过槽底部的电流被磁力线包围，漏磁通相对较大。另一方面，气隙对面导体的表面也有电流流过。包围该电流的磁力线相对要少得多，其漏磁也小得多。

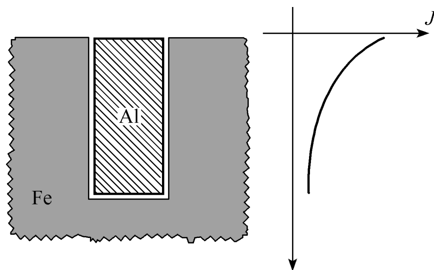


图 17.22 深转子槽以及转子电流分布

当转子导条电流有比较高的转差频率时，变化的漏磁通会产生电动势来阻碍电流的

变化。通过该槽上部的电流由小的漏磁通包围。因此，此电流感应电动势很小。另一方面，通过该槽上部的电流在转子磁路当中，被较大的漏磁通包围，因此该电流的感应电动势要高得多。它阻碍电流的流动，将转子电流推向空气间隙。该图的右侧举例说明了转子电流的不均匀分布。由于具有相对高的转差频率的电流通过转子导条横截面的一小部分，所以转子的等效电阻增加。另一方面，低转差频率时的电流均匀分布，等效转子电阻也低得多。

17.20.2　变频感应电机

前面的章节介绍了几种设计电源供电的感应电机的方法。它们重点解决的是恒频异步电机的问题。还有一些最重要的问题，包括了限制起动电流，提供足够大的起动转矩，稳态条件下高效运行。

现代感应电机使用由功率晶体管构成的三相开关逆变器供电。它们可以提供可变频率和可变幅度的三相电压系统。电源的参数适合于目标操作模式。变频控制异步机的起动不需要大的起动电流。相反，定子频率降低到接近于额定转差频率，电压振幅只要可以达到额定磁通即可。在这种方式中，起动转矩的产生不需要定子电流超过其额定值，除非运动阻力超过其额定转矩。因此，变频控制异步电机不会在转子短路的条件下达到额定电压。由于没有必要限制起动电流因此不需要增加漏感。相反，定子和转子磁路中开槽会导致更小的漏磁通、更小的漏电感以及更大的最大转矩。开槽示例如图 17.20b 所示。

除了较高的最大转矩，减少漏感还可以使得定子电流变化加快，从而加快转矩的变化。由于电机的电磁转矩取决于绕组中的电流，电磁转矩的变化率取决于电流的一阶导数，$\mathrm{d}i_s/\mathrm{d}t$。定子绕组中的电压平衡方程为$u_s = R_S i_S + \frac{L_{\gamma e}\mathrm{d}\,i_s}{\mathrm{d}t} + e$。因此，定子电流的一阶导数与漏感成反比，$\mathrm{d}i_s/\mathrm{d}t = (u_s - R_S i_S - e)/L_{\gamma e}$。漏感越低，电磁转矩的变化率越大。

漏感的减少也会带来消极后果。由于磁路中的槽数一定，导体呈非正弦分布，感应电机绕组中的电动势具有高次谐波。这些谐波会引起相同频率的电流。转子铜条中这些电流的振幅与电动势的相关频率分量幅值成正比，与绕组阻抗成反比。在较高频率下的绕组阻抗主要由漏抗来决定。出于这个原因，漏抗的减少会导致由高次谐波引起的绕组电流增加，PWM 电源引起的电流纹波增加。为了消除这种不利影响，可以改变转子槽的设计，使得定转子磁路的形状降低磁场的非正弦分布，或者重新设计定转子绕组，以减少由于失真和高次谐波引起的电动势的值。

问题（17.8）：转子导条在槽中被齿槽分离。磁场线穿过较小的磁阻的磁路。因此，磁感应强度在转子齿上高，在转子槽中要低得多。承载转子电流的导体被放置在磁感应强度 B 接近于零的槽中。导体所受的力取决于磁感应强度和电流的大小。很明显，这个力是非常小的。请解释如上所述的情况下，感应电机不会产生相当大的转矩。

答案（17.8）：转矩产生可以视为是导体受力的结果。导体放置在相对较深的槽中，铁齿内部的磁感应强度大于铸铝槽的磁感应强度。槽和齿的磁感应强度比值接近于

μ_0/μ_{Fe}。因此，导体中只有一个很小的力在起作用。相反，作用在转子表面的力分隔了铁磁材料（例如磁路中的铁）和非磁性材料（如铝导线或气隙）。它们充当槽和齿之间的间隔。作用在转子齿上的力可以通过使用所谓的等效磁压㊀的概念来解释。

磁场空间分布的计算是相对复杂的，它包括了开槽转子的三维结构。在大多数情况下，它需要借助自动化的软件工具。一旦完成，该计算就提供了作用于表面，将铁从非铁磁区域划分出来的等效磁压力的信息。等效磁压力可以获得时，沿所有相关表面进行表面积分即可计算力和转矩。这样计算得到的转矩值等于假定力 LIB 作用于每个导体，槽和齿中穿过相同的磁力线时获得的转矩值。最后一个假设相当于电机转子表面是无槽的光滑圆柱体，而转子导体在气隙当中，安装在转子表面。在这种假设的情况下，表达式 $F=LIB$ 更为明显。

㊀ 磁场产生的力作用在表面分隔不同的区域。这些力通过引入等效压力的概念 $p(\mathrm{N/m^2})$ 来描述。s 表面的力为 $F=ps$。磁场在第一区域靠近边界处的能量密度为$\omega_1=\mu_1 H_1{}^2/2$。跨越边界，能量在第二区域的密度为$\omega_2=\mu_2 H_2{}^2/2$。等效压力为$\omega_1-\omega_2$。

第 18 章　同 步 电 机

接下来的章节我们将学习同步电机的运行、结构、数学模型和基本特性。像感应电机一样，同步电机也属于交流电机的一种，但是它们的运行原理不同。感应电机转子转速要略低于同步转速，因此叫作异步电机，而同步电机运行于同步转速。

感应电机和同步电机的定子旋转磁场都由定子中三相交流电流产生，感应电机和同步电机的定子磁路和定子绕组是相同的。在感应电机和同步电机中，定子三相电流产生了旋转磁动势和旋转磁场，旋转磁场的转速决定于定子电流角频率，也叫供电频率。同步电机和感应电机有不同的转子结构。在大多数感应电机中，转子绕组是由放置在转子槽中由铝做成的短路环构成。而同步电机的转子是由励磁绕组或者永磁体构成。由励磁绕组构成的同步电机转子励磁电源为直流电源，进而产生转子磁动势和转子磁通。除了励磁绕组外，同步电机的转子也可能由嵌入磁路中的永磁体构成，在这种情况下转子没有任何绕组。

感应电机的运行原理已经在第 14 章节中介绍过了。一台感应电机的转子绕组是短路的。感应电机的转子转速低于定子旋转磁场的转速，因此转子绕组中就感应出了电动势。进而产生感应电流。转子感应电流和励磁磁场的相互作用就产生了电磁转矩，与转差成正比。转矩的产生要求转子转速略低于励磁磁场的转速，以至于旋转的励磁磁场转速高出转子旋转速度的部分叫做转差。为了改变转子磁通，产生电磁磁动势和转子电流，一定数量的转差是必要的。在第 14 章已经说过，感应电机的电磁转矩依赖于转子电流的角频率，这种角频率取决于转子落后于旋转磁场的转速。在额定运行情况下，感应电机的转子并不是和励磁场同步旋转，因此感应电机也叫异步电机。

同步电机的转子或者由电励磁绕组组成或者由永磁体构成。转子磁通的位置唯一地由转子所在的位置来确定。在额定运行情况下，转子和定子磁场同步速运行。电磁转矩正比于定子和转子磁场夹角。这种转子转速和定子磁场转速同步运行的电机叫做同步电机。

这一章将介绍和阐述同步电机基本的运行原理。我们将讨论转子由励磁绕组和永磁体励磁时转矩产生的机制。同步电机的定子构造和定子磁路和异步电机的极为相似。因此将简单描述下定子绕组产生的旋转磁场。转子部分将详细阐述。接下来我们要介绍向转子励磁绕组提供直流电流的方法，以及电刷、集电环和触发电路。这章我们来学习永磁材料的一些重要特性。将阐述把永磁体插入转子励磁回路两种不同方式和研究表贴式和烧结式同步电机的电磁特性。特别地，我们将讨论表贴式和烧结式同步电机定子绕组自感的不同。

18.1　运行原理

像感应电机一样，同步电机定子绕组中有交流电流流通。定子电流产生以同步速度

$\Omega_e=\omega_e/p$ 旋转的磁动势 $\boldsymbol{F}_s$。同步速度取决于定子电流旋转的角频率 ω_e 和定子绕组极对数 p，定子磁动势产生定子磁通 $\boldsymbol{\Phi}_s=\boldsymbol{F}_s/R\mu$。磁通 $\boldsymbol{\Phi}_s$ 和磁动势都以同步速度 Ω_e 旋转。同步电机的转子由永磁体或者是直流电供电的励磁绕组构成。在这两种情况下转子磁通 $\boldsymbol{\Phi}_s$ 的大小和位置由转子所在的位置决定。磁通矢量 $\boldsymbol{\Phi}_R$ 以转子速度 Ω_m 旋转。由于 $\Omega_e=\Omega_m$，定子磁通矢量和转子磁通矢量的转速相同，它们的相对位置不会改变。电磁转矩的大小正比于这两个矢量的幅值和这两个矢量夹角的正弦值。由于这两个矢量场的幅值和相对位置夹角不会随着时间而变化，因此产生的电磁转矩是不会变化的。同步电机的正常运行和同步转矩的产生要求定子磁场和转子励磁磁场的旋转速度都以同步速度旋转。

18.2　定子绕组

同步电机的定子和一台感应电机的定子基本是一样的。在定子端，三相独立的定子电流回路称为定子相绕组。每一相是由串联在一起的一定数量匝数的线圈构成。关联的导体分布在电机的圆周部分，而且嵌入到相应的槽中。定子槽镶刻在面向气隙的定子磁路中。沿着电机定子圆周分布的导体是准正弦分布的。对实现导体电流密度沿着圆周正弦变化是一个尝试。不能通过一定数量的槽来实现理想的正弦波分布。导体不能随意地放置，它们必须一对一地放置在这些槽中。因此对放置定子导体的不连续槽数有一定的限制。正是因为这个原因，对沿着定子圆周放置正弦分布的导体不能全部实现。然而，绕组的绕制尽量接近正弦分布。三相绕组中的每一相都有两个端口。每相绕组的一端接在提供定子绕组的三相电源上。同步发电机的定子末端接在三相负载。剩余的三相绕组末端接在一起形成三相绕组的中性点。这种连接三相绕组的方式称为星形接法。由于三相电流某一时刻的瞬时值加起来为 0，因此没必要再从星形点引出一根线连接到电源上。大多数电机[㊀]的星形点不和电源相连。但是在一些情况下，定子三相绕组连接成三角形。这种连接方式叫做三角形连接。这种连接没有中性点。

每相绕组都产生磁动势，这种磁动势取决于每相绕组的匝数和相绕组的电流。每相绕组中流过的交流电产生变化的磁动势。电流定子绕组的每一相电流 i_a，i_b，i_c 产生相应的磁动势 $\boldsymbol{F}_a$，$\boldsymbol{F}_b$，$\boldsymbol{F}_c$。相对应的每相磁动势的位置坐落在每相绕组的轴线上。在一个两极绕组系统中，每相磁动势相差 120°定子总的磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 是这三相磁动势 $\boldsymbol{F}_a$，$\boldsymbol{F}_b$，$\boldsymbol{F}_c$ 的矢量叠加。

㊀ 由线电压 $U<1\text{kV}$ 的电网供电的电机也被称为低电压电机。大部分低电压电机为星形连接。三相的星形连接不连接到其他任何的节点。大多数情况下，星点不外接，也就是说，用户使用不到。定子电压超过 1kV 的电机可能会将星点连接到中性点，或者通过一个串联阻抗接地。这种连接降低了过电压。大多数情况下，用来星点接地的阻抗对关系式 $i_a+i_b+i_c=0$ 的影响很小。

18.3　旋转磁场

磁动势 $\boldsymbol{F}_a$，$\boldsymbol{F}_b$，$\boldsymbol{F}_c$ 和定子绕组每相轴线空间互差 120°/p，这里 p 是定子磁场的极对数。定子绕组可以通过排列产生多余两极的磁场。一个四极磁场的定子绕组在 17 章已经详细阐述过了。

流过交流电的两极定子绕组可以产生旋转的两极磁场。由相同的每相电流幅值和相同的角频率，空间互差 120 电角度构成的每相绕组产生以 $\Omega_e=\omega_e/p=\omega_e$，也就是同步速度旋转的两相定子磁场。如果定子绕组产生的磁场极对数 $p>1$，定子场旋转速度为 $\Omega_e=\omega_e/p$。

由相同幅值，相同角频率，而且空间互差 120 电角度的每相电流，产生的每相磁动势如图 18.1 所示。每相绕组匝数为 N_s：

$$F_a=N_sI_m\cos\omega_{et}$$
$$F_b=N_sI_m\cos\left(\omega_{et}-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$F_c=N_sI_m\cos\left(\omega_{et}-\frac{4\pi}{3}\right) \tag{18.1}$$

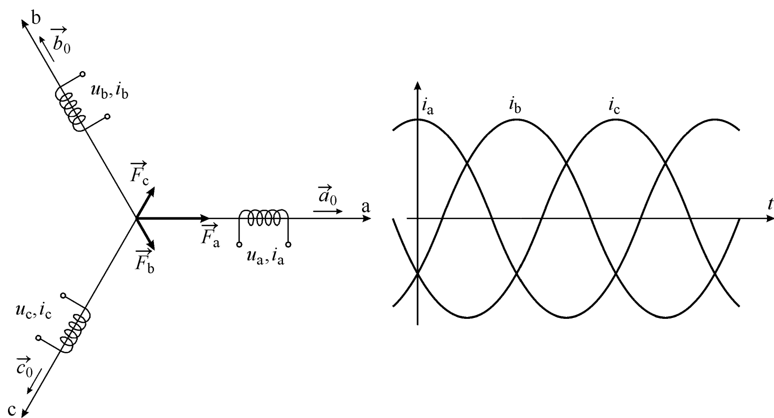


图 18.1　同步电机三相定子绕组

通过将三相磁动势相加，我们可以得到三相总合成的磁动势 $\boldsymbol{F}_s$，$\boldsymbol{F}_s$ 以同步速度旋转，在第 15 章中已经介绍过三相定子绕组的合成磁动势的方向和幅值。考虑式（18.1）励磁场以 $\Omega_e=\omega_e/p$ 速度旋转，保持幅值不变。

定子电流的初始相位决定了三相合成磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 的初始位置。稳态情况下同步电机三相合成磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 和转子同步旋转。转矩的大小取决于转子磁场和合成磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 之间夹角的正弦值。当定子磁场 $\boldsymbol{F}_s/R_\mu$ 和转子磁场同步旋转时，同步电机产生了恒定的电磁转矩和电磁功率。

每相绕组的磁动势矢量位于每相绕组的轴线上。两极定子绕组每相绕组空间互差120°。磁动势 $\boldsymbol{F}_a$，$\boldsymbol{F}_b$，$\boldsymbol{F}_c$ 取决于每相电流 i_a，i_b，i_c 和每相匝数 N_s，总的磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 是三相磁动势 $\boldsymbol{F}_a$，$\boldsymbol{F}_b$，$\boldsymbol{F}_c$ 三者的矢量和。磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 和磁阻 R_μ 可以获得定子磁通 $\boldsymbol{\Phi}_s$，磁通 $\boldsymbol{\Phi}$ 表示定子绕组单匝磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 对面积的积分。定子磁通 Φ_s 是矢量 $\boldsymbol{F}_a/R_\mu$，$\boldsymbol{F}_b/R_\mu$，$\boldsymbol{F}_c/R_\mu$ 三者叠加的结果，如图 18.2 所示。

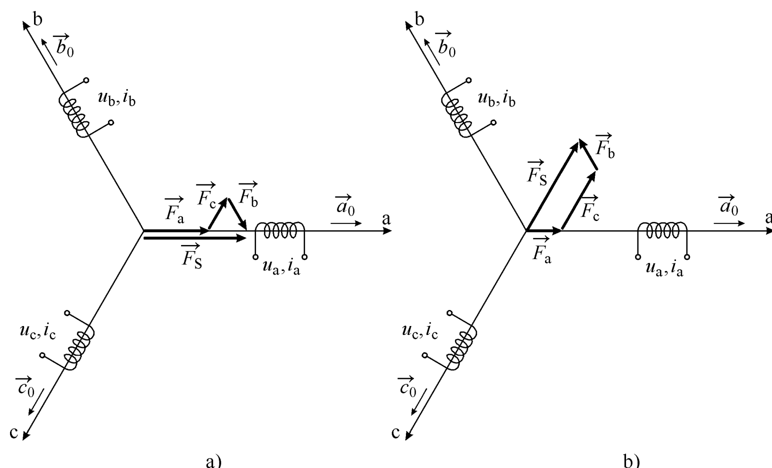


图 18.2　定子磁动势的空间定位

绕组磁链 $\boldsymbol{\Psi}$ 表示绕组所有匝数的磁通。取决于绕组的匝数 N，在集中绕组的情况下，所有的导体放置在两个径向槽中，这时候绕组的磁链 $\boldsymbol{\Psi}$ 就等于单匝绕组的磁通乘以绕组线圈的匝数，$\Psi = N\Phi$。

大多数情况下定子导体沿着圆周是按照准正弦分布的。因此并不是每相绕组所有匝数都有相同的位置和相同的磁通。单匝线圈的磁通取决于线圈的位置，表示成 $\boldsymbol{\Phi}_s(\theta)$，$\theta$ 代表了每匝线圈的位置角，绕组的磁通不能用每匝线圈的磁通乘以匝数直接获得，而必须像引言部分说的那样要通过叠加手段获得。对于有 N_s 匝，每匝最大磁通等于 $\boldsymbol{\Phi}_m$ 的正弦分布的导体而言，合成磁链为 $\Psi(\pi/4)N_s\boldsymbol{\Phi}_m$。

定子磁通以 Ω_e 速度旋转，这取决于产生磁场的电流的角频率。一部分的定子磁通铰链定子导体，但是不穿过气隙到达转子磁路部分。这部分磁通叫做漏磁通。跟感应电机的漏磁通非常相似。剩余部分的磁通穿过气隙和转子磁路形成一个完整的闭合回路部分叫做互磁通或者气隙磁通，和转子提供的磁通一起构成了电机气隙的全部磁通。

定子和转子磁通矢量相互作用产生电磁转矩。同步电机的转子可能由永磁体构成，也可能由放置在转子上的励磁绕组构成。转子绕组中的直流电源产生了转子磁动势和转子磁通。

定子绕组磁通包括三相系统，表示为式（18.2）。这里 R_μ 是磁阻，N_s 为每相的匝数。定子磁通矢量表示为 $\boldsymbol{\Psi}_s = \boldsymbol{F}_s/R_\mu$。单相绕组的磁链表示为 Ψ_a，Ψ_b，Ψ_c。它们决定

于 $\boldsymbol{\Psi}_s$ 的幅值和与每相绕组轴线的相对位置，如图 18.3 所示。

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Psi}}_S = N_S \frac{\overrightarrow{F}_S}{R_\mu} \tag{18.2}$$

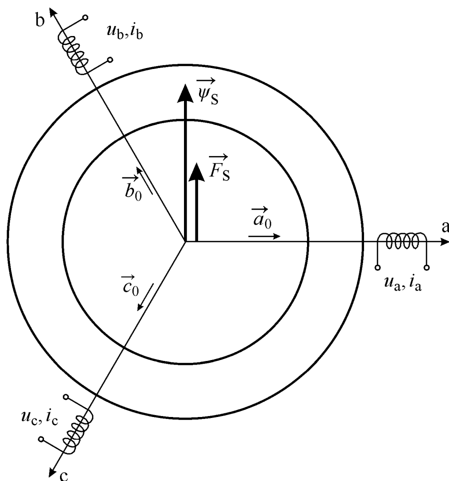


图 18.3　定子磁动势和磁通的空间矢量

18.4　转矩的产生

由嵌入在转子中的永磁体形成的磁场随转子一起转动，同样地由转子励磁绕组形成的转子磁动势和磁场也随转子一起转动。因此转子磁通矢量的位置和转子所在的位置一样。同时定子电流产生的合成磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 和定子磁通 $\boldsymbol{\Phi}_s$。对定子和转子磁通矢量来说，相应的励磁磁极就是磁力线进出硅钢片的区域。对定子磁通来说，相应的励磁磁极是通过定子电流产生旋转合成磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 的指向来确定的，转子磁通的励磁磁极是通过转子所在的位置来确定的（见图 5.3）。感应电动势趋向于将定子和转子的磁极慢慢拉近。当定子场的北极领先而且一直超前磁场南极时，就产生恒定的转矩增加转子的转速。考虑如图 18.4 所示的向量，转矩倾向于将转子磁通 $\boldsymbol{\Psi}_R$ 向矢量 $\boldsymbol{F}_s$ 拉近。因此转矩可以表述为：

$$T_{em} = k_t \boldsymbol{\Psi}_R \times F_S$$

产生连续的电磁转矩，实现电磁和机械能量的转换必须满足定子和转子矢量夹角保持不变。转子和定子磁场都以同步速度 Ω_e 旋转可以说明这种情况。

用匝数 N_s 除以 $\boldsymbol{F}_s$，我们可以获得定子电流的幅值。深入来看 $\boldsymbol{F}_s/\boldsymbol{N}_R$ 为定子电流矢量。转矩可被表述为转子磁通 $\boldsymbol{\Phi}_R$ 和定子电流的结果：

$$T_{em} = k_t N_S \boldsymbol{\Phi}_R \times i_s = k_t N_s |\boldsymbol{\Phi}_R||\boldsymbol{i}_s| \sin(\xi)$$

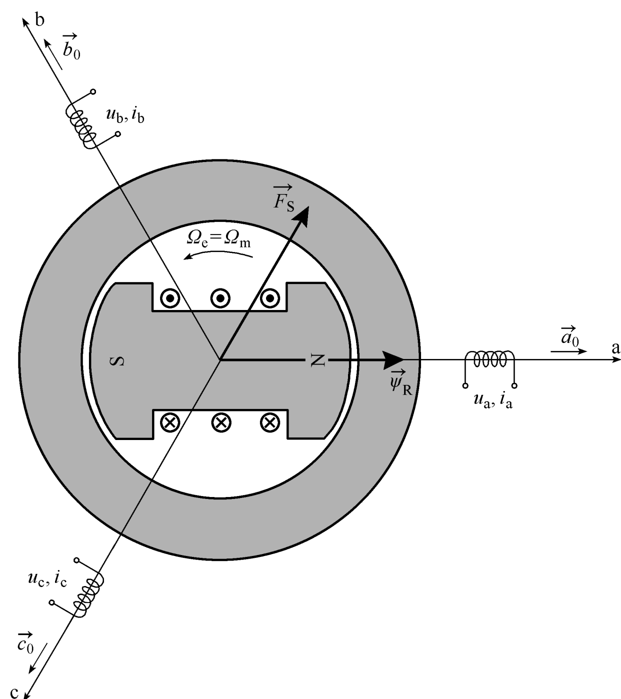


图 18.4 转子磁通矢量和定子磁动势的相对位置

其中，ξ 表示转子磁通和定子电流矢量之间的角度；$|i_s|$为定子电流的幅值。

对于给定的转子磁通，产生需要的转矩可以通过（$|i_s|$和 ξ）不同搭配来实现，当 $\sin(\xi)$ 越大，产生期望的转矩所需的定子电流就越小。如果相关的矢量互相垂直，定子电流达到最小值。当 $\theta = \pm\pi/2$ 时，$|i_s|$达到最小，相应的定子铜耗达到最小。对于给定幅值的$|i_s|$，当 $\theta = \pm\pi/2$ 时，可能产生最大的电磁转矩，换句话说最大化了转矩电流比值 $T_{em}/|i_s|$。

为了获得最大的转矩电流比，有必要首先确定 i_a、i_b、i_c，为了使得合成磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 垂直于转子磁通。因此不管转子转速和位置如何，矢量 $\boldsymbol{F}_s$ 固定在超过转子磁通 90°电角度的位置。在这种情况下电磁转矩的大小取决于定子电流的大小 $T_{em} = k_t N_s |\boldsymbol{\Phi}_R||\boldsymbol{i}_s|$。当矢量 $\boldsymbol{F}_s$ 落后于转子磁通 90°电角度时候，就产生了负转矩。在运动控制系统中这种方法常常被用来控制永磁同步电机的转矩。这种同步电机叫做同步伺服电机，这种电机的特点是低转动惯量和高比例的最大转矩和额定转矩。在运动控制系统的应用中，每台伺服电机三相都通过逆变装置产生规定转矩的供电电流。通过 PWM 调制，定子电压能产生期望的相电流 i_a，i_b，i_c，有电流调节器和带有脉宽调制的三相逆变装置称为 CRPWM 装置。

问题 18.1：考虑这样的两台感应电机：转子两端都短接成鼠笼状，定转子磁路有

相同的参数。一个是两极电机，一个是四极电机。两台电机的转子来自于它们的定子，用第一台电机的定子插入另外一台电机的转子，有可能会产生转矩吗？

解答（18.1）：转矩的产生来源于定转子磁路的相互作用。为了获得电磁转矩，定转子必须有相同极数的磁极，一台感应电机的定子磁场产生于定子绕组电流建立的磁动势，第一台电机产生两极磁场，然而第二台电机产生四极磁场。后者有两个北极和两个南极磁场。转子磁场的产生依赖于转子导体中感应出的电流。电流的产生是因为鼠笼转子中感应出了电动势。电动势的产生依赖于气隙磁场和转差率，转子电动势和电流幅值和方向的变化反映出了气隙磁密的变化。因此转子磁极数目和定子磁极数目是一样的。因此两极定子场产生两极转子场，四极定子场就产生四极转子场。因此结合第一台电机的定子和第二台电机的转子产生的电机可以像正常电机一样运转，因此可以产生电磁转矩。

问题（18.2）；考虑两个同步电机，每台同步电机的转子都由永磁体构成。它们定子和转子都有相同的参数。第一台电机为两极电机，第二台电机为四极电机。将第二台电机的转子插入第一台电机的定子做转子用。那么新电机能产生转矩吗？

解答（18.2）：不像是感应电机一样，同步电机的转子由永磁体励磁和励磁绕组励磁两种励磁情况。永磁体励磁时，磁极数目取决于转子永磁体的磁极数目。励磁绕组励磁时，转子绕组中的电流不是从定子磁场中感应的，而是通过直流电源供电。励磁绕组的绕制决定了转子的磁极数目，因此不管是永磁体励磁还是励磁绕组励磁，转子磁极数目取决于转子。换句话说，转子磁极数目不依赖于定子磁极数目。同步电机要想产生稳定的电磁转矩和电磁功率必须满足定子和转子磁极数目相同。因此两极定子和四极转子不能产生任何电磁转矩。

18.5　同步电机的结构

同步电机是由三相绕组构成的定子和由永磁体或者励磁绕组构成的转子所组成。定子三相绕组接在对称的三相电压或者电流系统。定子电流在气隙中产生旋转的气隙磁场。正常运转情况下，定子场的旋转速度和转子转动速度相等。电磁转矩来源于两个场的相互作用。同步电机一般做成圆柱状。也有直线同步电机，它们主要用来拖动而不是旋转。大多数同步电机都是圆柱形的。

18.6　定子磁路

圆柱式同步电机的定子是中空的，中空部分用来放置转子。同步电机的定子的主要部分是磁路和电路磁路主要是由铁磁材料构成，电流回路主要是由铜导体构成，如图 18.5 所示。

同步电机的定子和感应电机的定子一样，定子磁路中磁感应强度 B 的变化主要是因为定子铁心中磁场的旋转。磁感应强度 B 以定子电流的角频率 ω_e 旋转，磁感应强度

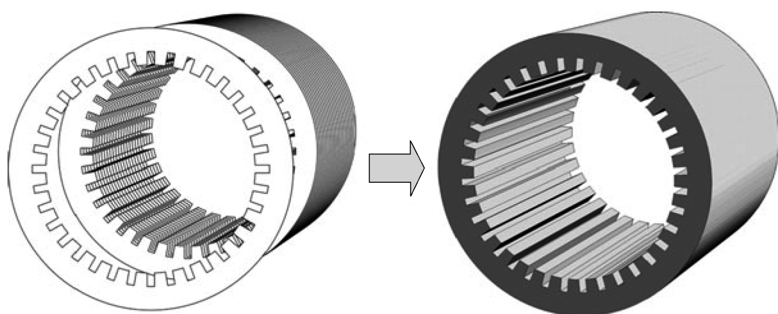


图 18.5　叠压硅钢片组成的定子磁路

B 的变化产生了铁磁材料中的磁滞和涡流损耗。涡流损耗正比于磁感应强度变化频率的平方，磁滞损耗正比于磁感应强度变化的频率。定子磁路中的磁感应强以频率 50Hz 或者 60Hz 脉动。为了减少损耗，定子由相互绝缘的叠片硅钢片构成。

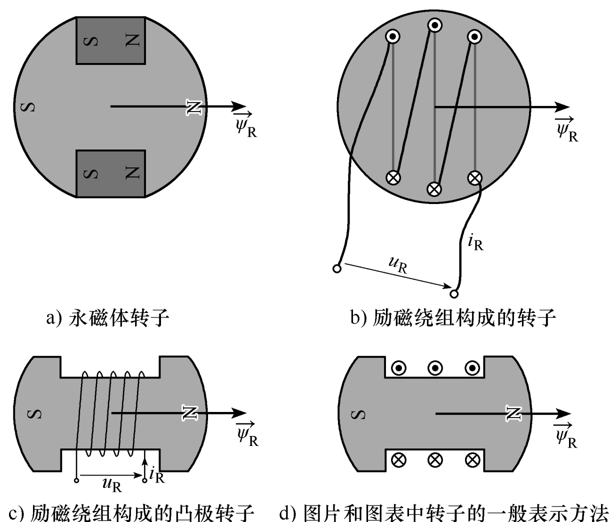
硅钢片是由锰和其他一些元素组合的合金构成。由叠片硅钢片组成的定子不能减少磁滞损耗，但是可以减少涡流损耗和由磁场脉动引起的铁耗。由于定子磁场的旋转，磁感应强度的方向也会随着时间而变化。因为这个原因，对定子硅钢片来说各向同性就显得非常重要。因此这些硅钢片都是热轧硅钢片。对功率转换来说，在相同的路径磁场的方向相同。因此提高磁通路线上的磁路特性就显得非常重要。与磁通路线相垂直方向的磁路特性就不太重要了。因此为了最大程度减少磁路的磁阻，最好用各向异性㊀材料。有这种特性的硅钢片是通过冷轧手段完成的。冷轧硅钢片减少了功率转换中磁通路线上的磁阻。

通过叠压硅钢片，我们可获得面向气隙、定子槽位于内层边的圆柱形定子。槽是用来放置导体的。槽与槽之间的定子磁路部分叫做定子齿。磁通沿着高磁导率和低磁阻率的定子齿的走向进入气隙，磁通不进入磁导率为 μ_0、磁阻很高的定子槽中，因此定子齿中的磁感应强度要比其他部位的要高，容易增加齿部铁耗。

18.7　转子的结构

由嵌入在转子中的永磁体构成的同步电机如图 18.6a 所示。永磁体可以在没有励磁绕组的情况下提供转子磁通。永磁体的 $B(H)$ 曲线剩磁较高，没有转子绕组就没有转子磁动势 $F=NI$，除了永磁体没有没有其他方式产生和控制转子磁通，通过将永磁体插入转子回路中就可以以一种低损耗形式获得转子磁通，就没有必要单独构造转子绕组。这种构造电机的形式就可以降低损耗，提高效率。这种方法的缺点就是一经制造就不能

㊀ 各向异性——不同的方向有不同的特性。各向异性铁磁体在 x、y 和 z 方向上有不同的磁导率。



a) 永磁体转子　b) 励磁绕组构成的转子

c) 励磁绕组构成的凸极转子　d) 图片和图表中转子的一般表示方法

图　18.6

改变转子磁通的大小。因为不能改变转子磁通，要想降低永磁同步电机的磁场运行就显得不太可能。

图 18.6b 显示的是由励磁磁场构成的转子。这种励磁磁场是由 N_R 匝励磁线圈携带直流 i_R 电流构成的。励磁磁场的磁动势 $F_R = N_R * I_R$，决定了励磁磁通 $\Phi_R = F_R/R_\mu$ 和励磁绕组磁通 $\Psi_R = N_R\Phi_R = (N_R^2/R_u)\,i_R = L_R i_R$，有一小部分的转子磁通环绕励磁绕组，但是不能穿过气隙到达气隙磁场和定子绕组。这种磁通称为励磁绕组的漏磁通。励磁绕组磁通的主要部分环绕转子和定子绕组；这部分磁通称为互磁通 Φ_m，它是实现能量传递和产生电磁转矩的基础条件。

转子励磁绕组的铁心可能有图 18.6c 所示的显极形式。显极转子在沿着转子磁通方向上有较小的气隙和较低的转子磁阻。在垂直于转子磁通方向上的气隙比较大，因此磁阻也相对较大。

经常应用的代替转子的图标如图 18.6d 所示，虽然它表示为显极形式，它也用来作为圆柱形转子的简化替代图标，如图 18.6b 所示的圆柱形转子沿着圆周部分有相同的气隙和磁阻。

电励磁转子绕组比永磁体励磁的一个优点就是电励磁绕组的磁通可以随着励磁电流 i_R 而发生变化。这种励磁方式的缺点是增加了损耗和使电机的制造更为麻烦，因为需要向缠绕在转子上励磁绕组供给直流电 i_R 励磁，励磁绕组的接线端必须引出接到外部的直流电源。直流电源放置在定子端，不会随着转子转动，而放置在转子端的励磁绕组随着转子一起转动，这就带来了如何将励磁电流引入励磁绕组的问题。

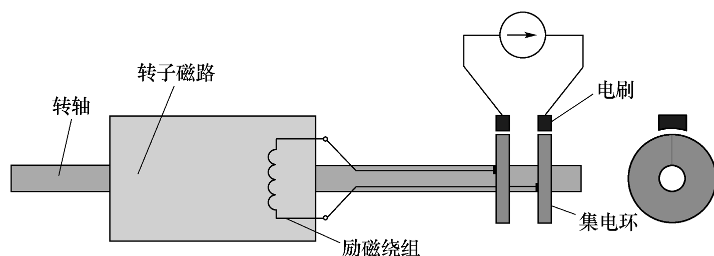


图 18.7　由集电环和电刷传递的励磁电流系统

18.8　励磁绕组的供电

向励磁绕组供电可以通过将集电环固定在转轴上的方式完成。励磁绕组的两个接线端可以连接在集电环上。这两个接线端都和转子互相绝缘。两个导电的电刷固定在定子上，通过这种方式电流就可以流进励磁绕组。当转子运动时，电刷与集电环相接触，接入直流电的电刷就可以将电流通过集电环送入励磁绕组中。不管转子是静止还是处在运行状态，这种方式都可以正常运行。通过改变励磁电压，就可以改变流入励磁绕组中的电流以达到我们期望的运行模式。

大型汽轮发电机和水轮发电机都是通过转子励磁绕组运行的。为了获得期望的端电压，励磁绕组中的电流是可以调节的，定子电动势决定了电压的大小。同时电动势正比于转子磁通，因此同步发电机的输出电压的大小是可以通过改变转子励磁电流的大小来调节的。为了补偿供电电路中电压降，可调节的电压是必须的。随着用户端电功率的消耗增加，定子电流和负载也同时增大。电流的增加同时也增大了传输电路的电压降，为了保持用户端电压的恒定，必须增加同步发电机的端部电压，因此必须增加同步发电机的励磁电流。

带集电环的励磁系统的一个缺点就是励磁电流必须通过电刷和集电环的接触才能输入到励磁绕组中，转子的运动导致了集电环和电刷之间的相互摩擦。如果出现不良接触，电刷和集电环容易产生电弧，可能烧毁电刷或者集电环，导致电机的维修和保养，除此之外集电环的出现增加了电机的轴向长度。

18.9　旋转变压器励磁

通过旋转变压器，励磁功率转移到转子励磁绕组上不需要通过机械接触就可以传递。图 18.8 描述了这种传递原理。旋转变压器的励磁绕组放在定子边，传送部分放置在定子边，不随转子一起转动。旋转变压器的磁路部分是个圆形沿着圆周部分，定子槽位于内层边，主绕组放在槽中，另外一部分磁路放置在转轴上，随着转轴一起转动，它

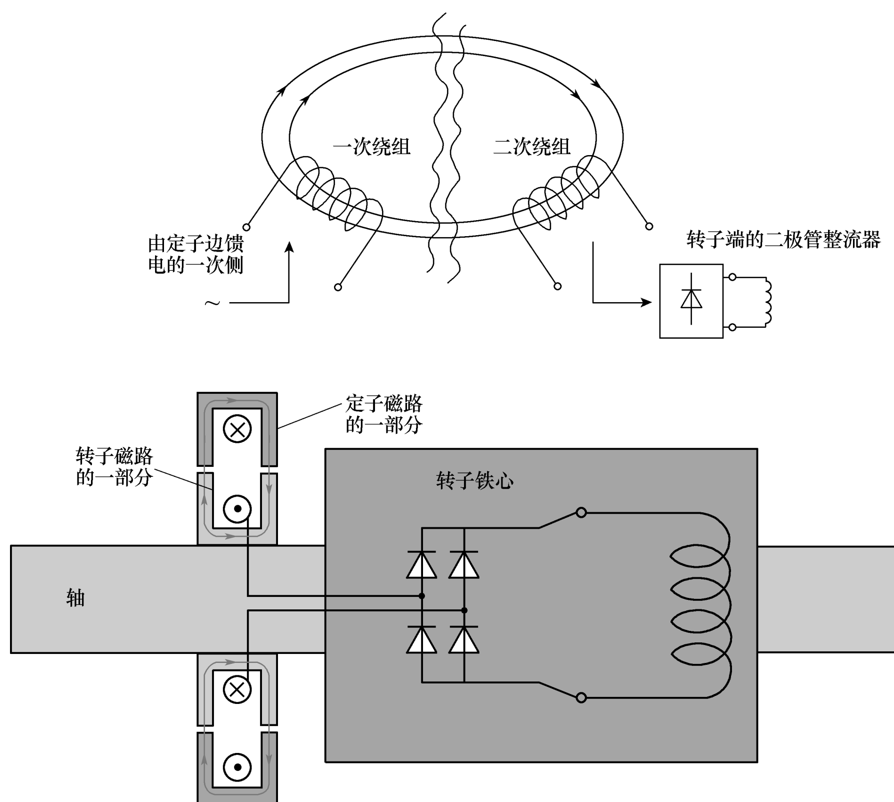


图 18. 8　非接触式旋转变压器励磁系统

的形状为比定子直径较小的圆环形，为了与定子磁路相适应，槽位于转子的外层边，用于放置二次绕组，一次绕组和二次绕组互相相切，也就是说他们都环绕转轴放置在相应的槽中。铰链一次绕组和二次绕组的磁通将能量从主绕组传递到二次绕组，磁通的磁力线如图 18. 8 所示。

旋转变压器的一次绕组通过交流电源供电，供电频率从几百 Hz 到数千 Hz，由于一次绕组和二次绕组磁路的耦合，交流电流从一次绕组传递到二次绕组。通过这种方式二次绕组像转子励磁绕组提供交流励磁。为了向转子励磁绕组提供直流电，转子上有一个整流装置。整流桥电路将交流电变成直流电输入到转子励磁绕组中，励磁绕组的电流可以通过改变一次绕组的交流电流来实现，这种励磁系统可以实现无机械摩擦地给转子励磁绕组励磁。提高了系统的可靠性，降低了维护费用。一旦使用旋转变压器和带有整流电路的转子，转子的温度必须限制在 125 ~ 150 度，以减少对二极管的损伤。

18.10 永磁体励磁

将永磁体插入转子励磁回路，同步电机可以在转子没有励磁绕组和转子电流的情况下获得转子磁通。很少情况下转子会全部做成永磁体转子，大多数情况下转子的一部分是由永磁体组成，另一部分是由导磁材料构成，比如硅钢片。磁体的重量是事先确定好的以为转子的正常运行产生充足的磁通。转子硅钢部分已经预先为插入永磁体留好空间（见图 18.9）。

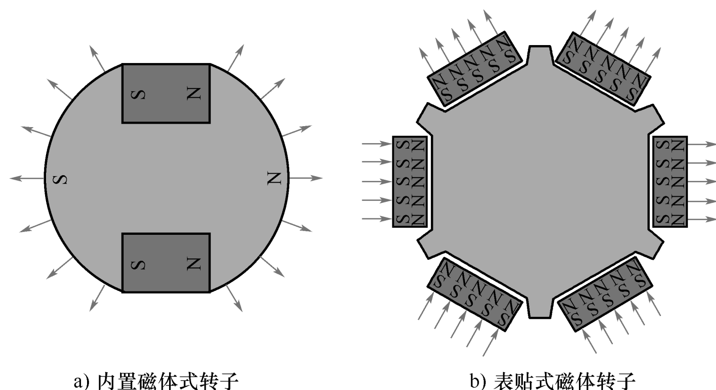


图　18.9

同步电机的正常运行过程中，转子和定子保持同步旋转。因此转子磁路中没有感应电流和铁心损失。转子磁路中没有转子绕组，没有转子铁心损耗㊀，转子中就没有热量产生。因此就没必要安装散热装置。在转子不用安装散热装置的情况下，更容易对同步电机定子绕组和定子磁路散热。因此可以适当增加同步电机的电流和磁通密度。因为更高的电流密度和磁通密度，同步电机要比相同体积的感应电机产生更多的电磁转矩和电磁功率。同样地，对于给定的电磁转矩和电磁功率，同步电机的尺寸和重量要比感应电机的要小一些。因此永磁同步电机的比转矩㊁和功率密度要比感应电机的大。

永磁同步电机的缺点就是不能更改转子磁通。因此永磁同步电机不能很好地运行在弱磁状态下。永磁同步电机可以制成表面永磁体电机和内置式永磁体电机。插入永磁体的方式对电机的参数和运行特性有着重要的影响。很大程度上影响定子电感 L_s。绕组电感反比于定子磁阻，定子磁阻受插入磁极的方式影响很大。内置磁极式永磁同步电机的

㊀ 在由三相脉宽调制逆变器供电的同步电机中，有纹波电流，含有幅值为 0.02…0.03I_n 和频率等于功率器件的开关频率的高频分量。由于非正弦供电，尽管基波成分与转子同步旋转，转子回路中的感生磁场中还是存在少量高频成分。

㊁ 比转矩是 T_{em}/m 的比值，是转矩和电机质量的商。另外，比转矩也可定义为 T_{em}/V，转矩和体积的商。

励磁电阻相对较小。绕组电感的标幺值在 0.1 和 0.5 之间变化。表贴式磁极的励磁电感的标幺值在 0.01 和 0.1 之间变化。

永磁同步电机没有转子损失，它们的效率要比其他电机的效率要高一些。和感应电机相比，永磁同步电机没有转差功率损失，转子以同步速度旋转，转差率为 0。转差功率的消失很大程度上对电机效率的提高有着重要的意义。

问题 18.3：一台两极感应电机以额定转速 2850r/min 运行的效率为 90%，相对于铜耗来说铁耗较小，如果一台永磁同步电机以相同的额定转速，相同的电流电压和电磁功率，估计这台电机的效率如何。

回答 18.3：依据问题的假设，两台电机的铁损耗都可以忽略不计，机械损耗都是比较小的可以忽略不计。因此只要考虑铜耗即可。同步电机只需要考虑定子铜耗就可以。相对于同步电机，感应电机的转子损耗即为转差功率，感应电机的定转子电流的幅值接近，定转子槽的截面积也是比较相近的，因此可以认为感应电机的定转子铜耗是可以相比的。转子损失接近额定功率的（3000 ~ 2850）/3000 = 5%，粗略估计同步电机的定子损失为额定功率的 5%，因此同步电机的效率接近 95%。

18.11　永磁体材料特性

永磁材料的励磁特性如图 18.10 所示。横轴代表了外部场强 H。大多数情况下，外部场强是由线圈或者绕组的电流产生的。剩磁 B_R 表示在没有外部场强（$H=0$）的情况下的磁感应密度，它的大小可能超过 1T，更小的剩磁可能达到 0.3T，比如铁氧体材料。大多数铁磁材料比如说硅钢都有很小程度的剩磁电感，在去掉外部场强后都有保持原来磁场方向的趋势（见图 18.11）。一定数量的剩磁存在硅钢片中，这些硅钢片是用来构成电机磁路的主要材料。这些剩磁的大小小于 $B_R<50\mathrm{mT}$，在外部反向磁场的作用下，它们磁感应强度有可能减小到 0。

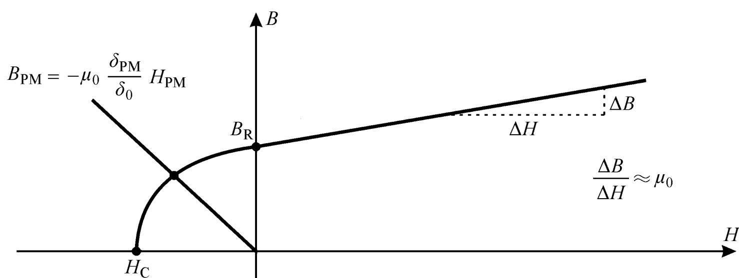


图 18.10　永磁体的励磁特性曲线

永磁体的磁场感应密度 B 和外部场强 H 的关系曲线如图 18.10 所示。如果施加一外部场强 $H(H>-H_c/2)$，方向与剩磁方向相反，那么运行点由（0，B_R）向左移动，导

致磁感应密度的减小。一旦去掉去磁磁场 H，那么运行点自然回归到（0，B_R）。

一旦外部场强 H 达到矫顽力 $-H_c$，磁感应密度值为0，这可能对永磁体产生永久的损伤。也就是说从（$-H_c$，0）这个点开始移去外部场强 $-H_c$，运行点不能自然回归到（0，B_R），而是回到剩磁更低的点（0，B_{R1}），$B_{R1} < B_R$。在这种情况下原来的剩磁感应曲线不能恢复，对永磁体的损伤是不可逆转的。将外部去磁场强 H 去掉之后，对永磁体的损伤程度是可以作出评估的。

大多数永磁材料 $B-H$ 曲线在第二象限有一个拐弯的点叫做拐点。在这个拐点处 $H<0$，磁感应密度迅速减小。在拐点处场强 H 接近 $-H_c/2$，大多数情况下，当操作点经过拐点然后继续向左移动直至 $H< -H_c/2$ 处时，永磁体会发生永久性损伤。

较大的剩余磁感应密度 B_R 对永磁同步电机的运行特性有积极的作用，因为转子磁通正比于剩磁 B_R，转矩正比于转子磁通。较大的矫顽力也是有利的，因为较大的矫顽力可能承受外部磁场的去磁作用。永磁体的材料特性是通过 B_RH_c 评价的。高能磁体有较大的剩磁和较大的矫顽力。它们可以在更大的外部去磁场的环境下正常运行而保持磁体的特性不变。这有助于暴露在外部去磁磁场，内嵌在转子回路中的永磁材料的运行。同步电机的定子电流产生相当程度的定子磁动势。这些磁动势在永磁体内部产生磁场。大多数情况下这些磁场的方向和永磁体磁感应密度的方向相反，产生去磁作用。因此我们应该选取磁能积 B_RH_c 稍微大一些的永磁体。在同步伺服电机中，峰值转矩和峰值电流超过了它们的额定值，产生很大的去磁磁场，因此这种选择尤其重要。

在 B-H 曲线的第一象限中，所有磁体中双极子都和外部施加的场强方向保持一致。即使增加场强也没有不和外部磁场保持一致的磁偶极子存在。在这种情况下增加的 ΔB 约等于 $\mu_0 * \Delta H$，因此 $\Delta B/\Delta H$ 的值等于 μ_0。换句话说磁体在外部场强 ΔH 作用下增加的磁感应密度 ΔB 的比值等于空气中的磁导率。不管将磁体插入充满空气的空间还是将磁体从磁路中抽离出来，对外部磁动势来说磁体的磁阻是不会改变的。

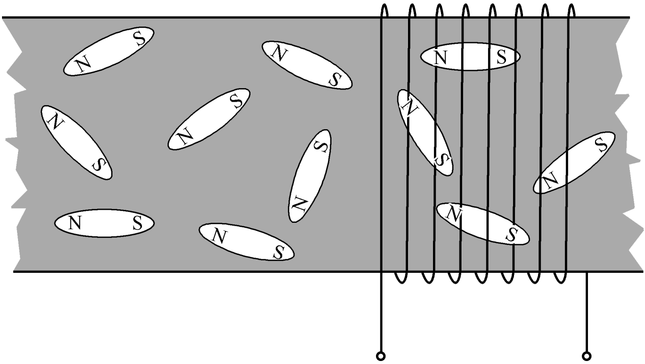


图 18.11　从磁偶极子的角度来看的铁磁材料

18.12　永磁体的磁路

分析永磁体的磁路是很有必要的事情。如图 18.12 所示，研究永磁体各个磁路的 B、H 关系。在这个磁路中永磁体的长度 δ_{PM}，空气隙的长度 δ_0，铁心磁路的磁导率非常大，因此铁心中的磁场强度 H_{Fe} 可以忽略不计。

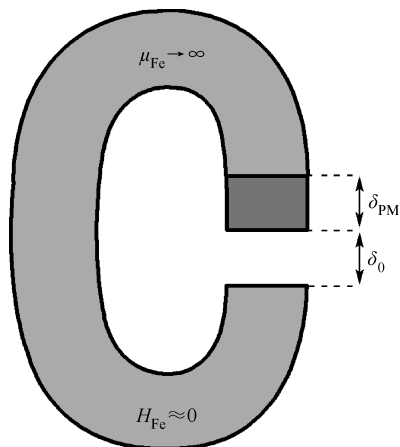


图 18.12　由永磁体和气隙组成的磁路

考虑没有励磁绕组的结构：这样的话 $N_i = H_{PM}\delta_{PM} + H_0\delta_0 = 0$。磁路中的各个部分都有相同的截面积 S。根据磁通连续性法则，$\Phi_{PM} = \Phi_0 = \Phi_{Fe}$，因此 $B_{PM} = B_0 = B_{Fe}$。因此 $H_0 = B_0/\mu_0 = B_{PM}/\mu_0$。因此 B_{PM} 与 H_{PM} 的关系为：$B_{PM} = -\mu_0(\delta_{PM}/\delta_0)H_{PM}$。永磁体非线性 $B(H)$ 曲线与该曲线 $B_{PM} = -\mu_0(\delta_{PM}/\delta_0) * H_{PM}$ 的交点即为永磁体工作点。在 B-H 曲线上，交点位于第二象限，磁感应强度为正值，但是磁场强度为负值。

如果磁路不包括任何气隙，那么永磁体内部的场强 $H_{PM} = B_{PM}(\delta_0/\delta_{PM})/\mu_0 = 0$，那么磁感应密度就等于剩磁 B_R 的大小。通过增加气隙的长度直线 $B_{PM} = -\mu_0(\delta_{PM}/\delta_0)H_{PM}$ 的斜率减小。那么交点的磁感应密度会慢慢减小，磁场强度减为负值。如果磁路中有段气隙存在，那么磁感应密度 B_{PM} 和 H_{PM} 的方向是相反的。

18.13　表贴式和内埋式磁体

永磁体可以贴在转子表面也可以内埋在转子磁路中。表贴式永磁体如图 18.13 所示。磁力线由定子齿出发进入气隙 δ_0；继续进入厚度为 δ_{PM} 的永磁体中，然后进入转子磁路的铁心部分。磁力线然后穿过铁心，进入永磁体的反向磁极，穿过气隙进而到达定子齿部，这样就形成了一个完整的回路。

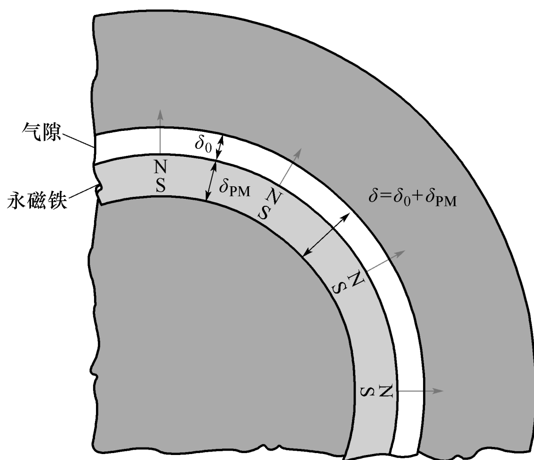


图 18.13 表贴式永磁体

定子绕组合成的磁链包括来自于永磁体的磁链 ψ_{mR} 和由定子电流引起的磁链 $L_s i_s$，后者正比于定子自感 L_s。定子自感 L_s 取决于磁通所经过路径遇到的磁阻 R_μ 的大小。铁心中的磁导率相当大（$\mu_{Fe} \sim \infty$），因此铁心中的磁场强度可以忽略不计。因此定子磁通磁阻由两部分构成，永磁体中的磁阻和气隙中的磁阻：

$$R_\mu = \frac{2\delta_0}{\mu_0 S} + \frac{2\delta_{PM}}{\mu_{PM} S} \tag{18.3}$$

在 B-H 曲线的第一象限，磁感应密度对磁场强度的微分就是永磁体材料的磁导率。$\mu_{PM} = \triangle B / \triangle H$，大约等于 μ_0。在定子磁动势存在的情况下，永磁体的厚度 δ_{PM} 就等同于一段附加的气隙宽度 δ_{PM}。因此等效的气隙宽度等于两者之和

$$\delta = \delta_0 + \delta_{PM} \tag{18.4}$$

δ_0 为电机实际的机械气隙，就是定子和转子之间的空气隙。如果纯粹为了励磁电感 L_s 的计算，那么永磁体可以用一端宽度为 δ_{PM} 的空气隙代替。永磁体的厚度为实际机械空气隙厚度的数倍。因此在表贴式永磁同步电机的定子磁通路线上的磁阻将更大。因此定子自感 L_s 非常低。

表贴式同步电机的定子电感为 1%，而内埋式同步电机这个比例上升为 10% ~70%。

较小的 L_s 降低了电机的电抗。同步电机常常通过三相晶闸管脉宽调制逆变装置供电，减少的定子电感 L_s 导致电流产生一个波纹 ΔI，在逆变装置供电的电机中，幅值为 E 的脉宽调制波以频率为 $f_{PWM} = 10 \sim 20\text{kHz}$ 在定子末端重复。它们掺杂在定子基波电流中来回振荡，形成电流的一个个波纹。电流的波峰值大小为 $\Delta I = ET/(4L_s)$。表贴式同步电机的电感 L_s 越低，那么这些波纹的大小就增加。为了在同步伺服电机中容纳这些波纹，有必要增加三相晶闸管逆变装置的调制频率并使 f_{PWM} 运行在 10kHz 以上。

除了将永磁体贴在转子表面，还可以将永磁体插入转子预先留好的槽中形成内置永

磁体转子（见图 18.14）。这些槽可以开在离转子表面较远接近转轴的位置。因此这些永磁体内埋在转子铁心中。在内埋永磁体转子中，定子齿通过气隙不直接面向永磁体。定子磁通从定子齿进入转子磁路的铁心部分定子电流产生的磁力线穿过气隙进入磁导率很高的转子磁路的铁心部分，因此等效气隙 $\delta = \delta_0 + \delta_{PM}$ 等于空气隙 δ_0 的大小，这要比表贴式永磁同步电机的等效气隙要小得多。因此定子沿着定子磁通路线上的磁阻要比表贴式的要小。但是定子电感 L_s 比较大。

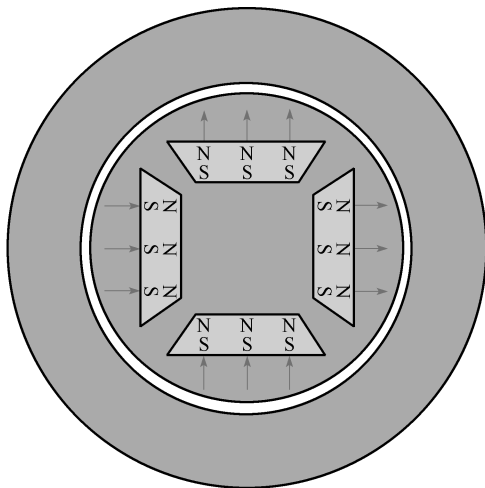


图 18.14　内埋式永磁体构成的磁路

18.14　永磁电机的特性

表贴式永磁电机的定子电感很小，定子电流的变化率 $\frac{di_a}{dt} = \frac{u_a - e_a}{L_s}$ 非常大，接近 7000 $[I_n/s]$[⊖]，这就决定了电磁转矩 $T_{em} = k * |\Psi_{Rm} \times i_s|$ 的变化率很大，表贴式磁体的转矩从零上升到额定值只需要 100 ~ 200μs。因此表贴式永磁同步电机应用于运动控制系统比如工业自动化和机器人中。

表贴式同步电机的一个缺点就是在弱磁环境下不能很好的工作，当转子转速超过了定子的额定转速，那么在定子绕组中中感应了电动势 $j\omega_e \Psi_s$，超过了额定转速，定子磁通不得不减少维持电动势 $j\omega_e \Psi_s$ 在一定范围之内。$|j\omega_e \Psi_s| \leqslant U_n = \Psi_n * \omega_n$，为了达到这个目标，定子磁通 $\Psi_s = \Psi_{Rm} + L_s i_s$ 就必须减少。由于转子磁通是不会变化的，因此定子

⊖ 从零开始，可以在 1/7000s 内达到额定电流 i_n。

磁通的减少就必须减小定子电流 i_s 的大小来实现。定子去磁化电流的大小取决于定子电感的值。对定子电感很小的电机，为了减少磁通需要很大的定子电流。因此表贴式永磁同步电机在弱磁情况下工作是不合理的，常常应用于要求高峰值转矩，转矩变化快的运动控制系统中。

也有不需要快速的转矩变化但是需要在弱磁环境中工作的同步电机。这种同步电机就是将永磁体内埋于转子磁路中的内埋式㊀永磁同步电机。定子齿部面向转子磁路的铁心部分，磁路的磁阻减少了但是定子电感是增加了。因为转子内没有损失，因此内埋式同步电机应用在对效率要求高的场合。

㊀ 永磁体不是放置在转子表面、也不是在气隙中，而是放在转子磁路的特定的管道或空腔中，远离表面而靠近电机轴的电机称为埋入式永磁同步电机。

第 19 章　同步电机的数学模型

本章介绍和解释了同步电机的数学模型。模型考虑了转子上带励磁绕组或永磁体的三相同步电机。本模型没有包含阻尼绕组，阻尼绕组部分在第 21 章进行介绍和解释。本模型表现了同步电机电和机械子系统中的瞬态和稳态运行状况。分析讨论了克拉克和帕克坐标变换。模型包含了表达定转子绕组电压平衡的微分方程，联系磁链和电流的电感矩阵，运动的牛顿微分方程，气隙功率表达式和电磁转矩的表达式。模型的建立过程和在 15 章中详细描述的感应电机的过程非常近似。所以，一些考量被简化或者移除了。本章得到的模型对于各向同性电机（隐极电机）和各向异性电机（凸极电机）都是适用的。本章结束部分简单考虑了磁阻转矩和同步磁阻电机。

19.1　同步电机的建模

分析同步发电机和电动机需要一些有关它们电和机械特性的基础知识。电机的电特性包括电压、电流和磁链之间的稳态和暂态关系。机械特性则是转速、电磁转矩和运动阻力之间的稳态和暂态关系。为了设计电源和控制系统，需要知道同步电机的联系电压和电流的方程和表达式。稳态分析依赖于等效电路，等效电路包含了同步电机的表示相关的电流、电压和磁通的参数和相量。为了设计和确定到机械负载或者驱动涡轮机的接口，需要知道同步电机的机械特性。

在水电站中，大容量同步电机作为发电机使用。它们被连接到固定频率为 50Hz 或 60Hz 的三相电网。通过轴从汽轮机或水轮机中得到机械功，转换为电能并供到电网。很多同步发电机具有绕线转子。电励磁绕组为通过调节励磁电流改变励磁磁通提供了可能性。励磁磁通的改变影响电动势和定子电压。这开启了控制电网电压和改变无功功率的可能性。小功率同步电机用在运动控制、机车驱动、工业机器人和自动生产机械中。在这些应用中，同步电机作为电动机使用。它们的作用包括克服运动阻力，驱动工作机械，控制工具和零件的速度和位置。有一种趋向是基于永磁体设计和制造恒定励磁的中小容量同步电机。

在同步电动机和发电机的瞬态过程中，电压和电流用描述绕组电压平衡的微分方程联系起来。电压平衡方程描述了电机的电气子系统。机械子系统用牛顿运动微分方程描述。描述同步电机运行特性的一组微分方程和表达式叫做数学模型或动态模型。后面，以建立机械特性和稳态等效电路为目的，确定了同步电机的数学模型：

1）同步电机的机械特性依赖于一定频率和幅值供电电压下，稳态时作用在转子速度上的电磁转矩。

2）稳态等效电路是一个电阻和电感的网络，可用来计算同步电机的电流和磁链。

建模过程中，采用了一些近似，忽略了一些不太重要的现象。忽略了铁耗，并且所有的铁磁材料都假设为线性和不饱和的。另外，由于分布参数引起的寄生电容都忽略了。同步电机模型具有：

1）表示绕组电压平衡的 N 个微分方程；

2）电感矩阵；

3）转矩表达式；

4）牛顿运动方程。

19.2　磁动势

大多数同步电机为定子绕组三相系统。也有少量的5、7、9、17或者更多相的绕组系统。大于三相的同步电机的运行状况可以用一个等效的三相电机代替。在对称供电的三相同步电机中，相电流为

$$
\begin{aligned}
i_a &= I_m\cos\omega_e t \\
i_b &= I_m\cos(\omega_e t - 2\pi/3) \\
i_c &= I_m\cos(\omega_e t - 4\pi/3)
\end{aligned} \tag{19.1}
$$

它们有相同的角频率和幅值。它们的初始相位相差 $2\pi/3$。同时，相绕组磁场轴线也在空间偏移 $2\pi/(3p)$，其中 p 是极对数。三相定子绕组的建立在14章讨论了，多极对数电机方面的讨论在17章进行。

定子相电流产生的定子磁动势用矢量 $\boldsymbol{F}_s=\boldsymbol{F}_a+\boldsymbol{F}_b+\boldsymbol{F}_c$ 表示。式（19.1）给出的相电流产生的磁动势，转速为 $\Omega_e=\omega_e/\mathrm{p}$，维持一个恒定的幅值 $F_s=3/2NI_m$。为了表示矢量 $\boldsymbol{F}_s$，在图19.1的 $\alpha\beta$ 平面中，分解成两部分，对应于正交坐标系中的 $\alpha\beta$ 轴的映射。$\alpha\beta$ 坐标系统的放置方式是将 α 轴与a相绕组轴线重合。

α 轴和 β 轴的方向用单位矢量 $\boldsymbol{\alpha}_0$、$\boldsymbol{\beta}_0$ 定义。相绕组a，b，c的轴线方向用这些单位矢量可表达为：$a_0=\boldsymbol{\alpha}_0$，$b_0=-1/2\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\beta}_0\mathrm{sqrt}(3)/2$，和 $c_0=-1/2\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\beta}_0\mathrm{sqrt}(3)/2$。单独一相的磁动势为

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_a &= Ni_a\,\vec{\alpha}_0 \\
\vec{F}_b &= Ni_b\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0\right) \\
\vec{F}_c &= Ni_c\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0\right)
\end{aligned} \tag{19.2}
$$

合成磁动势等于

$$
\vec{F}_s=\vec{F}_a+\vec{F}_b+\vec{F}_c=\frac{3}{2}NI_m(\vec{\alpha}_0\cos\omega_e t+\vec{\beta}_0\sin\omega_e t) \tag{19.3}
$$

在三相绕组中的相电流不是独立的变量，这使得建模很困难。对于星接的相绕组，相电流关系式为 $i_a+i_b+i_c=0$。同样的困难存在于铰接（三角形连接）的相绕组，其中 $u_a+u_b+u_c=0$。因此，在 c 相绕组的电压平衡方程中，需要用（$-i_a-i_b$）代替 i_c。另

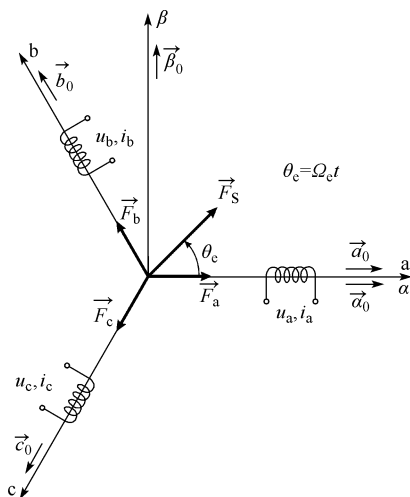


图 19.1　定子旋转磁动势矢量

外，相绕组磁场轴之间的角度为 2π/3。对于空间相差 π/2 放置的绕组，它们的互感等于零。对于空间相差 2π/3 放置的绕组，所有相间均有一个非零的互感，这会导致更复杂的电压平衡方程。上述缺点可以通过引进三相电机的两相等效来避免。两相等效电机由$\vec{\alpha}_0$和 $\vec{\beta}_0$方向的两相绕组构成。两相模型具有两个独立的相电流 i_α 和 i_β，而且两个正交绕组之间的互感等于零。

19.3　两相等效

定子电流矢量 $\boldsymbol{i}_s$ 决定于矢量 $\boldsymbol{F}_s$ 除以定子相绕组匝数。矢量 $\boldsymbol{i}_s$ 可以表示为投映在 $\alpha\beta$ 正交坐标系上的两个矢量之和。这两个分量为 i_α 和 i_β，可以认为是等效两相绕组的相电流，这两个绕组的相轴对准 α 和 β 轴。两相等效的引入使得数学模型更简洁和直观。相电流数量减为 2，相绕组间互感等于零。相电流为 i_α 和 i_β 产生投影为 F_α 和 F_β 的磁动势。这些投影正比于相应的电流，称为 $F_\alpha = Ni_\alpha$ 和 $F_\beta = Ni_\beta$。同时，α 相绕组的磁通 $\psi_{s\alpha}$ 是定子磁通矢量 $\boldsymbol{\psi}_s$ 在 α 轴上的投影。消除的互感和两相绕组中相关矢量的投影相应的电流和磁链都有利于理解和使用两相数学模型。

引进两相等效时，必须要保证和初始三相电机具有相同的磁通，相同的磁场能量，和相同的转矩。这个可以通过保持磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 的幅值和空间方向不变来做到。两相等效没有独特的方式来保证相同的矢量 $\boldsymbol{F}_s$。这个可以通过一套每相更小电流更多匝数的绕组，或者另一套每相更大电流更少匝数的绕组得到。

三相绕组的移除和用两相绕组进行等效可以用此方式进行，保持绕组的匝数不变，即 $N_{abc} = N_{\alpha\beta}$。那么，定子磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 保持不变，如果 $i_\alpha(t) = i_a(t) - i_b(t)/2 - i_c(t)/2 =$

$\frac{3}{2}I_m\cos\omega_e t$ 和 $i_\beta(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(i_b(t)-i_c(t))=\frac{3}{2}I_m\sin\omega_e t$。需要注意的是，在所考虑的情形中，两相等效的相电流的幅值和有效值比三相绕组中相应的电流大 50%（见图 19.2）。

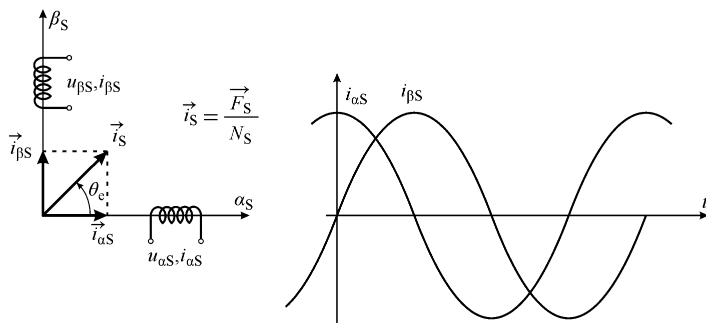


图 19.2　定子绕组的两相表达式

从开始的有关相电流 i_α 和 i_β 的关系式，三相变量到等效两相变量的变换可以写成如下的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}=K_I\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \tag{19.4}$$

三相到两相变换在第 15 章进行了讨论。后续章节是对前面思考的一个简单回顾。

19.4　克拉克三相/两相变换

三相到两相变换被称为克拉克变换，以首先提出这种变换公式的作者命名。式（19.4）中给出的矩阵叫做变换矩阵。调节系数 K_I 的存在使得定义三相到两相的等效时有一定的自由度。等效电机的匝数不必一定和初始电机的一样，如果保持磁动势不变的话。也就是说，保持磁动势不变的条件可以通过选择一个 $N_{\alpha\beta}=mN_{abc}$ 匝的两相等效模型。那么，为了维持同样的 F_s 值，在相绕组中的电流 $i_\alpha(t)$ 和 $i_\beta(t)$ 要小 m 倍。因此，式（19.4）中的系数 K_I 必须是 $K_I=1/m$。两相等效和初始三相的峰值电流的比例为 $(2/3)m$。

为了得到两相电机的模型，必须要将原始电机的电压和磁链均变换到 $\alpha-\beta$ 坐标系。电压和磁链的克拉克变换为如下的表达式：

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix}=K_U\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} \tag{19.5}$$

$$\begin{bmatrix}\psi_\alpha \\ \psi_\beta\end{bmatrix} = K_\psi \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c\end{bmatrix} \tag{19.6}$$

系数 K_U、K_I 和 K_ψ 可能是不同的值。由于实际应用的原因，三相/两相变换取三个系数相等，$K_U = K_I = K_\psi = K$。在这种情况下，两相等效保持了与原始电机相同的电流、电压和磁链比率，也保留了阻抗和电感的不变。

问题（19.1）：是否有可能实际制造一个两相电机：匝数为 $N_{\alpha\beta} = mN_{abc}$ 以产生与初始三相同步电机相同的定子绕组磁动势 $\boldsymbol{F}_s$，而且还有通过对原始电机进行克拉克变换而得到的电压和电流（u_α，u_β，i_α，i_β）？假设磁链、电压和电流变换矩阵都是相同的，也就是说它们具有同样的前置系数（$K_U = K_I = K_\psi$）㊀。

解答（19.1）：相同的磁动势 F_s 导致相同的磁链 $\Phi_s = F_s/R_\mu$。同时，在两相和三相电机中的旋转磁场的角速度必须是相同的。因此，两种电机中在每一匝上感应的电动势是一样的。记住，两相等效的电压为 $u_{\alpha\beta} = mu_{abc}$。维持 F_s 的幅值要求等效两相相电流为 $i_{\alpha\beta} = \frac{3}{2}\frac{i_{abc}}{m}$。最后，维持电压和电流比率则要求 $u_{abc}/i_{abc} = u_{\alpha\beta}/i_{\alpha\beta}$。总结上面的思考

$$\frac{u_{\alpha\beta}}{i_{\alpha\beta}} = \frac{mu_{abc}}{(3/2)(i_{abc}/m)} = \frac{2m^2}{3}\frac{u_{abc}}{i_{abc}} = \frac{u_{abc}}{i_{abc}}$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow K_U = K_I = K_\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

* * * *

问题 19.1 的解决证明了实际制造一个两相等效电机的可能性，该电机具有与原始电机相同的磁链、转矩、磁动势、阻抗和感抗。实际两相电机的电压、电流和磁链通过对原始变量进行克拉克变换获得。三相/两相变换的系数为 $K_U = K_I = K_\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}$。实际的两相电机具有和原始电机相同的转矩和功率。因此，除了阻抗不变外，克拉克变换也是功率不变的㊁。

如果将三相绕组从原始电机的磁路中移除，用 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 倍匝数的两相绕组代替，就得到了一个代替原来三相电机的两相同步电机。通过三相/两相变换得到的电压和电流等

㊀ 阻抗和感抗的不变性在第 15 章讨论。阻抗不变变换导致一个所有阻抗与原电机相关阻抗相等的等效电机。

㊁ 坐标变化不必一定具有功率不变性。通常，坐标变换，比如克拉克变换，提供对所考虑动力系统的另一种数学表述。新模型不必对应于任何的实际系统。一个例子是，电阻模型，$u_1 = Ri_1$；通过使用变换 $u_1 = 2u$，$i_1 = 2i$ 可以描述为 $u = Ri$。模型 $u_1 = Ri_1$ 是阻抗不变的，但不是功率不变。

于实际的可以从两相绕组上测量的电压和电流。因此，用 $K=\sqrt{\frac{2}{3}}$的三相/两相变换可以得到能够实际制造的两相等效电机。注意，从三相/两相变换导出的实际制造电机的可能性的观念并不是特别重要。

系数 $K=\sqrt{\frac{2}{3}}$的克拉克变换在磁动势、功率、阻抗和感抗方面是不变的。另外，可以制造一个电压电流等于克拉克变换而来的电机。尽管如此，系数为 $K=\sqrt{\frac{2}{3}}$的变换很少使用。计算中比如$\sqrt{\frac{2}{3}}$这种无理数的存在是这种特殊的变换很少使用的原因。

在坐标变换选择中，可以自由地选择系数 K 以方便地使用模型。实际中，$K_U=K_I=K_\psi=2/3$ 和 $K_U=K_I=K_\psi=1$ 是经常使用的。对电流使用系数 $K_I=1$ 的三相/两相变换，可以得到峰值和有效值均比原始变量大 50%。想得到同原始相电流 i_a、i_b、i_c 的峰值和有效值相等的电流 i_α、i_β 的变换，要求系数为 $K=2/3$。这种选择有两个缺点。

使用系数为 $K=2/3$ 的克拉克变换不是功率不变的。也就是说，在 $\alpha\beta$ 域计算的功率与原始电机的功率不一样。注意这点，对于 $\alpha\beta$ 域变量和 abc 域变量的电压和电流的有效值是一样的。原始电机具有三相绕组，等效电机只有两相绕组。所以，由于 $P_{\alpha\beta}=(2/3)P_{abc}$，计算功率不是一样的。因此，无论何时使用 $K=2/3$ 的三相/两相变换，实际的功率必须按表达式 $P_{abc}=(3/2)P_{\alpha\beta}$。

不可能制造一个实际的两相电机，具有可变换计算得来的电压电流一样。也就是说，不可能对一个已存的三相电机重新绕线而得到一个与考虑三相/两相变换得到的相应的值一样的电压和电流的等效两相电机。从另一方面讲，选择系数 $K=2/3$ 变换到 $\alpha\beta$ 域的电压和电流，具有有原始三相电机一样的幅值和有效值。$K=2/3$ 时，虚拟的两相等效必须具有更多的绕组匝数。为了维持矢量的 $\boldsymbol{F}_s$ 幅值，须有必须有 $N_{\alpha\beta}=(3/2)N_{abc}$。每匝同样的磁通 $\Phi=F_s/R_\mu$ 下，单匝磁动势在原始电机和等效电机中都是一样的。因此，想要制造一个两相等效电机，必须是单匝具有相同的磁动势但是匝数比原始电机多 50%。在 $N_{\alpha\beta}=(3/2)N_{abc}$条件下，相电压为 $u_{\alpha\beta}=(3/2)u_{abc}$，比原始相电压大 50%。同时，采用系数 $K=2/3$ 的变换会导致 $u_{\alpha\beta}=u_{abc}$。这表明，用系数 $K=2/3$ 转换得到的两相电机没有一个真实的对应物。

系数为 2/3 的三相/两相变换的好的特性是阻抗和感抗不变，同时原始电机的峰值和有效值情况和两相等效是一样的。功率不变性的破坏用公式 $P_{abc}=(3/2)P_{\alpha\beta}$校正。

更深入的分析都是假设三相绕组用系数为 2/3 的克拉克变换得到的两相绕组来替代。除非另有说明，后面的分析都是假定同步点极对数为 1，电频率 ω 对应于机械速度 Ω。

19.5　电感矩阵和电压平衡方程

一个定子绕组为两相，绕线转子的同步电机如图 19.3 所示。所考虑的绕组的电压

平衡方程为

$$u_{\alpha s}=R_s i_{\alpha s}+\frac{d}{dt}\psi_{\alpha s},u_{\beta s}=R_s i_{\beta s}+\frac{d}{dt}\psi_{\beta s},u_R=R_R i_R+\frac{d}{dt}\psi_R \tag{19.7}$$

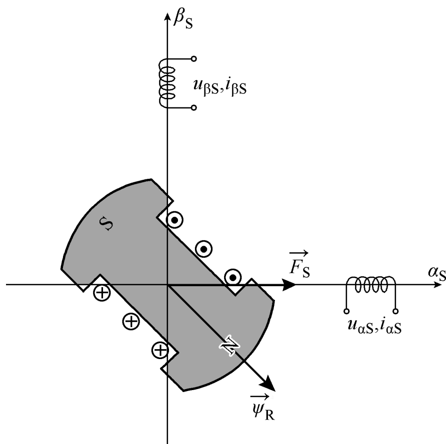


图 19.3　两相定子绕组，转子有励磁绕组的同步电机

变量 $u_{\alpha s}$和 $u_{\beta s}$表示加在两相定子绕组上的相电压，u_R 表示供给励磁绕组的电压。磁链 $\psi_{\alpha s}$、$\psi_{\beta s}$和 ψ_R 表示绕组 α_s、β_s和励磁绕组上的全部磁链。电流 $i_{\alpha s}$、$i_{\beta s}$和 i_R 与磁链之间的关系由电感矩阵给出。由于转子在转动，励磁绕组轴线的角位移相对于定子轴 α_s 为 $\theta_m=\Omega_m t$，假定转子速度 Ω_m 不变。对应于变化的 θ_m，电感矩阵中的互感是变化的，电感矩阵是一个非静态的矩阵：

$$\begin{pmatrix}\psi_{\alpha s}\\ \psi_{\beta s}\\ \psi_R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_s & 0 & L_m\cos\theta_m\\ 0 & L_s & L_m\sin\theta_m\\ L_m\cos\theta_m & L_m\sin\theta_m & L_R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_{\alpha s}\\ i_{\beta s}\\ i_R\end{pmatrix} \tag{19.8}$$

定子绕组 α 相的磁链等于 $\psi_{\alpha s}=L_s i_{\alpha s}+L_m\cos(\theta_m)i_R$。变化的互感导致在电压平衡方程有 $\cos(\theta_m)$ 这样的三角函数，状态变量 θ_m 表现为辐角的函数。这引起了得到一个清晰的稳态等效图表：

$$\begin{aligned}u_{\alpha s}&=R_s i_{\alpha s}+\frac{d}{dt}(L_s i_{\alpha s}+L_m\cos(\theta_m)i_R)\\ &=R_s i_{\alpha s}+L_s\frac{d}{dt}i_{\alpha s}+L_m\cos(\theta_m)\frac{d}{dt}i_R-\omega_m L_m i_R\sin(\theta_m)\end{aligned}$$

另外，所述模型具有状态变量如相电流 $i_{\alpha s}$和 $i_{\beta s}$，它们在稳态也呈现正弦变化。所以，它们的时间导数在稳态条件下是非零值，这导致稳态分析的困难并且阻碍了电机控制的公式化。上述缺点可以用帕克变换来克服。这种变换在旋转的 dq 坐标系表达电机矢量。帕克变换在同步电机上的使用与在 15 章讨论过的感应电机上的使用几乎一样。

19.6　帕克变换

在静止 α_s-β_s 坐标系中的同步电机模型有两个明显的缺点，使得使用困难，阻碍了分析，和难以让控制方法公式化。这些缺点如下：

1）电压平衡微分方程表达式包含状态变量的三角函数。这影响模型的可用性，并且导致不切实际的稳态等效电路。电压平衡方程中变化的系数跟随电感矩阵中的元素互感而变。这些变化是由于定转子的相对位置发生了变化，其中转子是运载励磁绕组的，定子是运载定子相绕组的。

2）即使在稳态，状态变量的一阶时间导数也是非零的。在静止 α_s-β_s 坐标系中的电机模型的状态变量是相关矢量在 α_s-和 β_s-轴上的投影。稳态时，转速、磁链幅值、电磁转矩和转换功率都是常量。但是，定子相电流、每相的磁链、它们的磁动势和电动势都是交流量。即使在稳态，它们也呈现正弦变化，而且它们的一阶时间导数不等于零。这种情况使得稳态运行的分析更困难。

上述缺陷可以通过将所有状态变量变换到的正交 d- 和 q- 轴旋转坐标系统来消除。这种 dq 坐标系以转子速度旋转，所以叫做同步坐标系。大多数情况下，d-轴与励磁绕组的磁轴是共线的。在永磁电机中，d-轴与永磁体产生的转子磁通矢量共线。电流、电压、磁链和磁动势到 dq 坐标系的变换称为帕克变换，这在第 15 章有详细的解释。

帕克变换可以假想为把已存在的定子相 α_s 和 β_s 用想象的存在于同步旋转的 dq 坐标系的虚绕组替换，定位的方法是使 d-轴与励磁绕组的磁场轴线一致。这个新的坐标系统以转子同样的速度旋转，所以叫做同步坐标系。励磁绕组的电压、电流和磁链不需要进行变换，由于它们已经在目标 dq 坐标系中。今后使用的变换过程和符号与 15 章中使用的一样。后续章节是对 15 章中详细描述的帕克变换的一个简短的回顾。

由于 $\theta_{dq}=\theta_m$，新的 dq 坐标系以转子磁链 ψ_R 相同的速度旋转。稳态条件下，矢量 $\boldsymbol{\psi}_R$ 和 $\boldsymbol{F}_s$之间的相对位置是不变的。因此，dq 轴也与定子磁动势矢量 $\boldsymbol{F}_s$ 同步旋转。所以，稳态条件下，两个矢量在 d-轴和 q-轴上的投影都是常量。同样的结论适用于电压、电流和定子磁链矢量。所以，帕克变换提供了在同步旋转 dq 坐标系中的一套变量，在稳态时具有恒定值。

将 d-轴放置于励磁绕组磁场轴线上的好处是所有的励磁磁通量都沿着 d-轴方向。也就是说，励磁磁通 ψ_R 的 q 分量为零。图 19.4 的建立中，包括了虚构的绕组 d 和 q，还有励磁绕组；虚构 q 相和励磁绕组之间的互感为零，这简化了进一步的分析。在永磁同步电机中，d-轴放置到与永磁体产生的转子磁链 ψ_R 一致的方向。

采用 d-轴与转子磁场轴对齐的同步旋转坐标系，得到了如图 19.4 所示的一套绕组系统，其中虚拟定子绕组与励磁绕组有恒定互感且状态变量在稳态条件下为常量。例如，定子电流矢量 $\boldsymbol{i}_s=\boldsymbol{F}_s/N_s$ 的投影 i_d和 i_q稳态时在 dq 轴上的投影为常量，矢量 $\boldsymbol{i}_s$ 维持着相对于 dq-轴不变的幅值和相对位置。所有的状态变量都可以证明有同样的情况。通过将定子变量从静态的 α_s-β_s 坐标系变换到同步旋转的 dq 坐标系，可以得到稳态条件下

所有相关状态变量为常量的模型。这方便了稳态运行方式的分析。

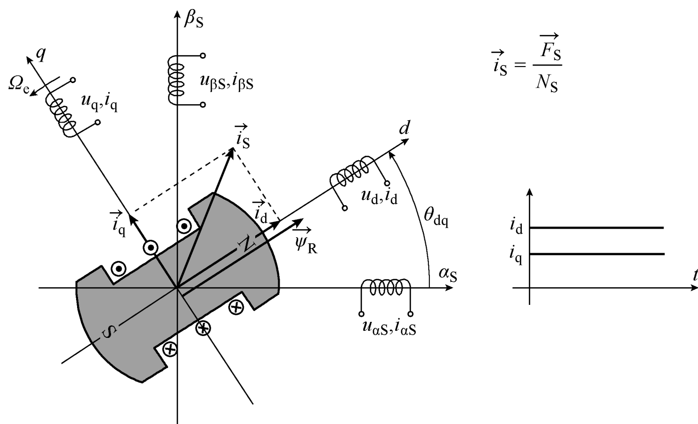


图 19.4　定子变量到同步旋转坐标系的变换。角度 θ_{dq}等于转子角 θ_m

虚拟的定子绕组 d 和 q 不能被实际制造。反而，它们是体现了帕克变换效果的图形方式。可以做一个想象的实验，移除 α_s-β_s 定子绕组，安装一套新的、虚拟的绕组，将它们的轴线与 dq 坐标系的轴线对齐（见图 19.4）。

19.7　*dq* 系中的电感矩阵

虚拟的 dq 绕组不改变相对于励磁绕组的位置。虚拟定子 d-轴相绕组与励磁绕组的磁场轴一致。两个绕组间的互感 $L_{d\text{-}R}$等于 L_m。同时，虚拟相绕组 q-轴与励磁绕组间的互感等于零。另外，正交绕组 d 和 q 间的互感等于零。所以，有 3 * 3 = 9 个元素的电感矩阵只有 5 个非零元素。它们的值 L_s、L_R和 L_m是常量：

$$\begin{bmatrix}\psi_d\\\psi_q\\\psi_R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_s & 0 & L_m\\0 & L_s & 0\\L_m & 0 & L_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d\\i_q\\i_R\end{bmatrix}\tag{19.9}$$

在这些新的虚拟绕组中的电流必须产生和原来的相绕组 α_s 和 β_s 产生的定子磁动势 $\boldsymbol{F}_s$ 相同的矢量。为了满足这个条件，虚拟绕组中的电流 i_d 和 i_q 必须呈现的值为 $i_d = i_{\alpha s}\cos(\theta_m) + i_{\beta s}\sin(\theta_m)$ 和 $i_q = -i_{\alpha s}\sin(\theta_m) + i_{\beta s}\cos(\theta_m)$。这些关系的矩阵形式在式（19.11）中给出。所有剩下的变量[⊖]，比如电压和磁链，都必须从 α_s-β_s 坐标系变

⊖ 绕组电流可被视为状态变量。这种情况下，磁链不能被视为状态变量，因为磁链可由式（19.9）得到。当然，也可以确定磁链为状态变量。这时，绕组电流可以磁链求得，不能再作为状态变量。绕组端电压是外部驱动力，不能作为状态变量。在机械子系统中，状态变量是速度和转子位置。

换到同步旋转 dq 坐标系。运用帕克变换到所有相关的变量，可以得到同步旋转 dq 坐标系的电压、电流、磁链和磁动势。每个变量比如 i_d 和 i_q 等于相应的矢量在 dq 坐标系轴上的投影。从这点看，导出 dq 坐标系中的电压平衡方程是必须的。

d-轴和 α_s-轴之间的角度 $\theta_{dq}=\theta_m$ 为

$$\theta_{dq} = \theta_{dq(0)} + \int_0^t \omega_m d\tau = \theta_{dq(0)} + \int_0^t p\Omega_m d\tau \tag{19.10}$$

其中，p 是极对数。帕克变换表达式为

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = [T]\begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_m) & \sin(\theta_m) \\ -\sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix} \tag{19.11}$$

对于一个两极电机，转子速度的电气表达式 $\omega_m=p\Omega_m$ 等于转子的机械速度 Ω_m。对于多极对数电机，$p>1$，磁极的 N 极和 S 极之间的空间位移为 π/p，正交轴之间的实际距离为 $\pi/(2p)$。所以，图 19.4 和图 19.5 是相关的轴和绕组的一个实际的空间处置。两图中，2π 的角位移对应极数为 $2p$ 的同步电机实际的空间距离为 $2\pi/p$。方程（19.10）和（19.11）可以对两极或多极同步电机中确定角度 θ_{dq} 和进行帕克旋转变换。

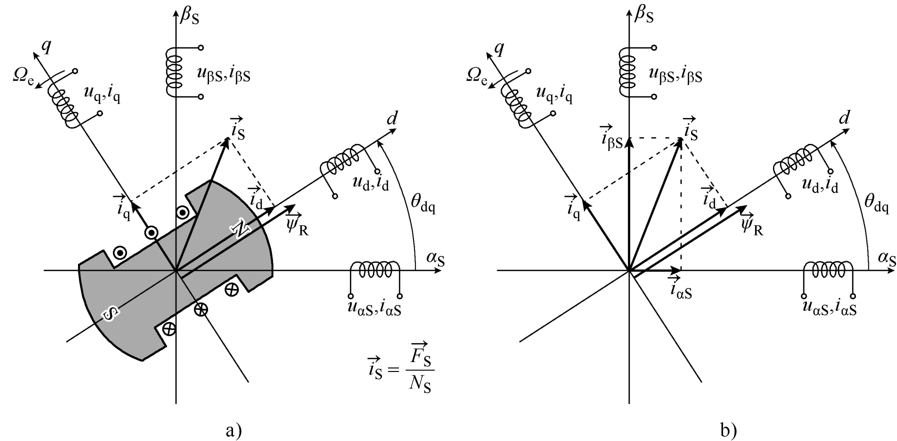


图 19.5　定子变量到同步旋转坐标系的变换角度 θ_{dq} 等于转子角度 θ_m

19.8　用复数表示矢量

电压、电流和磁链矢量可以用复数表示，每个矢量在正交轴 $\alpha\beta$ 或 dq 上的投影用一个复数的实部和虚部代表，比如 $\underline{i}_{dq}=i_d+ji_q$，$\underline{i}_{\alpha\beta s}=i_{\alpha s}+ji_{\beta s}$。考虑 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$，定子电流从 $\alpha\beta$ 到 dq 坐标系的帕克变换可以用表达式 $\underline{i}_{dq}=e^{-j\theta}\underline{i}_{\alpha\beta s}$ 表示。使用复数表示矢量简化了 dq 坐标系中导出电压平衡方程的过程。引入定子电压的复数表示 $\underline{u}_{\alpha\beta s}=u_{\alpha s}+ju_{\beta s}$，定子电压平衡方程可以用一个简单的方程（19.12）表示。这个方程使用了复数 $\underline{u}_{\alpha\beta s}$、

$\underline{i}_{\alpha\beta s}$和$\underline{\psi}_{\alpha\beta s}$：

$$u_{\alpha s}=R_s i_{\alpha s}+\frac{d}{dt}\psi_{\alpha s},\ u_{\beta s}=R_s i_{\beta s}+\frac{d}{dt}\psi_{\beta s}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{\alpha\beta s}=R_s \underline{i}_{\alpha\beta s}+\frac{d}{dt}\underline{\psi}_{\alpha\beta s} \tag{19.12}$$

同步 dq 坐标系中的电压、磁链和电流可用复数表示。复数的实部与相关矢量在 d-轴上的投影一致，而虚部与相关矢量在 q-轴上的投影一致。这样，dq 平面可用一个带实数的 d-轴和虚数的 q-轴的复平面来解释：

$$\underline{i}_{dq}=i_d+\mathrm{j}i_q$$

也可以定义另外一个复平面，包括实的 α-轴和虚的 β-轴。在静止坐标系中的电压、磁链和电流可用定义在 $\alpha\beta$ 面的复数表示。复数的实部和虚部与相应矢量在 α-轴和 β-轴上的投影一致：

$$\underline{i}_{\alpha\beta s}=i_{\alpha s}+\mathrm{j}i_{\beta s}$$

从 $\alpha\beta$ 到 dq 坐标系的帕克变换可以写作

$$\underline{i}_{dq}=i_d+\mathrm{j}i_q=e^{-\mathrm{j}\theta_m}(i_{\alpha s}+\mathrm{j}i_{\beta s}) \tag{19.13}$$

dq 和 $\alpha\beta$ 坐标系中电压和磁链的关系用复数表示为

$$\underline{u}_{dq}=e^{-\mathrm{j}\theta_m}\underline{u}_{\alpha\beta s}$$

$$\underline{\psi}_{dq}=e^{-\mathrm{j}\theta_m}\underline{\psi}_{\alpha\beta s} \tag{19.14}$$

19.9　电压平衡方程

同步旋转坐标系中虚拟相电压 u_d和 u_q可以运用帕克变换从 $\alpha\beta$ 电压得到：

$$\underline{u}_{dq}=u_d+\mathrm{j}u_q=e^{-\mathrm{j}\theta_m}\cdot\underline{u}_{\alpha\beta s}=(R_s\,\underline{i}_{\alpha\beta s}+\frac{d}{dt}\underline{\psi}_{\alpha\beta s})e^{-\mathrm{j}\theta_m} \tag{19.15}$$

静止坐标系中的变量$\underline{i}_{\alpha\beta s}$和$\underline{\psi}_{\alpha\beta s}$可以运用反帕克变换$\underline{i}_{\alpha\beta s}=\underline{i}_{dq}e^{\mathrm{j}\theta_m}$从 dq 变量得到

$$\underline{u}_{dq}=(R_s\,\underline{i}_{dq}e^{\mathrm{j}\theta_m}+\frac{d}{dt}(\underline{\psi}_{dq}e^{\mathrm{j}\theta_m}))e^{-\mathrm{j}\theta_m}$$

$$=R_s\,\underline{i}_{dq}+\frac{d}{dt}\underline{\psi}_{dq}+\mathrm{j}\omega_m\,\underline{\psi}_{dq} \tag{19.16}$$

其中，$\omega_m=p\Omega_m$。所以，dq 系中的电压平衡方程不再具有通常的形式 $u=Ri+d\psi/dt$。其中包含一个附加项，显出运用旋转变换的结果。角度 θ_m 标示了相对于定子 a 相的转子磁场轴的位置。角频率 $p\Omega_m=\omega_m$ 表示转子速度。在磁极对数大于一（$p>1$）情况下，必须考虑到 $p\Omega_m=\omega_m$。角度 θ_m 定义了帕克旋转变换的变换矩阵。$P>1$ 时，角度是转子机械距离的 p 倍。从静止 $\alpha\beta$ 坐标系的电压平衡方程开始

$$\underline{u}_{\alpha\beta s}=R_s\underline{i}_{\alpha\beta s}+\frac{d}{dt}\underline{\psi}_{\alpha\beta s}$$

可以得到

$$\underline{u}_{dq} = e^{-j\theta_m}\left(R_s\,\underline{i}_{\alpha\beta s} + \frac{d}{dt}\underline{\psi}_{\alpha\beta s}\right) = e^{-j\theta_m}\left(R_s\,\underline{i}_{dq}e^{j\theta_m} + \frac{d}{dt}\left(\underline{\psi}_{dq}e^{j\theta_m}\right)\right)$$

同步旋转坐标系中的电压平衡方程为

$$\underline{u}_{dq} = R_s\,\underline{i}_{dq} + \frac{d}{dt}\underline{\psi}_{dq} + j\omega_m\,\underline{\psi}_{dq} \tag{19.17}$$

方程（19.17）可以分为实部和虚部。每一部分代表一个标量方程：

$$\mathrm{Re}\{\underline{u}_{dq}\} \rightarrow u_d = R_s i_d + \frac{d}{dt}\psi_d - \omega_m\psi_q$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{u}_{dq}\} \rightarrow u_q = R_s i_q + \frac{d}{dt}\psi_q + \omega_m\psi_d$$

所以，复变量的电压平衡方程可以分为两个标量方程：

$$u_d = R_s i_d + \frac{d}{dt}\psi_d - \omega_m\psi_q$$

$$u_q = R_s i_q + \frac{d}{dt}\psi_q + \omega_m\psi_d \tag{19.18}$$

定子绕组的电压平衡方程受帕克变换影响，多了一项，如 $\omega_m\psi_d$。同时，励磁绕组中的电压平衡方程保持不变。这个方程不受帕克变换的影响。实际上，励磁电流、电压和磁链不被帕克变换改变。也就是说，励磁绕组固定在转子上，它的磁场轴与同步旋转坐标系的 d-轴一致。这样，励磁绕组的瞬态现象由下面的方程确定：

$$u_R = R_R i_R + \frac{d}{dt}\psi_R \tag{19.19}$$

19.10　隐极电机（各向同性电机）的电气子系统

同步电机的数学模型描述为电气和机械子系统。前者由电压平衡方程描述，后者由牛顿运动方程描述。由于定子上两套等效相绕组，转子上一套励磁绕组，同步电机具有三套绕组，因此有三个表达绕组电压平衡的微分方程。另外，模型包含电感矩阵，提供了磁链和电流之间的联系，电磁转矩表达式也一样。

一个同步电机的转子磁路可能是圆柱形式，这种情况下，各个方向的磁阻 R_μ 是一样的。在所有方向保持同样磁阻的圆柱形转子称为各项同性。由于每个绕组的自感取决于比值 N^2/R_μ，一个恒定的磁阻会导致恒定的自感。定子绕组具有同样的匝数，所以，$L_d = L_q = L_s$。d-轴和 q-轴磁阻不同的情况，转子被称为各向异性。这种情况，自感不一样，$L_d \neq L_q$。

式（19.8）中的电压平衡方程表示在图 19.6 中，这对隐极和凸极同步电机都适用。两者的不同表现在电感矩阵上。

dq 坐标系中虚拟绕组和励磁绕组的电压平衡方程为

$$u_d = R_s i_d + \frac{d}{dt}\psi_d - \omega_m\psi_q$$

$$u_q = R_s i_q + \frac{d}{dt}\psi_q + \omega_m \psi_d$$

$$u_R = R_R i_R + \frac{d}{dt}\psi_R \qquad (19.20)$$

其中，磁链和电流之间的联系由式（19.9）的电感矩阵确定。这个矩阵方程可以拆分为三个标量表达式：

$$\psi_d = L_s^* i_d + L_m i_R \qquad (19.21)$$

$$\psi_q = L_s^* i_q \qquad (19.22)$$

$$\psi_R = L_R i_R + L_m i_d \qquad (19.23)$$

在隐极电机中，$L_d = L_q = L_s^*$。凸极电机中，$L_d \neq L_q$，式（19.21）中的参数 L_s^* 用 L_d 替代，式（19.22）中的 L_s^* 用 L_q 替代。励磁绕组磁链等于 $\psi_R = L_R i_R + L_m i_d$。系数 L_R 代表励磁绕组的自感，L_m 是励磁绕组和 d-轴上的虚拟相绕组之间的互感。互感 L_m 可以通过测量励磁绕组和 a，b，c 中的一个定子相绕组之间的最大互感来确定。当转子位置和励磁绕组磁场轴线位置与定子相绕组磁场轴线一致时，互感为最大。对于隐极同步电机，各个方向的磁阻相同，d-轴上虚拟相绕组的磁链为 $\psi_d = L_s^* i_d + L_m i_R$，而 q-轴上虚拟相绕组的磁链为 $\psi_q = L_s^* i_q$。

图 19.6　dq 坐标系同步电机模型

19.11　隐极电机中的转矩

隐极同步电机的转矩可以通过分析功率平衡得到。需要考虑到电功率，从三相电压源传递到同步电机，转子轴上的机械功率，铜耗铁耗和机械子系统。从电源传递的电功率表达式开始，$P_e = (3/2)(u_d i_d + u_q i_q)$，使用定子绕组电压平衡方程，可以得到如下关系式：

$$\begin{aligned} P_e &= (3/2)(u_d i_d + u_q i_q) \\ &= \frac{3}{2} R_s (i_d^2 + i_q^2) + \frac{3}{2}\left(i_d \frac{d\psi_d}{dt} + i_q \frac{d\psi_q}{dt} \right) + \frac{3}{2}\omega_m (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \\ &= p_{Cu1} + \frac{dW_m}{dt} + p_{em} \end{aligned} \qquad (19.24)$$

上述表达式中，右边第一项代表定子绕组中的功率损耗，也叫做铜耗。定子磁路中也有铁耗，磁场密度 B 随着角频率 ω_m 的变化而改变。电机建模的四个近似条件之一是铁耗相当小，所以可以忽略（参看第 6 章，6.2 节）。所以，所考虑的功率平衡不包括铁耗。方程的第二项是 $\frac{dW_m}{dt}$，定义了耦合磁场中的能量增加的变化率。如果电机以一个恒定的磁通运行，那么磁场能量也是恒定的，则第二项 $\frac{dW_m}{dt}$ 等于零。第三项是 $p_{em} =$

$\frac{3}{2}\omega_m(\psi_d i_q-\psi_q i_d)$。它是从输入电功率减去损耗得到。所以，它代表了电能变化到机械功的比率。通过定子和气隙中的转子磁场的电磁作用，穿过气隙传递到转子。功率 p_{em} 叫做机电转换功率。

同步电机具有与转子同步旋转的定子磁场。稳态时，电源角频率 ω_e 等于旋转 $p\Omega_m=\omega_m$ 的角频率。瞬态时是否 $\omega_e=\omega_m$ 的问题就产生了。也就是说，瞬态过程中，电磁转矩 T_{em}变化时，定子磁场 $\boldsymbol{F}_s$ 和转子磁链 $\boldsymbol{\psi}_R$ 之间的角度也会改变。矢量 $\boldsymbol{F}_s$ 的转速为 ω_e/p，转子磁链 $\boldsymbol{\psi}_R$ 以转子速度 Ω_m 旋转。当这两个矢量之间的角度变化时，在 ω_e 和 $p\Omega_m=\omega_m$ 之间有一个暂时的差异。当电机进入一个新的稳态，两者呈现并维持一个新的相对位置，方程 $\omega_e=p\Omega_m=\omega_m$ 恢复。

瞬态时 ω_e 与 ω_m 之间的改变使得矢量 $\boldsymbol{F}_s$ 和 $\boldsymbol{\psi}_R$ 之间的角度改变。但是，它们仍然保持同步，也就是说，在稳态情况下它们以同样的速度旋转。如果 dq 坐标系是通过将 d 轴和转子磁轴对齐建立的，dq 坐标系的转速在稳态和瞬态均保持 ω_m。所以，电压平衡方程（19.20）在稳态和瞬态都包含了角频率 ω_m。

计算传递到输出轴的机械功率 p_{em}是至关重要的。如果转子为永磁体励磁，就没有励磁绕组，转子中也没有损耗。功率 p_{em}通过气隙传到转子转化为机械功率。这个机械功率不等于电机的输出机械功率，因为有机械子系统的损耗，比如转子运动的摩擦力和空气阻力。所以，它被称为内部机械功率，标记为 $p_{mR}=p_{em}$。当转子有励磁绕组，有铜耗 $R_R i_R^2$。这些损耗由一个外部电源供应，提供电压 u_R 和电流 i_R 给励磁绕组。稳态时，这个电源供应功率 $u_R i_R=R_R i_R^2$ 到励磁绕组。所以，方程 $p_{mR}=p_{em}$同样适用于电励磁的同步电机。

内部机械功率等于内部电磁转矩 T_{em}与转子速度 $\Omega_m=\omega_m/p$ 的乘积。这个转矩是定子和转子间的机械作用，由耦合场产生的电磁力引起。电磁转矩用下式计算

$$T_{em}=\frac{p_{mR}}{\Omega_m}=p\frac{p_{em}}{\omega_m}=\frac{3p}{2}(\psi_d i_q-\psi_q i_d) \tag{19.25}$$

上述表达式对隐极电机可以更简化，由于所有方向磁路有相同的磁阻，$L_d=L_q=L_s$。通过引入关系式 $\psi_d=L_s i_d+L_m i_R=L_s i_d+\psi_{Rm}$和 $\psi_q=L_s i_q$ 到上述转矩表达式可以得到

$$T_{em}=\frac{3p}{2}(\psi_d i_q-\psi_q i_d)=\frac{3p}{2}L_m i_R i_q=\frac{3p}{2}(L_m i_R)i_q=\frac{3p}{2}\psi_{Rm}i_q \tag{19.26}$$

磁链分量 $\psi_{Rm}=L_m i_R$ 代表包围着定子绕组的励磁磁通部分。由于一个有限的漏磁通量，它略小于励磁绕组的磁通量。永磁体励磁的电机中，磁链 ψ_{Rm}代表由永磁体引起的转子磁通部分，它环绕着定子绕组。一小部分永磁体磁通没有到达定子铁心，没有对机电转换过程作出贡献。

19.12　凸极电机（各向异性电机）

转子磁路可能是一个非圆柱体形式，这就使沿着 d-轴和 q-轴的磁阻产生了差异。

这导致 dq 坐标系中的虚拟相绕组有不同的自感 L_d 和 L_q。圆柱形结构，磁阻不取决于磁场方向，称为“各向同性”，这意味着所有方向具有相同的特性。在隐极电机中，L_d 和 L_q 是相等的。当磁阻随磁场方向改变时，电机是各向异性的，电感 L_d 和 L_q 是不同的。各向异性电机的凸极特性连同转矩的相应表达式一起在后续部分呈现。

虚拟相绕组 d-轴上的磁链为 $\psi_d = L_d i_d + L_m i_R$，$q$-轴上的虚拟相绕组磁链为 $\psi_q = L_q i_q$。励磁磁通对 q-轴上的定子磁通没有贡献。对于圆柱形转子，电感 L_d 和 L_q 有相同的值，$L_d = L_q = L_s$。凸极电机的结构表示在图 19.7 中，d-轴和 q-轴有不同的磁阻。左图中，是一个电励磁转子磁路的横截面。磁路的形状被设计为使 d-轴方向有低的磁阻，方便建立励磁磁通。励磁绕组的导体放置在磁路的两边，沿着 q-轴排列。因此，q-轴方向磁链通路包含着相对较高的气隙部分使得磁阻相对较高。高的磁阻导致小的电感 $L \sim N^2/R_\mu$；这样，$R_{\mu d} < R_{\mu q}$的条件使得 $L_d > L_q$。图 19.7 的第二个例子显示了转子内部带永磁体的转子磁路。磁体沿着 d-轴嵌入。永磁体间的磁导率接近 μ_0，它们在 d-轴磁通路径上的存在增加了磁阻 $R_{\mu d}$。由于 $R_{\mu d} > R_{\mu q}$，相绕组电感 $L_d < L_q$。

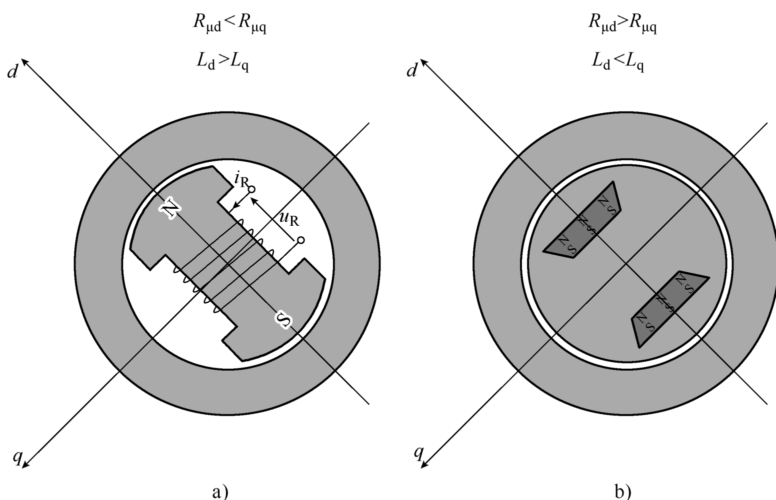


图　19.7

a）带励磁绕组的凸极转子，d-轴和 q-轴磁阻不同

b）带永磁体的各向异性电机（凸极电机）

凸极电机的磁链方程为

$$\psi_d = L_d i_d + L_m i_R,\ \psi_q = L_q i_q,\ \psi_R = L_R i_R + L_m i_d \tag{19.27}$$

19.13　磁阻转矩

虚拟定子相 d 和 q 的自感 L_d 和 L_q 的差异影响了电磁转矩表达式：

$$T_{em}=\frac{3p}{2}(\psi_d i_q-\psi_q i_d)$$
$$=\frac{3p}{2}\psi_{Rm} i_q+\frac{3p}{2}(L_d-L_q)i_d i_q \qquad (19.28)$$

转矩表达式包含一个附加部分，与 d-轴和 q-轴的自感的差值成比例。这部分转矩称为磁阻转矩，因为表现的是磁阻差异的结果，也叫做磁阻。即使没有励磁绕组和永磁体的同步电机中也可能存在磁阻转矩。只要在 d-轴和 q-轴有不同的磁阻从而有不同的自感 L_d 和 L_q 就足够了。没有转子磁通时，气隙中只有定子磁场。因此，电机按照对齐转子轴与定子磁通最小磁阻的方式运行。有制造的没有永磁体没有励磁绕组的同步电机。但是，直轴 d-轴和交轴 q-轴之间有相当大的磁阻差异。这增大了 L_d-L_q 的值，也增大了磁阻转矩。这些电机称为“同步磁阻电机”。

问题（19.2）：一个同步电机带有凸极转子，没有永磁体和励磁绕组。定子电流的幅值限制为 I_m。确定磁阻的最大值。所有影响磁阻转矩的参数都是已知的。

解答（19.2）：磁阻转矩正比于电流 i_d 和 i_q 的积。定子电流的幅值被限制时，电流分量可以表示为 $i_d=I_m\cos(\xi)$ 和 $i_q=I_m\sin(\xi)$，其中 ξ 是定子电流矢量与 d-轴的夹角。磁阻转矩为

$$T_{em}=\frac{3p}{2}(L_d-L_q)I_m^2\cos\xi\sin\xi=\frac{3p}{4}(L_d-L_q)I_m^2\sin2\xi$$

当 $i_d=i_q=I_m/\sqrt{2}$时，最大磁阻转矩在 $\xi=\pi/4$ 时取得，等于$\frac{3p}{4}(L_d-L_q)I_m^2$。

19.14 磁阻电动机

同步磁阻电机适用于尺寸和重量不是特别重要而且主要目标是有一个坚固的、简单的、低价的构造的场合。磁阻电机在转子上没有有源部分。转子仅仅是用来制造磁路以使直轴和交轴具有不同的磁阻。可以通过图 19.8 所示的叠压硅钢片的方式得到转子磁路。通过叠压硅钢片，可以得到沿着钢片方向的一个小的磁阻和垂直方向的一个大的磁阻。通过垂直方向的磁通要多次经过片间的绝缘气息，这增大了等效磁阻。用前述方式，可以得到一个各向异性电机，转子在d-轴和 q-轴有不同的磁阻。同时，转子外观是圆柱形的，没有凸极，只有很小的气体阻力。因此，转子可以达到高速而没有明显的运动阻力，并且没有危害电机的机械整体性。

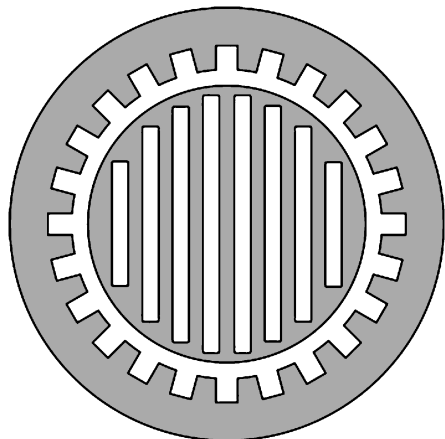


图 19.8　磁阻同步电机转子

对比绕线式转子电机，同步磁阻电机的优点是具有相当简单的结构，且不需要通过集电环给励磁绕组供电。对比于永磁电机，磁阻电机更容易制造而且便宜。磁阻电机的一个优点是气隙磁链仅取决于定子电流，这使得在不同运行条件下调节磁链成为可能，比如弱磁调速。

磁阻电机定子电流为零时，磁链也等于零。同时，电动势 $\omega_m\psi$ 也等于零。在同步磁阻电机定子绕组开路情况，端电压等于零，就不会造成电压危害。同时，磁阻电动机开路绕组端没有感应电压，意味着绕组短路不会产生任何定子电流。这就是说，定子绕组短路的磁阻电动机，在转子旋转的情况下，不会产生定子电流也不会产生任何转矩。永磁同步电机没有这样的特性。即使开路时，永磁同步电机的转子磁通仍然存在。开路定子绕组端电压等于电动势 $E_0=\omega_m\psi_{Rm}$。定子端短路时，一个相对较高的短路电流就建立了，约等于 $I_{ks}\approx E_0/X_S=\psi_{Rm}/L_s$。贴片式磁体的同步电机有小的定子电感 L_s，电路电流就很大，这会导致可能退磁的定子磁动势而毁坏磁体。另外，短路电流 I_{ks} 会产生制动转矩[㊀]。磁阻电机没有短路电流，短路情况下也没有制动转矩，电机开路时定子端电压为零：

$$T_{em}=\frac{3p}{2}(L_d-L_q)i_di_q \tag{19.29}$$

磁阻电机的一个缺点是低的功率系数和比转矩。由于没有励磁磁通，转矩表达式不包含与乘积 $\psi_{Rm}i_q$ 成比例的部分。反而只有与电流 i_d 和 i_q 的乘积成比例的磁阻转矩。

一个假想的将永磁体插入已存的磁阻电机的实验，会增加分量 $\psi_{Rm}i_q$ 到转矩上，所以增加了比转矩和电机功率。可以得出结论，磁阻电机中的电磁转矩与定子电流的比率 T_{em}/I_S 比带永磁体或励磁绕组的同步电机要低得多。为了得到相同的转矩，磁阻电机的定子电流要比励磁的同步电机需要的电流大得多。因此，磁阻电机的功率和效率要比这些励磁的同步电机低。

为了缓和磁阻电机的令人不快的比率 T_{em}/I_S，它们的控制要构思成使转矩/安培的比值最大化。对于给定的定子电流幅值，获得最大可能的转矩是至关重要的。图 19.9 的左边显示了一个横坐标和纵坐标为电流 i_d 和 i_q 的 dq 坐标系。标示恒转矩 $T_{em}\sim i_di_q$ 的根轨迹表现为一条双曲线。不同的 i_d 和 i_q 对产生相同的乘积 i_di_q。所以，在控制电机方面有一定的自由度，被用来使损耗最小化和使转矩/安培比率最大化。在图 19.9 中，定子电流的幅值与始于原点终于选择的双曲线 $T_{em}\sim i_di_q$ 上的运行点的矢径成比例。最小的幅值在矢径相对于 d-和 q-轴的角度为 $\pi/4$ 时获得，也就是 $i_d=i_q$ 时。可能的情况下，磁阻电机以 $i_d=i_q$ 的方式进行控制。

㊀ 定子绕组短路，短路电流为 I_{KS}，电机不从电源吸收任何功率。同时，定子绕组中有铜耗，正比于 $R_SI_{KS}^2$。铜耗功率只能由电机唯一变化的端口提供，这个端口就是电机轴，传递或者吸收功率 $T_{em}\Omega_m$。在短路状态，在短路状态，电机从轴端吸收机械功率。这就产生一个正比于 $R_SI_{KS}^2/\Omega_m$ 的制动转矩，这用来考量短路状态的铜耗。

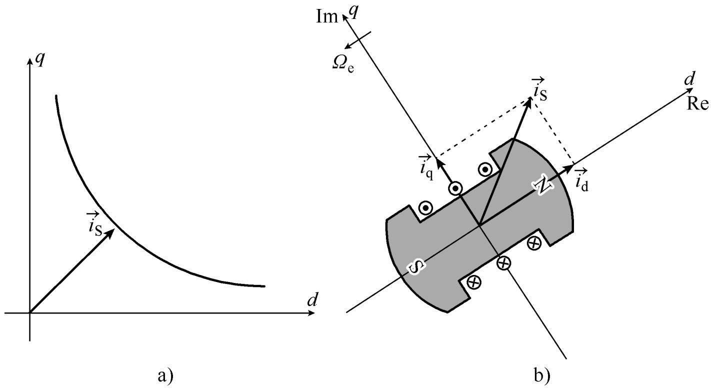


图 19.9

a）i_d-i_q 图中的恒转矩双曲线

b）复平面，dq 坐标系中的转子位置

第 20 章　稳 态 运 行

电机的数学模型包含一系列微分和代数方程，这些方程描述了在给定条件和负载的情况下电机的运行。运用这个模型，可以获得暂态和稳态过程中转子转速、电磁转矩、气隙磁通和相电流的变化。在设计电机的供电电源和控制算法时也需要电机的数学模型。同时，数学模型可以用于预测我们感兴趣的工况下电机的性能和评估电机是否适合给定的应用。

研究同步电机的特性和性能从稳态分析开始。稳态分析涉及稳态运行状态，此时电机以恒定的转速、转矩和磁通幅值运行。

在这章中，运用同步电机数学模型推导出电机稳态等效电路并得到稳态下转矩和功率的表达式。通过矢量图的方法分析说明稳态下的电机运行。重新启用关于矢量的一些基本概念并运用于各向同性和各向异性的电机。引入并且定义功角，同时将稳态转矩按照功角表示。这章讨论说明同步电机的电气性能和力学性能，讨论的同步电机由刚性三相电网供电。同步电动机和发电机的稳态运行在相应的矢量图基础上分析，转矩、有功功率和无功功率的表达式按照功角推导得到。

20.1　稳态时的电压平衡方程

同步电机的状态变量通过帕克变换可以得到稳态时所有状态变量都是定值的电机模型。在稳态条件下，定子电流、电压和磁链矢量在同步旋转坐标系中 dq 轴线上的投影不变。因此，它们的一阶导数等于零，这有利于得到同步电机稳态等效电路。在稳态时，代表定子电压、电流和磁链矢量的复数$\underline{u}_{dq}$、$\underline{i}_{dq}$和$\underline{\Psi}_{dq}$变成复常数。它们恒定的、稳态的值用$\underline{u}_s$、$\underline{i}_s$和$\underline{\Psi}_s$表示。这些复常数有它们的幅值和角度，因此可以视为矢量。注意到复常数$\underline{u}_s$和$\underline{i}_s$代表三相定子绕组中的稳态电压和电流是很重要的。因此，与普通的矢量不同，复数$\underline{u}_s$和$\underline{i}_s$代表三相系统中的交变电压和电流。

普通矢量的绝对值相当于用矢量表示的交流量的有效值。另一方面，复数$\underline{u}_s$和$\underline{i}_s$的绝对值取决于克拉克 $3\Phi/2\Phi$ 变换的首项系数。也就是说，定子相电压的有效值与复常数$\underline{u}_s$的绝对值 $|\underline{u}_s| = sqrt(u_d^2 + u_q^2)$间的关系由 $3\Phi/2\Phi$ 变换的系数 K，$3\Phi/2\Phi$ 变换用于推导三相电机的两相等效。在 $K = 2/3$ 时，绝对值 $|\underline{u}_s|$等于定子相电压的峰值。为了促进同步电机的分析，需要将电压平衡方程用稳态等效电路表示。在稳态时，励磁电流和励磁磁通不变，因此：

$$i_R = const. = I_R$$

$$L_m I_R = \Psi_{Rm}$$

在转子为永磁体的同步电机中，环绕定子绕组的转子磁链是恒定的，且等于Ψ_{Rm}。

在稳态时，转子转速等于同步速，因此$\Omega_{m}=\Omega_{e}$。在定子电压和电流的角频率为ω_{e}时，同步转速等于$\Omega_{e}=\omega_{e}/p$，它决定定子磁场旋转的速度。所以，$\Omega_{m}=\Omega_{e}=\omega_{e}/p=\omega_{m}/p$。选取同步旋转 dq 坐标系以使 d 轴与励磁磁链，也就是永磁体的磁链在同一条直线上。所以，dq 坐标系以与转子相同的速度旋转。多极电机中电频率 ω 与机械旋转速度 Ω 间的关系为 $\omega=p\Omega$。因此，出现在电压平衡方程中的频率等于$\omega_{m}=p\,\Omega_{m}$。在稳态时，保持$\omega_{e}=\omega_{m}$。

对运行在稳态的各相同性同步电机，定子绕组的电压平衡方程由下式给出：

$$u_{d}=R_{s}i_{d}+L_{s}\frac{di_{d}}{dt}-\omega_{e}L_{s}i_{q}=R_{s}i_{d}-\omega_{e}L_{s}i_{q}$$

$$u_{q}=R_{s}i_{q}+L_{s}\frac{di_{q}}{dt}+\omega_{e}L_{s}i_{d}+\omega_{e}\Psi_{Rm}=R_{s}i_{q}+\omega_{e}L_{s}i_{d}+\omega_{e}\Psi_{Rm}$$

在上面两个等式的基础上，可以这样写：

$$u_{d}=R_{s}i_{d}-\omega_{e}L_{s}i_{q}=R_{s}i_{d}-p\Omega_{m}L_{s}i_{q}$$

$$ju_{q}=jR_{s}i_{q}+jp\Omega_{m}L_{s}i_{d}+jp\Omega_{m}\Psi_{Rm}$$

通过上面两个式子相加就得到了式（20.1），此式通过使用矢量$\underline{u}_{s}$和$\underline{i}_{s}$表示了定子绕组的稳态电压平衡：

$$\begin{aligned}\underline{u}_{s}&=R_{S}\underline{i}_{s}+j\omega_{e}\underline{\Psi}_{s}=R_{S}\underline{i}_{s}+j\omega_{e}L_{s}\underline{i}_{s}+j\omega_{e}\Psi_{Rm}\\&=R_{S}\underline{i}_{s}+jp\Omega_{m}L_{s}\underline{i}_{s}+jp\Omega_{m}\Psi_{Rm}\end{aligned}\tag{20.1}$$

其中：

$$\underline{u}_{s}=u_{d}+ju_{q},\ \underline{i}_{s}=i_{d}+ji_{q}$$

磁链$\Psi_{Rm}=L_{m}i_{R}$是环绕定子绕组的励磁磁链的一部分。在永磁体励磁时，磁链Ψ_{Rm}代表永磁体产生的磁链的一部分，它穿过气隙并环绕定子绕组。因为直轴（d 轴）与转子磁链共线，所以磁链$\boldsymbol{\Psi}_{Rm}$在交轴（q 轴）上的投影等于零。因此，在复数表示下，磁链$\underline{\Psi}_{Rm}$是一个实数，也就是$\underline{\Psi}_{Rm}=\Psi_{Rm}+j0$。

20.2 等效电路

在稳态时，式（20.1）可采用如下形式：

$$\underline{U}_{s}=R_{S}\underline{I}_{s}+j\omega_{e}\underline{\Psi}_{s}=R_{S}\underline{I}_{s}+j\omega_{e}L_{s}\underline{I}_{s}+j\omega_{e}\Psi_{Rm}\tag{20.2}$$

其中电压和电流用大写字母表示，定为稳态值。电阻R_{S}和电感L_{S}是定子相绕组的参数，乘积$\omega_{e}\Psi_{Rm}$代表电动势。假如$\underline{I}_{S}=0$，定子电压$\underline{E}_{0}=j\omega_{e}\Psi_{Rm}$。

乘积$\underline{E}_{0}=j\omega_{e}\Psi_{Rm}$表示电动势，也表示空载定子电压。当定子电流等于零时，这个电压（$\underline{E}_{0}$）出现在定子端线间。在式（20.2）的基础上，稳态等效电路可以由电动势$\underline{E}_{0}$、电抗$X_{S}=\omega_{e}L_{S}$和电阻R_{S}的一系列连接表示。需要注意的是图 20.1 展示的等效电路对应于各向同性的同步电机，其$L_{d}=L_{q}=L_{S}$。

等效电路左边标示的电压$\underline{U}_{s}$表示定子电压$\underline{U}_{s}=U_{d}+jU_{q}$。在使用图 20.1 中的等效电路（其中$\underline{U}_{s}=U_{d}+jU_{q}$）时，必须注意的是矢量的幅值对应于相应相变量的峰值。相同

的等效电路也能用于矢量幅值与有效值对应的情况。

当同步电机作电动机运行时，电机从电源获得电功率。代表定子电流的矢量$\underline{I}_S$的有功分量（实部）在图 20.1 中由左指向右。当同步电机作发电机运行时，矢量$\underline{U}_s$表示从发电机获得电能的电气负载上的电压，提供给负载的电流为$-\underline{I}_S$。在此运行模式下，定子电流的有功分量由右指向左，与图 20.1 中标示的参考方向相反。

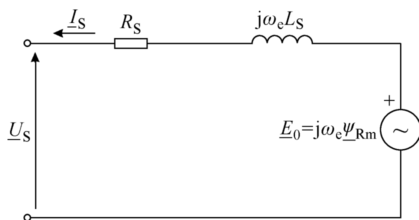


图 20.1　稳态等效电路

20.3　电流、电压的峰值和有效值

在许多运用图 20.1 中等效电路的情况中，假定矢量幅值与相关相变量的峰值对应。这个假定依托的是首项系数 $K=2/3$ 的 Clarke 变换。从三相电压$u_a(t)$、$u_b(t)$ 和 $u_c(t)$ 开始，运用 Clarke 和 Park 变换，就得到同步旋转坐标系中代表的定子电压。电压U_d+jU_q的幅值$|\underline{U}_S|$等于相电压的峰值，$U_{eff}\cdot\sqrt{2}$。决定将相物理量的峰值赋值给矢量幅值，就必须应用于等效电路中所有的矢量，也就是应用于所有的电压、电流、电动势和磁链。因此，电动势的幅值$|E_0|$对应空载相电压的峰值。矢量$\underline{\Psi}_{Rm}$代表环绕定子绕组的转子磁链，其幅值$|\underline{\Psi}_{Rm}|$对应矢量$\vec{\Psi}_{Rm}$的幅值，也就是说对应延伸到定子相绕组的磁链的峰值。矢量$\underline{\Psi}_S=L_S\underline{I}_S+\Psi_{Rm}$的幅值$|\underline{\Psi}_S|$对应于定子磁链矢量的幅值。在上面考虑的基础上，电机的输入功率为$P_e=(3/2)\mathrm{Re}(\underline{U}_S\underline{I}_S^*)$[⊖]。定子绕组中损耗的功率由式$P_{Cu1}=(3/2)R_SI_S^2$计算。机电能量转换的功率为$P_{em}=P_e-P_{Cu1}=(3/2)\mathrm{Re}(\underline{E}_0\underline{I}_S^*)$。因为磁链矢量$\vec{\Psi}_{Rm}$与 d 轴（指定为复数 $d+jq$ 平面的实轴）一致，所以电动势矢量为$\underline{E}_0=j\omega_e\Psi_{Rm}$，它与交轴（$q$ 轴）在同一直线上，q 轴同时是复数 $d+jq$ 平面的虚轴。正因为如此，乘积$\underline{E}_0\underline{I}_S^*$的值为$\omega_e\Psi_{Rm}I_q$。电磁转矩等于功率$P_{em}$和同步转速$\Omega_e=\omega_e/p$ 的比值：

$$T_{em}=\frac{P_{em}}{\Omega_e}=\frac{3p}{2\omega_e}\omega_e\Psi_{Rm}I_q=\frac{3p}{2}\Psi_{Rm}I_q \tag{20.3}$$

也可以将等效电路中的矢量说明为复数，其幅值代表相关相变量的有效值。在这种情况下，等效电路中的电压和电流为有效值。等效电路左边的矢量$\underline{U}_S$代表定子电压，其幅值$|\underline{U}_S|$对应定子相电压的有效值U_{rms}。此时，电动势$|E_0|$对应空载相电压的有效值。对许多人而言，使用电压和电流的有效值更得心应手。在使用与有效值对应的矢量时，磁链矢量必须以相同的方法处理。因此，从等效电路中计算得到的矢量$\underline{\Psi}_{Rm}$的幅值比磁链矢量$\vec{\Psi}_{Rm}$的幅值小$\sqrt{2}$倍。同时，$|\underline{\Psi}_S|=|L_S\underline{I}_S+\Psi_{Rm}|$等于定子磁链矢量的幅值除

⊖　$\mathrm{Re}(\underline{z})=z_r$ 是复数 $\underline{z}=z_r+jz_i$ 的实部。$\underline{z}^*$ 的值等于 $\underline{z}^*=z_r-jz_i$

以$\sqrt{2}$。采用与有效值对应的矢量，电机的输入功率由式$P_e = 3\mathrm{Re}(\underline{U}_S \underline{I}_S^*)$计算得到；定子绕组损耗的功率为$P_{Cu1} = 3R_S I_S^2$，这样机电能量变换的功率为$P_{em} = P_e - P_{Cu1} = 3R_e(\underline{E}_0 \underline{I}_S^*) = 3\omega_e \Psi_{Rm} I_q$。需要注意的是这个表达式中$\Psi_{Rm}$和$I_q$的值相比于式（20.3）中的值要小$\sqrt{2}$倍。当采用对应于有效值的矢量时，电磁转矩可以按下式计算：

$$T_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega_e} = \frac{3p}{\omega_e}\omega_e \Psi_{Rm} I_q = 3p\Psi_{Rm} I_q \qquad (20.4)$$

问题（20.1）：一台两极同步电机定子自感为L_S，定子电阻R_S很小且能够被忽略。电机转子上为永磁体，在定子绕组中产生的磁链为Ψ_{Rm}。电机处于稳态运行，且连接到频率$f_e = 50\text{Hz}$的三相电网，其相电压有效值为U_{Sn}。相比于空载电动势，定子电压相位超前δ。计算电网输送要电机的功率。

解答（20.1）：所分析的等效电路假定有关矢量表示有效值。电机定子电流为$\underline{I}_S = (\underline{U}_S - \underline{E}_0)/\mathrm{j}X_S$，其中$\underline{E}_0 = \mathrm{j}\omega_e \Psi_{Rm}$。磁链$\underline{\Psi}_{Rm} = \Psi_{Rm}$，且在实轴上。因为定子电压相对于空载电动势超前$\delta$，且电动势$\underline{E}_0 = \mathrm{j}\omega_e \Psi_{Rm}$位于虚轴上，所以定子电压相对于实轴超前$\delta + \pi/2$。定子电压在$dq$轴上的分量分别为$U_d = -U_{Sn}\sin(\delta)$和$U_q = U_{Sn}\cos(\delta)$。因此：

$$\underline{U}_S = -U_{Sn}\sin\delta + \mathrm{j}U_{Sn}\cos\delta$$

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S - \underline{E}_0}{\mathrm{j}X_S} = \frac{-U_{Sn}\sin\delta + \mathrm{j}U_{Sn}\cos\delta - \mathrm{j}\omega_e \Psi_{Rm}}{\mathrm{j}X_S} = \frac{U_{Sn}\cos\delta - \omega_e \Psi_{Rm}}{X_S} + \mathrm{j}\frac{U_{Sn}\sin\delta}{X_S}$$

从电网得到的电功率可以由下式计算：

$$\underline{S} = 3\underline{U}_S \underline{I}_S^* = 3\frac{U_{Sn}(\omega_e \Psi_{Rm})}{X_S}\sin(\delta) + \mathrm{j}3\frac{U_{Sn}(U_{Sn} - \omega_e \Psi_{Rm}\cos(\delta))}{X_S} = P_e + \mathrm{j}Q_e$$

电机获得的有功功率为$P_e = 3U_{Sn}E_0\sin(\delta)/X_S$。

20.4　隐极电机的矢量图

基于等效电路的稳态分析依靠复数表示法，将定子电压、电流和磁链的向量用相应的矢量表示。稳态等效电路中的电压平衡可以用矢量图表示。图 20.2 中的矢量图表示了作电动机运行的各向同性同步电机的电压平衡。同步旋转坐标系的d轴约定为复平面的实轴㊀。因此，q轴成为虚轴。引入 Park 旋转变换，使d轴与励磁磁链共线。因此，矢量$\underline{\Psi}_{Rm}$位于实轴上，它等于$\underline{\Psi}_{Rm} = \Psi_{Rm} + \mathrm{j}0$。

矢量$\underline{\Psi}_{Rm}$表示环绕定子绕组的励磁磁链。空载电动势$\underline{E}_0 = \mathrm{j}\omega_e \Psi_{Rm}$相位超前$\pi/2$，且

㊀ 稳态电压和电流可以用任意复平面中的矢量表示。矢量与实轴间的夹角决定了所考虑的交流电压和电流的初始相位。显然，这给实轴位置的选择施加了约束。但是另一方面，初始相位是$t=0$瞬间的相位值。因此，通过选择$t=0$的瞬间，可以选择实轴和虚轴位置不同的复平面。通常绘制同步电机矢量图所选用的复平面中实轴与同步旋转坐标系的d轴在同一条直线上。值得注意的是其他的选择也是合理的。在处理某些问题时，选择实轴与定子电压或定子电流共线，计算会更简单。

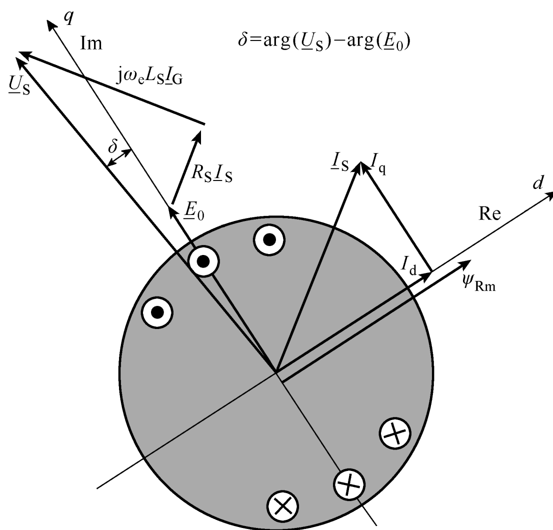


图 20.2　作电动机运行的各向同性电机的矢量图

位于虚轴上。通过定子阻抗$\underline{Z}_{\mathrm{S}}=R_{\mathrm{S}}+\mathrm{j}\omega_{\mathrm{e}}L_{\mathrm{S}}$上的电压降和空载电动势相加就得到了定子电压$\underline{U}_{\mathrm{S}}$。定子电阻上的电压降与定子电流$\underline{I}_{\mathrm{S}}$同相位，然而电抗$X_{\mathrm{S}}$上的压降超前 π/2。决定电动势$\underline{E}_0$相位滞后电压$\underline{U}_{\mathrm{S}}$的角度 δ 称为功角。电机的视在功率等于：

$$\underline{S}=3\ \underline{U}_{\mathrm{S}}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{*}=3\ \frac{U_{\mathrm{Sn}}(\omega_{\mathrm{e}}\Psi_{\mathrm{Rm}})}{X_{\mathrm{S}}}\sin(\delta)+\mathrm{j}3\ \frac{U_{\mathrm{Sn}}(U_{\mathrm{Sn}}-\omega_{\mathrm{e}}\Psi_{\mathrm{Rm}}\cos(\delta))}{X_{\mathrm{S}}}=P_{\mathrm{e}}+\mathrm{j}Q_{\mathrm{e}}\quad(20.5)$$

由电源提供给电机的有功功率P_{e}由功角 δ 决定：

$$P_{\mathrm{e}}=3\ \frac{U_{\mathrm{Sn}}E_0}{X_{\mathrm{S}}}\sin(\delta)\quad(20.6)$$

功角为正值会导致正的有功和正的转矩。因此，当电压矢量的相位相对电动势超前时，电机作电动机运行并产生正的转矩。当 $\delta<0$ 时，电压滞后于电动势，功率和转矩都是负的，说明电机作发电机运行。

当一台各向同性同步电机作发电机运行时，定子电流的有功部分是负的。如果定子电流的参考方向改变，同步发电机的稳态分析会更简单。在图 20.3 中，根据改变后的定子电流参考方向重新绘制了稳态等效电路。新的电路更直观，因为它表示了发电机给电气负载$\underline{U}_{\mathrm{G}}$提供发电电流$\underline{I}_{\mathrm{G}}$。图 20.4 给出了各向同性同步发电机的矢量图。

在稳态运行时，同步电机的转子以同步速旋转，同步速由供电电源频率ω_{e}决定，$\omega_{\mathrm{e}}=\omega_{\mathrm{m}}=p\,\Omega_{\mathrm{m}}$。每当供电电压变化或是机械子系统变化时，电机进入暂态过程。可以从图 20.2 近似了解电机的暂态过程。以同步电动机作为考虑的实验，负载转矩T_{m}的突然增加会导致转子转速的下降。定子电压矢量以速度Ω_{e}旋转，有供电电源频率决定，然而电动势的运动由转子速度决定。转速差$\Omega_{\mathrm{e}}-\Omega_{\mathrm{m}}$影响到功角。电动势$\underline{E}_0$与转子磁链的

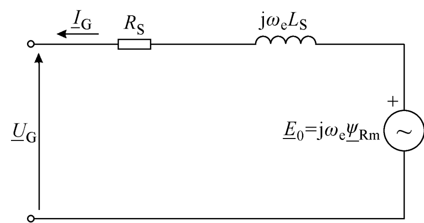


图 20.3　适用于同步发电机的等效电路。定子电流参考方向改变，$\underline{I}_G = -\underline{I}_S$

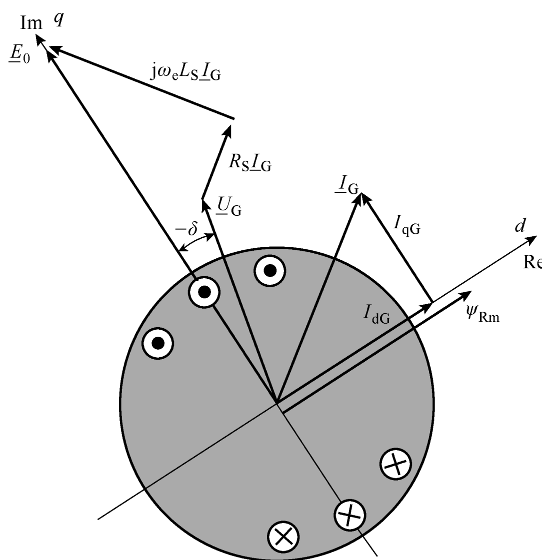


图 20.4　作发电机运行的各向同性电机的矢量图

转速一致。因此，它开始以比矢量$\underline{U}_S$慢的速度旋转，$\underline{U}_S$以恒定的同步速$\Omega_e = \omega_e / p$ 旋转。正因如此，功角 δ 开始变大。根据式（20.6），输入功率p_e增大，这导致逐渐增大电磁转矩T_{em}。增大的T_{em}抵消转矩T_m并将同步电机带入新的平衡，一个新的稳定运行状态。

问题（20.2）：从图（21.2）给出的例子出发，绘制同步电机矢量图。假定定子电流$\underline{I}_S$滞后电动势 $3\pi/2$，忽略定子电阻R_S。

解答（20.2）：电动势$\underline{E}_0$和定子电压$\underline{U}_S$位于矢量图的虚轴上。电压的幅值比电动势小$X_S I_S$。

问题（20.3）：一台两极同步电机处于稳态运行，其功角 $\delta = 0$。定子电压幅值等于空载电动势。在$\underline{U}_S = \underline{E}_0$时，定子电流等于零。在 $t = 0$ 的瞬间，轴上加与运动方向相反的负载转矩T_m。讨论转速的变化。假定极对数 $p = 1$，这样$\Omega_m = \omega_m$，$\Omega_e = \omega_e$。

解答（20.3）：稳态时，转子以同步速旋转。因此，定子电压$\underline{U}_S$和电动势$\underline{E}_0$的相对

位置不变。因为 $\delta = 0$ 且$\underline{U}_S = \underline{E}_0$，电机中没有定子电流且不存在电磁转矩。转子转速的变化由 $\mathrm{j}\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = T_{em} - T_m$决定。随着负载转矩增加，转子速度降低。转子开始落后于$\underline{U}_S$并落后于定子磁场。相对于$\underline{E}_0$，电压矢量$\underline{U}_S$超前，因此，功角 δ 增大。功角增大影响输入电功率P_e和电磁转矩T_{em}。因为转矩T_{em}随 δ 增大，它抵消负载转矩T_m的增加，并阻止转子转速的进一步降低。对于这个暂态的衰减，必须是转子转速$\Omega_m < \Omega_e$恢复到同步速Ω_e。因此，转矩T_{em}必须在短暂的时间内超过运动阻转矩T_m，以得到正的加速度 $\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$。这段短暂的加速是必要的，以使转子转速恢复到正常值，即同步速Ω_e。功角的导数 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 由同步速和转子转速间的差值决定，$\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = \omega_e - \omega_m = p(\Omega_e - \Omega_m)$。当$\omega_e = \omega_m$时达到新的平衡状态，此时 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t = 0$。

根据式（20.6），同步电机的功率取决于空载电动势、定子电压和功角。电动势E_0由励磁电流决定。假设乘积$E_0\sin(\delta)$ 保持不变，那么E_0和 δ 取不同的值仍能产生一样的功率和转矩。因此，在不同的励磁电流和励磁磁链Ψ_{Rm}下，电机能保持一样的功率。这个自由度可以用于调整电机和供电电源间交换的无功功率Q_e。

考虑到无功功率Q_e的符号，有一个惯例认为从电网获得的无功功率传递给电感性负载（比如线圈，其负载电流滞后于供电电压）时是正的。像电容这样的接受器从电网得到的无功被认为是负的。电容电流超前于供电电压。所有这种性质的负载都可以被认为是无功发生器。绝大部分连接到分布式电网的负载和器件都是感性的，包括电动机、变压器和所有含有一系列电感的器件。平行电容器经常连接起来被用作无功补偿器，以弥补其他负载产生的无功。

在式（20.5）的基础上，一台各向同性同步电机从电网得到的无功为

$$Q_e = 3\,\frac{U_{Sn}(U_{Sn} - E_0\cos(\delta))}{X_S} \tag{20.7}$$

通过降低励磁电流I_R，空载电动势$E_0 = \omega_m L_m I_R$也会降低，它可能会小于电网的电压。随着$U_{Sn} > E_0$，无功Q_e是正的，因此，电机是感性负载。随着励磁电流和电动势E_0充分增加，表达式（20.7）会变成负的。因此，励磁电流的增加会导致无功为负值。这种情况下，电机是容性负载。所以，励磁电流的变化会改变电动势并使电机吸收或是产生无功Q_e。

水力发电厂和热电厂中的同步电机提供连接到电网的电气负载所消耗的有功。大部分电气负载都是感性的，它们吸收无功。因此，除了产生有功，大部分发电机也要产生无功。发电机产生的无功的多少由励磁电流控制。在带正弦电压和电流的三相对称系统中，关系式$S^2 = P^2 + Q^2$将视在功率 S、用功 P 和无功 Q 联系起来。在连续工作中，视在功率 S 受额定电压和额定电流的限制。因此，在连续工作中，无功的增加会减少电机能够输送的有功。

无功Q_e的增加会导致视在功率增加。因此，它也增大的定子电流。因为定子绕组中的铜耗，在连续工作中能承受的定子电流是受限制的。过量电流会导致过热。因此，稳态电流不能超过额定电流I_n。额定电压和额定电流决定了额定视在功率S_n。从稳态（$P = P_n$，$Q = Q_n$）开始，无功的增加会增加视在功率使其超过额定水平S_n。为了避免过

热，从发电机获得的有功必须减少。

假如电力用户消耗的无功通过分布在电力传输和分布配电网中的平行电容得到补偿，利用同步发电机获得无功就可以舍弃了，因为无功发生器，同步发电机的有功不一定要降低。

20.5 凸极电机的矢量图

各向异性电机在同步旋转 dq 坐标系 d 轴和 q 轴上虚拟定子相的电感不一样。因此，各向异性电机的矢量图比各向同性电机的矢量图要复杂得多。因为$L_d \neq L_q$，定子绕组上的电压平衡不能用关系式$\underline{U}_S = \underline{E}_0 + \underline{Z}_S I_S = \underline{E}_0 + (R_S + j\omega_m L_S)\underline{I}_S$表达，因为定子电感上的压降$L_d \omega_m I_d$和$L_q \omega_m I_q$具有不同的自感值。定子电压的有功部分和无功部分必须分开计算，因为它们不能用 $j\omega_m L_S \underline{I}_S$表示。因此，$U_d = R_S I_d - \omega_m L_q I_q$，同时$U_q = E_0 + RI_q + \omega_m L_d I_d$。电抗$\omega_m L_d$和$\omega_m L_q$分别用$X_d$和$X_q$表示。

绘制稳态运行时的矢量图，稳态运行时转子的电角速度$\omega_m = p\Omega_m$等于电源角频率ω_e。沿 d 轴和 q 轴的电压平衡方程为

$$\begin{aligned} U_d &= -U_s \sin\delta = R_s I_d - \omega_e L_q I_q \\ U_q &= +U_s \cos\delta = R_s I_q + \omega_e L_d I_d + \omega_e \Psi_{Rm} \end{aligned} \quad (20.8)$$

在这些等式中，变量$\Psi_{Rm} = L_m I_R$表示穿过气隙环绕定子绕组的转子磁链。这个定义也被用于永磁电机中，此时Ψ_{Rm}表示环绕定子绕组的永磁体磁链。通过解式（20.8）就得到了定子电流I_d和I_q（式（20.9））。图 20.5 给出了各向异性电机中电压、电流、电动势和磁链矢量间的关系：

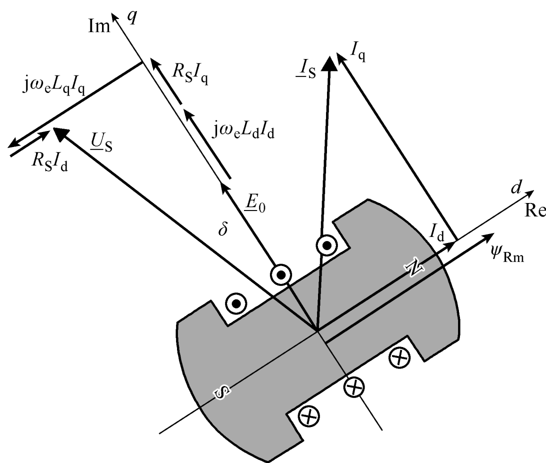


图 20.5 各向异性电机的矢量图（$\omega_m = \omega_e$）

$$I_q = +\frac{U_s \sin\delta}{\omega_e L_q} = \frac{U_s \sin\delta}{X_q}$$
$$I_d = \frac{U_s \cos\delta - \omega_e \Psi_{Rm}}{\omega_e L_d} = \frac{U_s \cos\delta - E_0}{X_d} \qquad (20.9)$$

20.6 凸极电机的转矩

通过选择实轴与转子磁链共线的复平面，如图 20.5 所示，定子电压矢量$\underline{U}_S = U_d + jU_q$等于$-U_S \sin(\delta) + jU_S \cos(\delta)$，其中$U_S = |\underline{U}_S|$，$\delta$表示功角，即$\underline{U}_S$和$\underline{E}_0$间的夹角。式（20.8）给出了绕组上的电压平衡，在此基础上，可以计算电流I_d和I_q。在大功率同步电机中，定子电阻R_S上的压降可以忽略。从式（20.9）得出：

$$I_q = \frac{U_s \sin\delta}{X_q},\ I_d = \frac{U_s \cos\delta - E_0}{X_d}$$

因为上面用到的符号表示电压和电流的有效值，电机从供电电网吸收的功率为$P_e = \mathrm{Re}(3\,\underline{U}_S \underline{I}_S^*) = 3(U_d I_d + U_q I_q)$。因为$R_S \approx 0$，所以绕组中没有显著的铜耗。此外，定子磁路中的铁耗也被忽略了。因此，输入功率P_e经过气隙传递给转子，转化为机械功率。所以P_e等于机电能量变换的功率。转矩可以通过功率P_e除以同步速$\Omega_e = \omega_e / p$得到：

$$T_{em} = \frac{P_e}{\Omega_e} = \frac{3p}{\omega_e}\left[-U_S \sin(\delta)\left(\frac{U_S \cos(\delta) - E_0}{X_d}\right) + U_S \cos(\delta)\left(\frac{U_S \sin(\delta)}{X_q}\right)\right]$$
$$= \frac{3p}{\omega_e}\frac{U_S E_0 \sin(\delta)}{X_d} + \frac{3p}{\omega_e}\frac{U_S^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin(2\delta) = T_{EXC} + T_{REL} \qquad (20.10)$$

转矩T_{em}的一个组成部分T_{EXC}是励磁磁通和定子电流的乘积，它取决于电动势和定子电压。转子磁场和定子电流相互作用产生电动势，进而产生T_{EXC}。这个转矩分量等于：

$$T_{EXC} = \frac{3p}{\omega_e}\frac{U_S E_0 \sin(\delta)}{X_d} \qquad (20.11)$$

转矩分量T_{REL}被称为磁阻转矩。它不取决于励磁磁通Ψ_{Rm}，它甚至存在于励磁磁通等于零的电机中。磁阻转矩将转子向磁阻最小的位置推进。也就是说，转子趋于转向沿定子磁链路径上磁阻最小的位置。假设$L_d > L_q$，则磁阻转矩的作用使d轴运动到与定子磁链成一条直线的位置。根据矢量图，磁阻转矩的作用方向与q轴和定子磁链$\underline{U}_S$一致。转矩分量T_{REL}取决于定子电压的平方：

$$T_{REL} = \frac{3p}{\omega_e}\frac{U_S^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin(2\delta) \qquad (20.12)$$

20.7 随功角变化的转矩

图 20.6 给出了各向异性电机的转矩随功角的变化。在功角小于 π/2 时转矩达到最大值。最大转矩受电抗限制。像感应电机的最大转矩一样，电抗（电感）小的同步电

机最大转矩值更大。

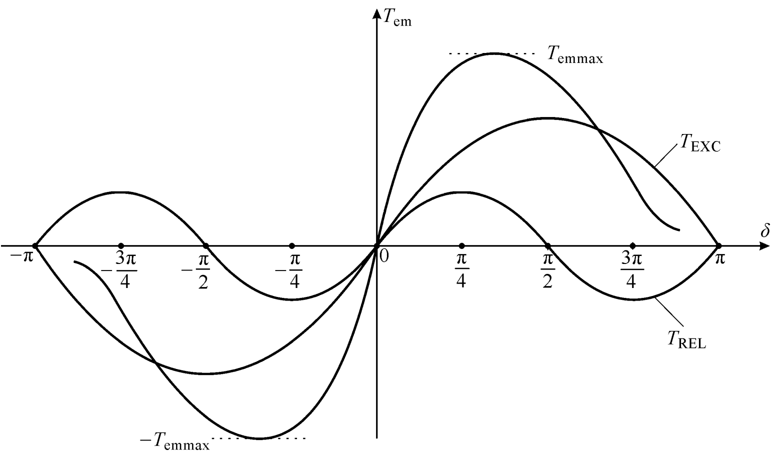


图 20.6　各向异性电机转矩随功角的变化

如果是各向同性电机，有$X_d = X_q = X_S$。在功角 $\delta = \pi/2$ 时可以从各向同性电机得到最大转矩，其值为

$$T_{em\,max} = \frac{3p}{\omega_e}\frac{U_S E_0}{X_d} \tag{20.13}$$

20.8　机械特性

一台电机的机械特性$T_{em}(\Omega_m)$是稳态时电磁转矩与转子转速间的关系。它取决于电源电压的幅值和频率。在额定电源条件下得到的机械特性称为固有特性。同步电机的机械特性如图 20.7 所示。图 20.6 不是机械特性，反而给出了电磁转矩与功角的关系，$T_{em}(\delta)$，然而机械特性$T_{em}(\Omega_m)$给出的是电磁转矩与转子转速间的关系。$T_{em}(\delta)$和$T_{em}(\Omega_m)$的关系都是在稳态下定义的。只有在转子转速Ω_m与定子磁场的旋转速度一致时同步电机才处于稳态运行，定子磁场的转速用Ω_e表示，称为同步速。因此，同步电机的机械特性$T_{em}(\Omega_m)$是一条受$\Omega_m = \Omega_e$限定的直线。在图 20.7 中直线$\Omega_m = \Omega_e$的端点处，转矩达到峰值。转矩的峰值受电机电抗限制，它等于$T_{em\,max}$ =

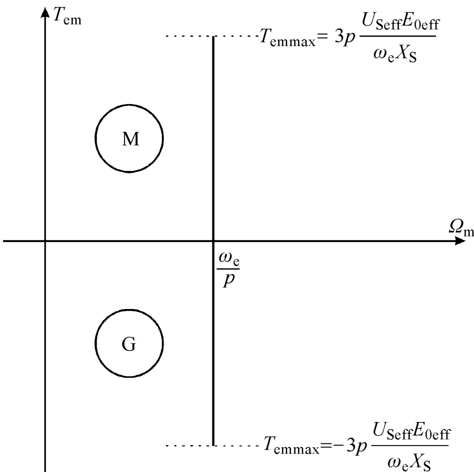


图 20.7　机械特性

$3pU_S E_0/(\omega_e X_S)$。

20.9　由刚性电网供电的同步电机

大部分同步电机与电压频率为 50Hz 或是 60Hz 的三相电网连接。其他的电机由静态变频器供电，变频器提供频率和幅值变化的三相电压。对于前者，定子频率ω_e和电压幅值由外部因素决定，是不能改变的。电压频率和幅值不变、保持恒定的电网被称为刚性网络。由刚性网络供电的同步电机，同步速不能改变，转子转速的稳态值保持恒定。对于后者，电机由独立的电源供电，静态变频器产生幅值和频率可调的三相电压。在大多数这样的情况中，静态变频器只给一台电机供电。因此，定子电压的频率和幅值调整变化，以获得希望的磁链和希望的转子转速。

在水力发电厂和热电厂中，大功率的同步电机作为发电机与恒频率的三相电网连接。电机通过汽轮机或水轮机的轴获得机械功率，然后转换为电功率供给电网。大容量同步发电机的额定电压从 6kV 到 25kV，它们与额定电压为 110kV 到 700kV 的输电网连接。每台同步发电机都有专门的变压器将电机定子端线与高压输电网连接起来。

功率低点的同步电机用于拖动控制系统，此时每台电机由专门的静态变频器提供频率和幅值可变的电压。拖动控制系统包括汽车推进、工业机器人控制、专用机床的运动和其他相似的任务，这些任务需要提供转子位置、速度和转矩的连续变化。在拖动控制系统中，同步电机仅作电动机运行来克服工作机器内的运动阻力。在速度控制回路中，同步电动机用作转矩驱动器，它们的任务是提供与转矩指令一致的转矩。转矩指令在速度控制器里计算得到，它与需要克服的运动阻力转矩一致，以获得希望的转速。假如转子转速变化时转矩变化需要定子电压频率和幅值连续变化，这通过三相变频器给定子绕组供电得到，变频器包含半导体功率开关并基于脉冲宽度调制理论工作。

研究上面提到的两种情况中同步电机的运行是很有意义的。首先考虑的是由刚性网络供电的同步电机的运行。接下来章节的分析将考虑连接到三相对称网络的同步电机，其电压具有恒定的频率和幅值。为了不缺乏普遍性，假定同步电机的轴与提供机械功的驱动涡轮连接，同步电机作发电机运行，将机械功变换为电能。通过图 20.1 中的稳态等效电路和图 20.2 的矢量图分析同步电机的稳态性能。在进一步的讨论中，将研究功角 δ 的变化对电磁转矩（式（20.3））和有功、无功（式（20.5））的影响。在稳态运行时，驱动涡轮转矩的逐渐变化会导致功角和有功的变化，同时励磁电流的变化会影响无功。

20.10　同步发电机的运行

热电厂和水力发电厂中的同步发电机的额定电压从 6kV 到 25kV，额定功率从几十 MW 到几百 MW。发电机的轴耦合到汽轮机或水轮机，它们提供驱动力矩$T_T>0$。这个转矩支撑转子的旋转，因此，牛顿运动方程采用如下形式 $J\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t = T_{em} + T_T$。在稳态

时，$\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t=0$，因此，发电机的电磁转矩是负的，且等于$T_{em}=-T_T$。机电能量变换的功率$P_e=T_m\Omega_m$也是负的，说明电机中机电能量变换具有相反的方向，因为机械功变换为电能。在发电机矢量图（图20.4）中，电动势$\underline{E}_0$超前于电压$\underline{U}_S$，因此，功角δ是负的。在发电机模式下，从电网传递给电机的功率P_e是负的，它等于：

$$P_e=3\frac{U_{Sn}E_0}{X_S}\sin\delta=-P_G \tag{20.14}$$

其中P_G表示由发电机传递给电网的有功功率。假设电网的频率恒定，功角的变化可以描述为$\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t=\omega_e-p\,\Omega_m$。因为$\omega_e$恒定，所以转子转速的增加会导致功角的减小。在$\Omega_m=\omega_e/p$时达到平衡点。

假设驱动涡轮转矩T_T和频率ω_e有一点点变化时，研究同步发电机的运转情况是很有意义的。

20.10.1　涡轮机功率的增加

根据需要，汽轮机或水轮机的功率可以增大或减少。通过打开或是关闭由锅炉供给给汽轮机的蒸汽的阀门，也可以通过操作提供给锅炉空气和煤粉的阀门，都可以改变汽轮机的功率。通过相似的方法也可以改变水轮机的功率。涡轮功率的增加导致更大的涡轮转矩T_T，它传递给同步发电机，趋于使转子增速。从$T_{em0}=-T_{T0}$的平衡状态开始，涡轮转矩增大到一个新值$T_{T1}=T_{T0}+\Delta T$，根据等式$J\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t=T_{em}+T_T=+\Delta T$，会导致转子转速的增加。

根据$\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t=\omega_e-p\Omega_m$，转子转速的增加会改变功角$\delta$。电动势$\underline{E}_0=\mathrm{j}p\Omega_m\Psi_{Rm}$的运动由转子转速决定，而电压$\underline{U}_S$以同步速$\Omega_e=\omega_e/p$旋转，由电网频率决定。随着转子转速的增加，功角$\delta$减小，电动势相比定子电压超前的相位$-\delta$增大。在发电机模式下，功角呈现负值，在负方向上它会变得更大。发电机功率$P_G=-P_e=-3(U_{Sn}E_0/X_S)\sin(\delta)$增大。随着功率增大，电磁转矩$T_{em}=P_e/\Omega_e<0$的振幅增大。因为$J\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t=T_{em}+T_T$，当电磁转矩的值达到$T_{em}=-T_{T1}$时，将到达一个新的平衡$\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t=0$。暂态过程发生并到达新平衡的本质将在稍后讨论。在这个新的稳态中，发电机传递给输电网的电功率增加了。假设电网里额外的功率被连接到电网的电气负载消耗电功率的增加抵消了。如果假设电网是刚性的，上面考虑的额外功率不会造成任何问题。但在实际电网中，无论电网多大，因为电功耗的变化或是汽轮机和水轮机传递功率的变化，都会导致电网频率出现小的变化。

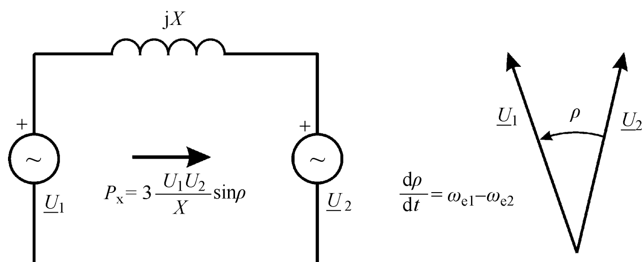
现在想象这样一个实验，一片电网拥有几台发电机和一些恒定功率的电气负载，考虑当所有的汽轮机和水轮机同时增加它们的机械功率时是很有意思的。如果所有的电气负载仍然保持一样的功率，那么所有发电机产生的功率也必须保持不变。也就是说，除非有另外的声明，那么电网没有办法积累或是储存多余的电能。因此，所有同步发电机产生的功率必须保持恒定。因为$P_G=-P_e=const$，所以电磁转矩T_{em}也必须保持恒定。根据牛顿运动公式$J\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t=T_{em}+T_T$，在$T_{em}$保持不变的情况下，$T_T$的增加会导致转子转速的增加。因此，在考虑的实验中，所有发电机的转子转速加快，这样增加了所考虑

电网的频率。来自汽轮机和水轮机的额外的能量没有转换为电能，而是作为旋转体的动能储存起来，$W_{kin}=\sum\frac{1}{2}J\Omega_m^2$。如果涡轮额外的功率持续增加，那么因为同步电机转子转速的持续增加，电网的频率也会持续增加。

在实际的电网中，频率的升高意味着从汽轮机和水轮机得到了额外的功率，而频率的降低意味着传递到发电机的机械功率缺乏或是过负载。

问题（20.4）：问题基于上面考虑的实验，其中汽轮机和水轮机的功率增加；电气负载消耗的功率保持恒定；转子转速和频率上升。假设上面考虑的电力系统通过一条高压输电线连接到大得多的电力系统，这第二个、大得多的电力系统可以认为是刚性网络。知道输电线的串联电抗X_S，也知道两个电力系统的电压幅值分别为U_1和U_2，两个系统都是三相对称的。考虑这样的连接对有额外功率的电网的影响。

解答（20.4）：两个电压分别为U_1和U_2的电力系统，由串联电抗为 X 的输电线连接起来，可以用由串联阻抗为 jX 连接起来的两个电压源表示。这种表示与图 20.1 中的等效电路类似，图 20.1 中的电压$\underline{U}_S$通过串联阻抗与电压$\underline{E}_0$连接。



矢量$\underline{U}_1$和$\underline{U}_2$有一样的相位差ρ。这个相位差根据等式 $d\rho/dt=\omega_{e1}-\omega_{e2}$变化，其中$\omega_{e1}$为第一个电力系统的频率，$\omega_{e2}$为第二个系统的角频率。根据式（20.6），两个系统间交换的功率可以用式$P_x=3(U_1U_2/X)\sin\rho$ 表示。随着第一个电力系统中涡轮机械功率的增加，因为第一个电力系统内的同步发电机转子转速增加，频率ω_{e1}也会增加。同时，第二个、更大的电力系统的频率ω_{e2}保持不变。因为 $d\rho/dt>0$，所以角度 ρ 增大。因此，矢量$\underline{U}_1$超前$\underline{U}_2$的相位增大，功率$P_x\sim\sin\rho$。因此，第一个电力系统额外的功率传递给第二个电力系统。从长远来看，会出现一个$\omega_{e1}=\omega_{e2}$的新平衡状态。

需要注意的是两个电力系统间能量和功率的交换是自动的，不需要操作人员转换任何开关或是发出任何指令。同时，两个电力系统的连接有助于解决一个电力系统暂时的功率过剩，也有助于解决功率消耗短暂的增加。

20.10.2 频率的增加

电网的频率决定定子电压$\underline{U}_S$的相位角。当电网频率增大时，功角 δ 会改变。考虑 $\delta<0$的同步发电机，功角按时间的导数 $d\delta/dt=\omega_e-p\,\Omega_m$，功角的负值变得越接近 $\delta=0$。发电功率$P_G=-3(U_{Sn}E_0/X_S)\sin\delta$ 降低，电磁转矩的振幅也会降低。这些考虑可以用于

任意与电网连接的同步发电机。因此，每当电力系统的频率$\omega_e=2\pi f_e$增加，从同步发电机得到的功率减少。同时，电气负载消耗功率的突然增加会降低旋转转子的速度，导致频率的降低。

在上面例子的基础上，可以得出带有同步发电机的电力系统在功率和频率间有很强的耦合。这个$P-f$关系式电力系统基本性质之一，它提供了功率调节和频率调节的基础。

20.10.3 无功功率和电压变化

对于不同电磁转矩值和不同功角值的同步发电机，其传递的功率为$P_G=-3(U_{Sn}E_0/X_S)\sin\delta$。为了保持恒定的输出功率，需要保持$E_0\sin(\delta)$恒定。通过改变发电机的励磁电流可以改变电动势$E_0$。改变励磁电流、改变磁链$\varPsi_{Rm}$和电动势$E_0=\omega_m\varPsi_{Rm}$是可能的，但是为了保证功率不变，需要乘积$E_0\sin(\delta)$不变。这个自由度可以用于改变电机从三相电网吸收的无功Q_e。各向同性同步电机的无功与定子电压和电动势E_0间的差值成正比：

$$Q_e=3\frac{U_{Sn}(U_{Sn}-E_0\cos(\delta))}{X_S} \tag{20.15}$$

通过增大励磁电流I_R，电动势$E_0=\omega_m L_m I_R$变得比定子电压大，因此，无功Q_e变为负值。这样，同步发电机就变成了无功的来源，它的等效阻抗具有容性。大部分电气负载都是感性的，它们消耗无功，像线圈一样。因此，电力系统必须包含足够的无功电源。

通过输电线传输无功会导致显著的电压降。大多数输电线的等效串联电抗X远远大于等效串联电阻R。假设三相电气负载接在输电线的末端，它吸收的无功为Q，它的电压$\underline{U}_{END}=U_{END}$，输电线中流过的电流为$\underline{I}=-jQ/(3U_{END})$。输电线首端的电压为$\underline{U}_{BEG}=\underline{U}_{END}+jX\underline{I}=U_{END}+XQ/(3U_{END})$。电压降$jX\underline{I}$与电压共线（相位上）。因此，直接从$U_{BEG}$中减去$XI$以得到$U_{END}$。

需要注意的是由吸收有功$P=Q$的电感负载代替消耗无功的负载会导致电压降显著降低。对于电阻负载，形同幅值的电流会使$\underline{U}_{BEG}$和$\underline{U}_{END}$的幅值差别小得多。因为$\underline{I}=P/(3U_{END})$，$\underline{U}_{BEG}=\underline{U}_{END}+jXP/(3U_{END})$。电压降$jX\underline{I}$与$U_{END}$正交（相位移动$\pi/2$），这种情况导致$|\underline{U}_{BEG}|-|\underline{U}_{END}|\ll XI$。

每当电气负载吸收无功，输电线上都存在相当大的电压降。因此，需要增大同步发电机的定子电压以维持电气负载的电压不变。为了实现定子电压增大，需要增大同步发电机的励磁电流I_R，这会导致磁链$\varPsi_{Rm}$和电动势E_0增大。同时，E_0的增大有助于增加发电机传输到电网的无功。

基于上面的考虑，可以得出电网电压和无功流动是密切相关的。这个U-Q关系构成电力系统电压控制的基础。

20.10.4 功角变化

从汽轮机或水轮机得到的机械功率的变化会导致同步电机的暂态响应，以功角值不

同的新的稳定状态结束。发电机的电气负载的突然增加也会产生相似的效应。研究这个暂态过程中电机转矩、功率和功角的暂态响应是很有意义的。

随着恒定的供电频率，定子电压矢量以恒定同步速$\Omega_e=\omega_e/p$旋转，同步速由供电频率ω_e决定。转子磁链由励磁绕组中的电流I_R产生，随转子旋转。因此，转子磁链矢量以转子转速Ω_m旋转。励磁磁链$\underline{\Psi}_{Rm}$在定子绕组中产生电动势$\underline{E}_0=j\underline{\Psi}_{Rm}\Omega_m$。在稳态时，定子电压和电动势分别用矢量$\underline{U}_S$和$\underline{E}_0$表示。功角$\delta$代表定子电压和电动势初始相位间的差值。它根据法则$d\delta/dt=\omega_e-\omega_m=\omega_e-p\,\Omega_m$变化㊀。定子电压的相位取决于供电频率$\omega_e$，而电动势的相位取决于转子转速$p\,\Omega_m$。因此，功角$\delta$的变化由同步速和转子转速间的差值决定。同时，运行于稳态的同步电机的电磁转矩由U_S、E_0和功角的正弦值的乘积决定。

图 20.8 给出了转矩随功角的变化。当电机空载运行时，功角和电磁转矩等于零。如果出现使转子减速的阻转矩T_m，因为功角的一阶导数$d\delta/dt=\omega_e-p\,\Omega_m$变成正的，所以功角增大。功角的增大会增大电磁转矩，当$T_{em}=T_m$时达到新的平衡。

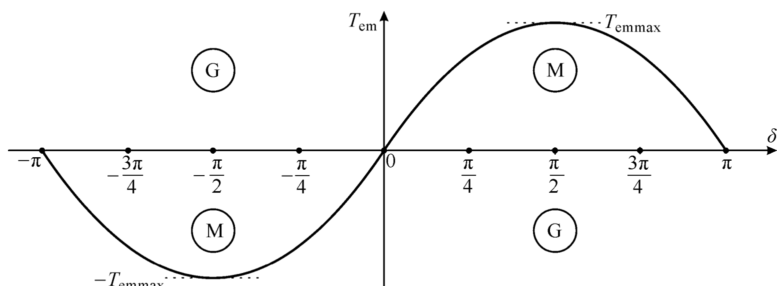


图 20.8　各向同性电机转矩随功角的变化

假设电机与提供转矩T_T的汽轮机或水轮机连接，T_T使转子加速，那么转子转速Ω_m将超过同步速Ω_e，功角$d\delta/dt=\omega_e-p\,\Omega_m$获得一个负的一阶导数值和一个负值。$\delta$为负值意味着电动势矢量$\underline{E}_0$超前电压$\underline{U}_S$。电机产生于转子运动反向相反的电磁转矩$T_{em}<0$，因此，电机作发电机运行，将机械功变换为电能。

假设功角相当的小，采用近似$\sin(\delta)\approx\delta$是合理的，转矩$T_{em}$可以用近似表达式$T_{em}\approx k\delta$表示。在稳态时，电磁转矩与机械子系统产生的转矩分量平衡。当电机作电动机运行时，电磁转矩等于运动阻转矩T_m。当电机作发电机运行时，电磁转矩等于汽轮机或水轮机提供的转矩。在两种情况中，转子转速都不变，因为电动机模式下$Jd\Omega_m/dt=T_{em}-T_e=0$，发电机模式下$Jd\Omega_m/dt=T_{em}+T_T=0$。在稳态时，转子以同步速$\Omega_m=\Omega_e$旋转。确定诸如负载转矩变化或是频率变化等扰动引起的暂态过程的特性是很有必

㊀ 在矢量图中，矢量$\underline{U}_S$和$\underline{E}_0$代表交流定子电压和交流电动势。功角δ代表定子电压和电动势间的相位差。因此，功角的一阶导数为$d\delta/dt=p(\Omega_e-\Omega_m)=\omega_e-p\,\Omega_m=\omega_e-\omega_m$，其中$p$为极对数。

要的。在随后的分析中，假设磁极对数为 $p=1$，因此，电气变量的角频率ω_m和ω_e等于相应的机械转速Ω_m和Ω_e。因此，牛顿运动等式可以写为 $J\mathrm{d}\omega_m/\mathrm{d}t=T_{em}-T_m$，其中$T_m$代表运动阻转矩。或者 $-T_m=T_T$代表汽轮机或水轮机的驱动转矩。考虑到这一点，功角的变化由下式决定：

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}=\omega_e-p\,\Omega_m=\omega_e-\omega_m \tag{20.16}$$

两极电机的牛顿运动公式采用如下形式：

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_m}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t}=T_{em}-T_m \tag{20.17}$$

同时功角的变化取决于微分方程：

$$J\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2}=-T_{em}(\delta)+T_m \tag{20.18}$$

从 $\delta=0$、$T_{em}=0$、$\omega_m=\omega_e$的空载条件出发，引入一个负载转矩T_m（或是涡轮转矩T_T）的阶跃变化，随之出现一个转子转速、电磁转矩和功角波动变化的暂态过程，最后进入另一个稳态。考虑到 dq 坐标系的位置是由转子位置决定的，而定子电压矢量取决于供电频率，可以得出定子电压矢量会相对选择的 dq 坐标系运动。因为如此，定子电压矢量$\overrightarrow{U_S}$在暂态过程中在 dq 坐标系轴线上的投影U_d和U_q会变化。同步电机的电气子系统由布置在 dq 坐标系 d 轴和 q 轴上的虚拟定子绕组的电压平衡方程表示。相应电压U_d和U_q的变化会使磁链Ψ_d和Ψ_q的导数不为零，因此将电气子系统带入暂态。所以，在机械子系统的电磁转矩、转子转速和功角呈现瞬时变化的暂态中，同步电机的电气子系统不保持稳态，它会进入自身的暂态中。

在暂态条件下，同步电机的电气子系统不能用稳态等效电路表示。同时，瞬时转矩不能用诸如从稳态等效电路中推导得到的$T_{em}\approx k\delta$ 这样简化的式子表达。

在下一章中，将说明机械子系统的时间常数远远大于电气子系统的时间常数。这个条件将用于简化同步电机的暂态分析。

第 21 章　同步电机瞬态运行

本章分析和讨论了连接到无穷大电网的同步电机的瞬态响应。由于状态变量数目较多，比如说转子的位置和速度，绕组电流和磁链，所以同步电机的电气和机械子系统的瞬态分析比较复杂。复杂的数学模型并不能帮助我们理解瞬变的过程，而且妨碍了相应结论的推导。如果假设电气子系统中瞬态衰变速度远远大于机械子系统，那么该分析就可以得到简化。通过这种方法，我们可以使用稳定的电气子系统模型来分析机械子系统中的瞬态，从而使得结果更加清晰和直观。

本章首先介绍并解释了描述同步电机电气子系统和机械子系统瞬态响应的时间常数。对于无穷大电网中的同步电机而言，电磁转矩由功率角来表示。通过牛顿运动微分方程和转矩－功率角的关系，可以获得转子速度、功率角和电磁转矩的瞬态响应。为了抑制转矩、功率和速度的振荡，我们引入阻尼绕组的概念，而这些振荡是由访问机器时的电气和机械特性突变引起的。其次，本章当中也介绍并讨论了一些典型的阻尼绕组的实现。

本章节的下半部分着重分析了同步发电机的短路瞬态。为了简化短路分析，我们假设在次瞬态时间间隔内阻尼绕组的瞬态过程首先发生衰减，而励磁绕组的瞬态过程停止在随后的时间间隔，我们称之为瞬态时间间隔。最终，瞬态现象消失，定子电流降低为稳态短路电流。基于一系列合理的假设和工程方面的考虑，我们就可以得到次瞬态和瞬态时间常数，次瞬态、瞬态、稳态电抗以及短路电流。本章最后会提供一些典型的相关时间常数和电抗的值。

21.1　机电时间常数

电气子系统中的瞬变现象包括了绕组电流，气隙中的磁通以及相应的磁回路。电机绕组中的瞬态响应由电气时间常数来描述。当电压为零时，阻抗为 R 的绕组中流过的电流成衰减趋势，$i(t)=i(0)\cdot e^{-t/\tau}$，式中 $\tau=L/R$ 为绕组的电气时间常数，L 为自身电感，而电流的此种变化发生在该绕组与其他任何绕组没有耦合的情况下。在同步电机中，定子相绕组及励磁绕组耦合，它们相互作用并影响电流和磁链的变化。因此，瞬态响应可能并不成指数规律变化，时间常数也不再 $\tau=L/R$。尽管如此，$\tau=L/R$ 仍可以粗略描述电气子系统中的动态过程。对于小功率电机，绕组的时间常数为几十毫秒的量级，而大功率电机时间常数 $\tau=L/R$ 超过 1s。另一方面，机械子系统中的瞬态现象是比较缓慢。同步发电机拥有具有显著惯性的庞大转子。它连接到具有确定的转动惯量 J 的蒸汽和水涡轮机上面。当转子速度发生变化时，由于惯性较大，机械子系统的瞬态响应时间常数远大于电气子系统。考虑到这一点，机械子系统的瞬态分析可以得到简化。当

在机械子系统中引入干扰时，比如转矩变化，那么电气子系统也会受到干扰。由于电气时间常数较短，故而电气子系统的瞬态过程会很快衰减。因此电气子系统可以由稳态等效电路来模拟。对于机械子系统中的瞬态过程中最大的一部分，电磁转矩可以通过式（20.11）进行建模，而且认为它正比于 $\sin(\delta)$。

忽略瞬态现象中的绕组，并考虑其瞬态过程比机械子系统更快，可以认为电磁转矩的改变正比于 $\sin(\delta)$。当 $T_{em}=0$ ，$\delta=0$ 时为空载工作点，在空载工作点分析相对较小的转矩变化时，电磁转矩可以近似为 $T_{em}\approx k\delta$。

21.2 同步电机的位置

瞬变过程当中，功率角的变化为 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t=\omega_e-\omega_m$。功率角的二阶导数为 $\mathrm{d}^2\delta/\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}\omega_e/\mathrm{d}t-\mathrm{d}\omega_m/\mathrm{d}t$。假设电源频率不发生变化，满足 $\mathrm{d}\omega_e/\mathrm{d}t=-\mathrm{d}^2\delta/\mathrm{d}t^2$。对于 $p=1$，$\Omega_m=\omega_m$ 的二极电机而言，牛顿运动方程表述为

$$J\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2}=-k\delta+T_m \tag{21.1}$$

差分方程（21.1）可以通过应用拉普拉斯变换转成代数方程，方程中的时间函数不再是 $\delta(t)$，而是 $L(\delta(t))=\delta(s)$，其中 s 表示拉普拉斯算子。假设负载转矩 $T_m(t)$ 在 $t=0$ 时刻从 $T_m(0^-)=0$ 变为 $T_m(0^+)=T_m$，负载转矩变化之前，系统处于稳态，即 $T_{em}=0$，$\delta(0)=0$，且 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t=0$，对微分方程（21.1）进行拉普拉斯变换得到：

$$J\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2}+k\delta=T_m(t)=>Js^2\delta(s)+k\delta(s)=T_m(s)=\frac{T_M}{s}$$

表达式 $T_m(s)=T_M/s$ 为 Heaviside 函数 $h(t)\cdot T_M$ 的拉普拉斯变换，描述在初始 $t=0$ 时的转矩提升。基于上述代数方程，功率角 $\delta(s)$ 与转矩的关系可以表示为

$$\delta(s)=\frac{1}{Js^2+k}\frac{T_M}{s}=W(s)\frac{T_M}{s}$$

函数 $W(s)$ 表述该系统的输入和输出，因此称之为传递函数。由于转矩变化发生在系统的瞬态，故而认为负载转矩 $T_m(t)$ 的拉普拉斯变换 $T_m(s)$ 是系统的输入，功率角 $\delta(t)$ 的拉普拉斯变换 $\delta(s)$ 作为系统响应，认为它是系统输出。传递函数的分母 $f(s)=Js^2+k$ 称之为特征多项式。

特征多项式为零时方程 $f(s)=0$ 的根称为传递函数的极点。这些极点决定了系统响应的特性，即响应呈现非周期性或振荡以及最终振荡的响应速度和衰减时间。在特征多项式 $f(s)=(s-s_1)(s-s_2)$ 中，存在两个有限零点 s_1 和 s_2，输入阶跃变化的 $T_m(t)$ 的系统响应 $\delta(t)$ 包含了 $\exp(s_1t)$ 和 $\exp(s_2t)$ 两个部分。当 $s_1=-1/\tau$ 时，系统响应为 $\exp(\pm\mathrm{j}\omega_0t)=\cos(\omega_0t)\pm\mathrm{j}\sin(\omega_0t)$，当 $s_1=-1/\tau\pm\mathrm{j}\omega_0$，系统响应为 $\exp(-t/\tau\pm\mathrm{j}\omega_0t)=\exp(-t/\tau)\cdot\cos(\omega_0t)\pm\mathrm{j}\cdot\exp(-t/\tau)\cdot\sin(\omega_0t)$。

特征多项式 $f(s)=Js^2+k$ 存在两个有限零点 $s_{1/2}=\pm \mathrm{j}\cdot \mathrm{sqrt}(k/J)=\pm \mathrm{j}\omega_0$。因此，认为同步电机的负载阶跃响应是振荡的。根据式（21.1）特征多项式在 s 平面的虚轴具有两个极点，$\pm \mathrm{j}\omega_0$。这意味着响应不发生衰减。

也就是说，所造成的载荷步振荡会持续下去。实际上，由于摩擦和继发效应以及未在式（21.1）中建模的损失，振荡会逐渐衰减。不过，衰减可能会非常缓慢。

有关响应振荡性的结论可以不借助于之前关于特征多项式和响应特性的讨论而得。取而代之的是人们可以依赖于机械子系统和串联 LC 电路之间的相似性进行讨论。该 LC 电路在 $t<0$ 时，$u_c=0$，$i_L=0$，在 $t=0$ 时刻连接到电压源 $+E$ 上。电压阶跃 $Eh(t)$ 的象函数为 E/s，电容与电感的阻抗分别为 $Z_c=1/(sC)$ 和 $Z_L=sL$，电容器电压为 $u_c(s)=\left(\frac{E}{s}\right)\cdot\frac{Z_c}{Z_c+Z_L}=(E/s)/(1+LCs^2)$。众所周知，串联的 LC 电路在输入发生阶跃变化时会产生振荡。LC 电路中电容器电压和电感电流的振荡角频率为 $\omega_0=1/\mathrm{sqrt}(LC)$，这是由方程 $1+LCs^2=0$ 的两个根 $s_{1/2}=\pm \mathrm{j}/\mathrm{sqrt}(LC)$ 决定的。在 $t<0$ 时，$u_c=0$，$i_L=0$ 的 LC 电路中，输入电压 $Eh(t)$ 在 $t=0$ 时发生阶跃变化，电容器两端的电压按照 $u_c(t)=E\left[1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right]$ 进行变化。

类比于 LC 电路，特征多项式为 $f(s)=Js^2+k$（即为传递函数的分母）的同步电机的振荡角频率为 $\omega_0=\mathrm{sqrt}(k/J)$。无论惯量 J 和系数 k 的值为多少，功角象函数 $\delta(s)$ 都可以通过求解代数方程 $Js^2\delta(s)+k\delta(s)=T_m(s)$ 得到，而响应 $\delta(t)$ 及其特性取决于特征方程 $f(s)=s^2+\frac{k}{J}=0$ 的零点。

负载转矩发生变化后的瞬态期间，电磁转矩也会发生变化，参照图 21.1。

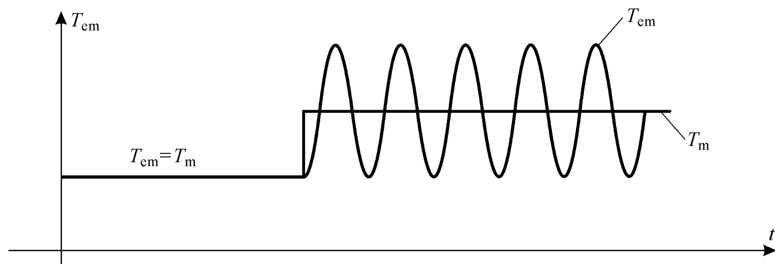


图 21.1　同步电机跟随负载阶跃的转矩响应

特别是在大功率的同步电机当中，速度、转矩和功率角是不允许振荡的[㊀]。在图 21.1 中，负载转矩从 $T_m=0$ 跃变为 $T_m=T_M$，电磁转矩 T_{em} 在 0 到 2 T_M 之间进行无阻尼

㊀ 转矩和电流的持续振荡增加了定子电流的均方根值，增加了铜耗，增大了机械应力，损害了轴和传动元件的工作，增大了噪声并减小了转矩和功率的峰值。

振荡。

在无穷大电网中的同步电机中，由机械子系统的阶跃变化引起的振荡被称为同步电机的位置。转矩和功率角的变化可以表述为

$$T_{em}(t)=T_M(1-\cos\omega_0 t),\ \delta(t)=\frac{T_{em}(t)}{k}=\frac{T_M}{k}(1-\cos\omega_0 t)$$

功率角的一阶导数为 $d\delta/dt=\omega_e-\omega_m=(T_M/k)\ \omega_0\sin\omega_0 t$ 而且其平均值为零。因此在同步电机中，转子的速度 $\Omega_m(t)$ 接近同步速度 $\Omega_e(t)$。在瞬态期间，通过 $\Omega_e(t)$ 以及式 $\omega_e-\omega_m=(T_M/k)\ \omega_0\sin\omega_0 t$ 得到 $\Omega_m(t)$。然而，即使在瞬态转子速度的平均值始终等于同步速度。图 20.2 所示的相量图中，为了描述瞬态响应，相量 $\underline{E}_0$ 在 $\underline{U}_s$ 周围波动，但两者时钟有一定差距。

在振荡期间，功率角 δ 会慢慢接近 $\pi/2$。当 $\delta=\pi/2$ 时，电磁转矩 $T_{em}(t)$ 到达峰值 $T_{em\,max}$（式（20.13））。当 $T_M=T_{em\,max}/2$ 时，电磁转矩的振荡达到初始值的两倍，功率角 δ 达到 $\pi/2$。图 20.6 中，$\delta>\pi/2$ 的区域内电磁转矩并不随着功率角的增加而增加。相反，当 $\delta>\pi/2$ 时，电磁转矩减少，$dT_{em}(\delta)/d\delta$ 变为负值。式（21.1）中的系数 k 转矩-功角曲线的斜率，$k=dT_{em}(\delta)/d\delta$。当 $k<0$，$T_M>0$，$\delta>\pi/2$ 时，功角的二阶导数 $d^2\delta/dt^2=d\omega_e/dt-d\omega_m/dt$ 变为正。因此，$\omega_e-\omega_m$ 的差值不会减少。相反，它会继续增加，电机不再同步。这实际上意味着，当转子速度降低到某一程度时，电机再返回到同步是不可能的。由于速度差 $\omega_e-\omega_m$ 拥有一个非零平均值 ω_k，根据式 $\delta(t)\approx\omega_k t\approx(\omega_e-\omega_m)t$ 可知功角会逐渐增大。因此，电磁转矩的平均值变为等于零，$T_{em}\sim\sin(\delta)\sim\sin(\omega_k t)$。由于负载转矩 T_M 发生变化，转子速度会有所降低。

同步电机工作在发电状态时，由涡轮机驱动，$T_T=-T_m$，当功率角的瞬时值跌落到 $\delta=-\pi/2$ 时，电机不再工作于同步运行状态。在发电机模式下的牛顿方程 $Jd\Omega_m/dt=T_{em}T_m$ 当中，认为电磁转矩 T_{em} 和负载转矩 T_m 均为负值。当蒸汽或水涡轮机产生的驱动力矩 $T_m<0$ 时就会加速转子的运动，当电磁转矩 $T_{em}<0$ 时，就会阻碍转子的加速。稳态时，电动势 $\underline{E}_0$ 超前 $\underline{U}_s$，功率角变为负值，$0>\delta>-\pi/2$，如此就会产生电磁转矩和功率。当功角低于 $-\pi/2$ 时电机不再工作于同步运行。基于此，功角逐渐减低，就会产生振荡的且具有零平均值的电磁转矩。原动机持续提供正的转矩来加速转子，使得转子速度高于同步转速，为了防止同步电机脱离同步运行状态，必须提供阻尼振荡。

21.3　LC 阻尼电路

我们可以通过类比 LC 电路来分析同步电机的阻尼振荡。如图 21.2 所示，一个 LC 电路在 $t=0$ 时刻在串联电阻 R 上施加电压 E。

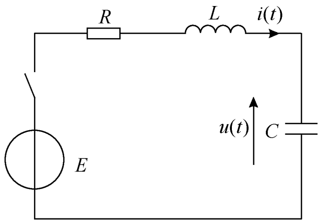


图 21.2　LC 阻尼振荡电路

施加电压之后，此 RLC 电路的电压和电流就会以角频率 $\omega_0=\omega_n\mathrm{sqrt}(1-\xi^2)$ 开始振荡，其中 ξ 是该 RLC 电路的阻尼系数。当电阻 R 为零时，ξ 也为零，振荡角频

率变为$\omega_0=\omega_n=1/\mathrm{sqrt}(LC)$。因此电容器两端的电压可以表示为

$$u_c(t)=E(1-\cos(\omega_n t))$$

当 $R>0$ 时，方程$f(s)=0$ 的根为$s_{1/2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_0$，负实部

$-\xi\omega_n=-1/\tau=-R/(2L)$。根据公式 $\exp(-\xi\omega_n t)=\exp(-t/\tau)$，由于响应$u_c(t)$中含有因子 $\exp(s_1 t)$，振荡的幅值会有所衰减。决定 RLC 电路响应的特征多项式为

$$f(s)=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

方程的根为$s_{1/2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=\xi\omega_n\pm j\omega_0$

电流响应和电压响应包含因子$e^{-s_1 t}=e^{-\xi\omega_n t}e^{j\omega_0 t}$

将方程$U_c(s)=(E/s)/(1+RCs+LCs^2)$ 进行逆变换就可以得到电容器两端的电压

$$u_c(t)\approx E-Ee^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_0 t)-\xi Ee^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_0 t)$$

由上述方程可以看出，电容器两端的电压在ω_0处进行阻尼振荡并以指数形式衰减。时间常数 $\tau=2L/R$ 决定了振幅衰减需要的时间，衰减因子 $e=2.71$。当 τ 超过振荡周期 $T=2\pi\mathrm{sqrt}(LC)$ 的数倍时，振荡则为弱振荡。更高的电阻值 R 会产生更短的时间常数 τ，更大的阻尼系数 ξ，从而引起更好的阻尼振荡。阻尼系数 ξ 等于$s_{1/2}$的实部和自然频率ω_n的比值。它的大小可以表示为 s 平面实轴的负部分和从原点开始结束于磁极s_1的半径之间角度的余弦值。图 21.3 为 $\xi<1$ 时的时间响应。该图的左侧是为图 21.3a，它表示磁极$s_{1/2}$在 s 平面中的位置，右侧的为图 21.3b，表示 RLC 电路的电容两端的电压的时间响应。

在衰减系数大于 1 的情况下，响应中不包含任何振荡而是呈指数变化

$$u_c(t)\approx k_1+k_2e^{-t/\tau_1}+k_3e^{-t/\tau_2}$$

时间常数 $\tau_1=-1/s_1$，$\tau_2=-1/s_2$是极点$s_{1/2}$的倒数。$\xi\geqslant 1$ 时，磁极是负实数没有虚数部分（见图 21.4）。

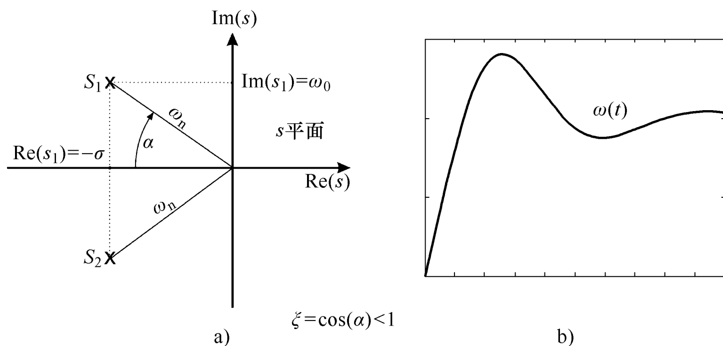


图 21.3　特征多项式零点为共轭复数

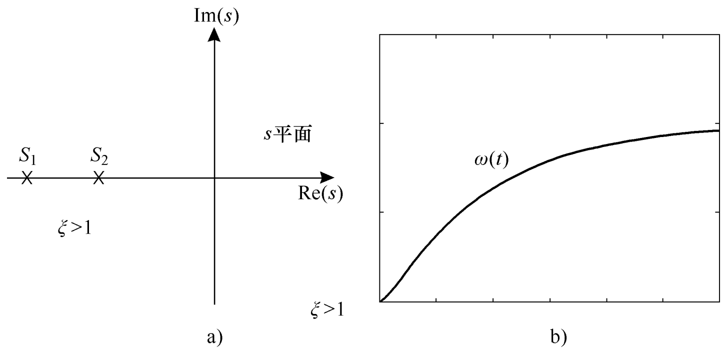


图 21.4 特征多项式零点为实数

21.4 同步电机的阻尼

为了在同步电机的瞬态响应中引入阻尼的概念，我们需要采取措施增大特征多项式 $f(s)=s^2+as+b=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$ 中与拉普拉斯算子相乘的系数 a。从牛顿微分方程（21.1）中获得的特征多项式 $f(s)=Js^2+k$ 不存在阻尼，于是产生了无阻尼，持续振荡的功率角 δ。为了产生阻尼，应该考虑以下方程：

$$J\frac{\mathrm{d}^2\delta(t)}{\mathrm{d}t^2}+k\delta=T_m(t)=>f(s)=Js^2+k$$

$J\mathrm{d}\Omega_m/\mathrm{d}t$ 表示惯性力矩，$T_{em}=k\delta$ 表示电磁力矩。为了使连接到无穷大电网的同步机产生阻尼振荡，有必要对上述微分方程进行延伸，将转矩分量成比例添加到功率角的一阶导数 $k_p\cdot\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$，这使得特征多项式 $f(s)$ 当中增加 $k_p\cdot s$ 项

$$J\frac{\mathrm{d}^2\delta(t)}{\mathrm{d}t^2}+k_p\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}+k\delta(t)=T_m=>f(s)=Js^2+k_p s+k$$

考虑到这一点，具有两个共轭复数零特征多项式的形式为

$$f(s)=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

转矩分量 $k_p\cdot\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 促进了阻尼，$\xi=k_p/(2J\omega_n)$ 所需的转矩分量可以通过引入负载转矩的微小变化来实现。由于 $T_m(t)=T_{m0}-k_p\cdot\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 因此同步电机获得稳定的，具有良好的阻尼响应的功率角 δ 和电磁转矩是可以实现的。然而，改变转矩 T_m 是十分困难的。在同步发电机中，转矩 $T_T=-T_m$ 是由蒸汽或水涡轮机提供的，而非由预期动态控制提供。同步电机由各自的机械负荷和工作电机的转矩 T_m 来加载，这两个转矩都不包含 $k_p\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 分量。阻尼转矩 $k_p\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 可以从同步电机中获得，条件是电磁转矩 T_{em} 包含两个分量，第一个分量与 $\sin(\delta)\sim\delta$ 成正比，第二个分量与功率角的一阶导数 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 成正比。转矩变化由 $T_{em}=k\delta+k_p\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 决定。

交流电机的电磁转矩取决于磁通和定子电流。另一方面，定子电流可以通过改变定

子电压来改变。因此，一般来说，可以通过改变定子电压来实现电磁转矩的改变。由于定子电压的变化由 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 决定，定子电流和电磁转矩的变化也基于 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$。然而此次的分析对象是连接到无穷大电网的同步电机，定子电压幅值和频率不变而非根据 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 变化。因此，阻尼力矩 $\Delta T_{em}=k_p\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 要求改变电机结构并引入新的绕组。

21.5　阻尼绕组

考虑到 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t=\omega_e-\omega_m$，阻尼力矩 $\Delta T_{em}=k_p\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t$ 正比于$\Omega_e-\Omega_m$。稳态时，同步转速Ω_e等于转子转速 Ω_m。在负载转矩扰动引起的瞬变期间，转子速度在同步速度周围振荡，于是产生转差频率$\omega_e-\omega_m$。通过在同步电机的转子添加短路笼，就可以使其获得类似于感应电机的性能。笼形感应电机的电磁转矩正比于转速差。同样，将短路绕组笼安装在同步电机的转子上会加大转矩分量，该转矩分量正比于功率角的一阶导数 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t=\omega_e-\omega_m=\omega_k$。

在圆筒形，转子层压磁路的同步机中，短路绕组的插入方式同感应电机。导电笼杆沿轴向方向插入转子磁路，紧挨转子表面，靠近气隙。在转子筒的两端，杆通过导电板或圆环被短路。在转子磁路为凸极时，如图 21.5 所示，杆应内置在磁极磁头。在火电厂，以高圆周速度运行的高功率同步发电机中，转子磁路具有由非层压钢板的元素，从而实现机械强度大的离心力。这种情况下就不在需要在转子上加短路笼。瞬态响应时，同步速度Ω_e和转子速度 Ω_m之间的差值增大了转差频率$\omega_e-\omega_m=\omega_k$，转子磁路的磁感应引起了由非层压导电钢制成的转子部件内产生涡流。均质钢件内的涡电流产生的影响与由短路笼引起的影响相同。

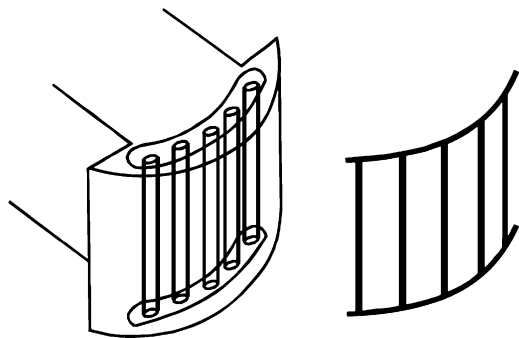


图 21.5　转子磁极头部插入阻尼绕组，转子导体通过短路板两端短路

以上考虑为在同步电机转子中插入新的绕组，成为阻尼绕组。该绕组是用来抑制同步电机的振荡。问题在于，这个新的绕组是否影响了电机的稳态响应。

同步电机转子的短路笼在稳态时对电机运行无任何影响。由于定子磁场与转子旋转同步，在转子和场之间没有相对运动。因此，存在转子磁路内没有变化的磁感应。出于

这个原因，短路笼的绕组的磁通量不发生变化，并且它不产生电动势。因此，绕组中没有电流，并且转矩和磁通不发生变化。因此，电机以没有短路笼的绕组时相同的方式工作。在瞬态过程，转子相对于定子磁场运动，功率角的一阶导数等于$\omega_e - \omega_m = \omega_k \neq 0$。出于这一原因，绕组磁通变化，转差频率$\omega_e$产生电动势，这个电动势在短路笼中产生电流，电流的角频率等于 $d\delta/dt = \omega_k$。通过与磁场的相互作用，该电流增加了正比于转差的电磁转矩 $\Delta T_{em} = k_p d\delta/dt$，该转矩在稳态时不出现。$\Delta T_{em}$产生稳定影响，有助于无穷大电网中同步电机的振荡衰减。

21.6　同步电机的短路

在水力电厂或火电厂使用的大功率同步发电机有额定功率从几十到几百兆瓦。整个定子绕组的线电压范围从 6kV 高到 25kV。在大多数情况下，每台发电机有自己的电源变压器，称为块变压器。定子端子连接到此电力变压器的一次绕组。变压器的二次电压范围为从 100kV 到 700kV。二次绕组连接到三相高压输电网络，该网络延伸并到达大型城市和工业领域中，这里电力变压器输入高电压输出低电压。随后，将电能分配给用户。

电源系统包括：发电机、输电线路、电力变压器、配电线路，并且还有各个消费者。它有庞大的规模和贯穿整个国家。因此，就会出现频繁的故障，比如由于元件故障造成的短路、天气条件、人为错误等原因。电力系统包括一个复杂的保护系统来检测短路故障，中断了短路电流，并隔离该网络的故障部分。所述保护系统的一些功能，依赖于同步发电机供给的短路电流，从而区分短路事件的类型和位置。因此，在同步电机的研究中引入短路是有意义的。

当短路发生在发电厂旁的高压输电线路上，由同步发电机提供的短路电流正比与定子电动势，反比与等效短路阻抗。后者依赖于高压输电线路的串联阻抗，块变压器的串联阻抗，以及发电机绕组的内部阻抗。

在恒定励磁电流的同步发电机中，忽略电阻R_s，短路电流可以通过稳态等效电路图 20.1 来确定。其值是通过除以电动势E_0和串联阻抗$X_s = \omega_e L_s$确定。大型同步发电机的励磁绕组是由具有有限输出阻抗的直流电压的可控源提供的。因此，在短路瞬态，$i_R = I_R = \mathrm{const}$ 假设不成立。此外，大型同步发电机也有阻尼绕组。同步发电机的转子中阻尼绕组的存在降低了它的等效阻抗，增加了短路电流。同步电机的模型中包括短路阻尼绕组才可以得到短路电流更精确的计算值。

在第 15 章中，短路绕组可以由具有两个正交短路转子绕组的系统进行建模。带阻尼绕组的同步电机完整的模型包括 5 个耦合绕组。这 5 个绕组为（1）励磁绕组，（2）d 轴定子绕组，（3）q 轴定子绕组，（4）d 轴短路阻尼绕组，（5）q 轴短路阻尼绕组。通过该完整的模型中的 5 个耦合绕组可以更加精准地预测定子绕组中的短路电流。这种模型是比较复杂的，并且本章中并不使用。考虑到励磁绕组和阻尼绕组的影响，短路电流可做近似计算。

当短路发生在定子绕组端，定子电压降为零$\underline{U}_s=0$。在整个高压输电线路的实际短路状态时，定子电压不等于零。在定子端与短路位置处存在一个确定的串联阻抗$\underline{Z}_1$。考虑到$\underline{U}_s=0$，通过将阻抗$\underline{Z}_1$增加到定子绕组可以简化系统的分析。这意味着，定子绕组的电抗和电阻都将增加设备端子和短路点之间的等效串联电抗和串联电阻的量。进一步的考虑，将电机从短路点分离的外部电感和电阻就被包含在定子绕组的电感和电阻当中。考虑到这一点，进一步假设定子绕组短路（$\underline{U}_s=0$），即使是在高压输电线路中发生的短路情况也不例外。

接下来的短路分析假设故障前的定子电流等于零。另外，定子电阻 R_s 在高功率电机中可以忽略，则电压平衡方程为

$$\begin{aligned}\underline{u}_{dq} &= R_s\underline{i}_{dq} + d\underline{\Psi}_{dq}/dt + j\omega_n\underline{\Psi}_{dq} \\ &=> \underline{u}_s = 0 = d\underline{\Psi}_{dq}/dt + j\omega_n\underline{\Psi}_{dq}\end{aligned} \tag{21.2}$$

短路的同步电机瞬态过程包括了磁通分量 d 轴和 q 轴的变化。因此，不可以假设电机运行在稳定状态，稳态时，dq 坐标轴中的磁通分量的一阶导数都等于零。在另一方面，完成同步机的数学模型是相当复杂的，它包括定子绕组、励磁绕组和阻尼绕组。因此通过引入一定的近似简化分析来获得短路电流的估计值。这些近似值是基于一个事实，即阻尼绕组中表征暂态过程的时间常数衰减很快，而在励磁绕组中瞬态过程持续更长。因此，短路过程被分成 3 个区间：

1）暂态时间间隔，其中阻尼绕组中瞬态过程还没有停止，阻尼电流增大短路电流。

2）瞬态时间间隔在暂态时间间隔之后，而且在阻尼电流衰减至零时开始。

3）稳态时间间隔，在阻尼和励磁绕组的瞬态现象已经停止之后，短路电流可以从稳态等效电路图 20.1 确定。

21.6.1　直流分量

交流电流和电压的电路中的稳态操作会由于电压或电流源的逐级变化受到干扰，具体形式为改变电路的阻抗，或引入短路或开路。每当这样的瞬变发生，从以前的稳定状态过渡到一个新的稳定状态的过程中可能涉及一定量的直流电流，该直流电流在瞬变过程中产生，在电路进入新的稳定状态过程中衰减。在 $t=0$ 时刻将自感为 L 的线圈连接到电压源$u_L(t)=U_m\sin(\omega)$，$i_L(0)=0$。$t>0$ 时的线圈电流为$i_L(t)=(U_m/L/\omega)\cdot(1-\cos(\omega t))$，它包含了直流分量。在有限电阻 R 的线圈中，该直流电流按照时间常数 $\tau=L/R$ 衰减，在短路同步电机中有类似的过程发生。

定子绕组短路时，相电压等于零。因此，a 相的电压平衡方程为$u_a=0=R_s i_a+d\Psi_a/dt$。在大型同步电机中，电压降$R_s i_a$很小，所以方程变为 $d\Psi_a/dt=0$，即每相的磁通趋于短路时刻的$\Psi_a(0^-)$。因此，认为短路绕组中的磁通在短路故障期间保持恒定。即使是大功率的同步电机也有确定的定子阻抗值$R_s>0$。$R_s i_a$虽然很小，但确实会影响绕组磁通，特别是在较长的时间间隔下。考虑到短路时间有限，假设 $d\Psi_a/dt=0$ 可以简化短路电流的计算。

在短路前稳态期间，a 相磁通按照$\omega_m=\omega_e$的正弦函数变化。短路前磁通Ψ_a的平均值为零，在短路发生的时刻$\Psi_a=\Psi_a(0^-)$。如果电压降$R_s i_a$可以忽略，则 a 相磁通短路期间保持$\Psi_a(0^-)$，则Ψ_a包含了直流分量。由于很小的电压降$R_s i_a$的存在，磁通的直流分量呈指数衰减。时间常数 $\tau=L_{\gamma eS}/R_s$决定了直流分量的变化率，而它依赖于等效电感$L_{\gamma eS}$和定子电阻R_s。绕组电阻值越大导致直流分量衰减越快。关于由定子磁通的直流分量引起的电机转矩、转速以及 $\alpha\beta$ 和 dq 变量的变化的进一步分析，需要建立完整的数学模型。这个模型包括了阻尼绕组，而对它的分析是相当复杂和困难的。因此假设时间常数 $\tau=L_{\gamma eS}/R_s$相对较小，定子磁通的直流分量衰减相对较快。由于直流分量的衰减时间远短于短路现象的持续时间，因此可以忽视直流分量并假定磁通的初始值等于零。则短路时刻相磁链的初始值是由以下方程给出

$$\Psi_a(0^+)=\Psi_b(0^+)=\Psi_c(0^+)=0$$

$$\text{使得}\ \Psi_d(0^+)=\Psi_q(0^+)=0$$

本次讨论的目的是为了获得短路电流的近似变化。假设$\Psi_d(0^+)=\Psi_q(0^+)=0$，可以使分析得以简化，这一假设在计算短路电流$I_{SC}$时也要用到。

短路电流受到在短路瞬间励磁电流I_R以及同一时刻定子电流值的影响。故障前空载的同步电机的短路电流与故障前带载的同步电机短路电流不同。为了简化分析，接下来考虑空载电机发生短路的情况。因此，短路刚发生之后定子电流为零，使得$i_d(0^-)=0$，$i_q(0^-)=0$。尽管有上述的假设，随后的分析可以帮助读者理解短路瞬态的基本区间，并且还提供了粗略估计每个间隔中的短路电流的方法：

1）暂态时间间隔，阻尼绕组和励磁绕组都会加大短路电流I_{SC3}

2）在随后的瞬态时间间隔中，阻尼绕组电流已经为零，而短路电流I_{SC2}由励磁绕组提供。

3）稳态短路电流I_{SC1}的计算是在假设励磁绕组暂态过程已经结束的条件下，此时励磁电流I_R恒定。

假设励磁电流$i_R(t)=I_R$不变首先计算短路电流I_{SC1}。计算I_{SC1}时，认为励磁绕组是由电流源供电，电机没有阻尼绕组。

然后计算短路电流I_{SC2}，考虑励磁绕组中的瞬态现象，励磁绕组是由电压源供电。

最后，计算短路电流I_{SC3}，要同时考虑阻尼绕组和励磁绕组中的瞬态过程对定子绕组短路电流的影响。

21.6.2 I_{SC1}的计算

当其他绕组中的瞬态过程已经衰减，励磁绕组电流$i_R(t)=I_R$不发生变化时考虑短路电流I_{SC1}的计算。在计算过程中，假设阻尼绕组不存在，励磁绕组由电流源供电[1]。

---

[1] 大型同步电机的励磁绕组由可调直流电压供电。源电压作为驱动力用来控制励磁电流。短路发生之后，励磁电压的变化可以忽略不计，因此假设励磁绕组从电压源获得恒定电压。稍后，短路存在而瞬变现象衰变，假设励磁电流恒定，即励磁绕组由恒定电流源供电。

由于$\Psi_d = \Psi_q = 0$，不含有阻尼绕组的同步电机满足$L_q i_q = 0$，$L_q i_q + L_m I_P = 0$[⊖]。式（21.3）给出电流I_{SC1}分量，E_0表示空载电动势，由励磁电流I_R获得：

$$i_q = 0$$

$$i_d = -\frac{L_m I_P}{L_d} = -\frac{\omega_m L_m I_P}{\omega_m L_d} = -\frac{\omega_m L_m I_P}{\omega_m L_d} = -\frac{E_0}{X_d}$$

$$I_{SC1} = \frac{E_0}{X_d} \tag{21.3}$$

因此，短路电流的均方根值为$0.707 I_{SC1} = 0.707 \dfrac{E_0}{X_d}$，当短路故障持续时，电流$I_{SC1}$不会及时衰减，而是持续在定子绕组当中直到短路断开。相应的相电流的瞬时值可以通过对式（21.3）中的分量进行逆帕克变换和逆$3\Phi/2\Phi$变换获得。

21.6.3 I_{SC2}的计算

大型同步电机的励磁绕组要么由辅助直流发电机供电，它提供可调的励磁电压，被称为励磁机，或者由静态功率转换器供电，它具有将三相交流电压变换成可调的直流电压的大功率晶闸管。励磁机和静态功率转换器都可以被建模为一个直流电压源，该电压源提供可调节的电压，并且具有有限的、相对较低的内部电阻。励磁电压由励磁控制器来调节。当突然发生短路时，励磁电压在一段时间内保持不变，同短路之前的值，$U_R = R_R I_R$。I_R表示短路之前的励磁电流值，$i_R(t)$ 表示瞬态过程中励磁电流的变化。

当励磁绕组磁耦合到定子绕组，即为短路。由于定子绕组和励磁绕组之间存在有限的互感，定子短路电流会改变互感磁通。由于励磁绕组由电压源供电，这些改变将引起励磁电流的变化。假设励磁绕组的阻抗的电压降$U_R = R_R I_R$相对较小，则励磁绕组的电压平衡方程变为$\mathrm{d}\Psi_R/\mathrm{d}t = 0$。因此，由于励磁绕组由电压源供电，$R_R I_R \approx 0$，磁通$\Psi_R = L_R i_R + L_m i_d$保持短路故障之前的值$L_R I_R$。

基于上述考虑，定子磁通分量在短路瞬态过程中保持$\Psi_d(0^+) = \Psi_q(0^+) = 0$。定子磁通的一部分包围励磁绕组。同步 dq 坐标系的 d 轴与励磁绕组的磁轴重合。因此，$\Psi_d(0^+) = 0$ 会降低励磁绕组中的磁通。励磁绕组的磁通变化产生感应电动势，增大励磁电流$i_R(t)$，从而抑制励磁磁通的降低，使其维持短路之前的磁链。忽略励磁绕组的电压平衡方程中的电压降$R_R I_R$，假设在相对较短的时间间隔内$\mathrm{d}\Psi_R/\mathrm{d}t \approx 0$。考虑到这一点$\Psi_R$就趋向于保持短路前的值 Ψ_{R0}。因此

$$L_q i_q = 0 => i_q = 0$$

$$\Psi_R = L_R i_R + L_m i_d = \Psi_{R0} = L_R I_R, => i_R = I_{R0} - \frac{L_m}{L_d} i_d$$

$$\Psi_d = L_d i_d + L_m i_R = 0 = L_d i_d + L_m I_{R0} - \frac{L_m^2}{L_R} i_d \tag{21.4}$$

⊖ 在所考虑的情况下，电机配备阻尼绕组，但在这些绕组的暂态过程已经停止，并且阻尼绕组的电流等于零。

瞬态期间

$$i_d=-\frac{L_mI_{R0}}{L_d-\frac{L_m^2}{L_R}}=-\frac{L_mI_{R0}}{\left(\frac{L_dL_R-L_m^2}{L_R}\right)}=-\frac{L_mI_{R0}}{L'_d} \tag{21.5}$$

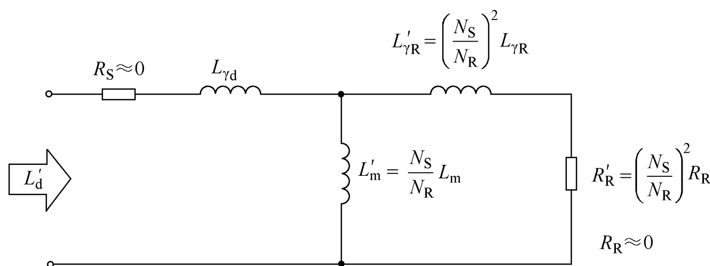


图 21.6 励磁绕组由电压源供电，无阻尼绕组的同步电机简化短路等效电路图

前面方程中的L'_d类似于变压器的二次绕组发生短路时的等效一次漏感。在这种情况下，d 轴的定子绕组对应一次绕组，短路励磁绕组对应二次绕组[㊀]。该变压器的等效电路如图 21.6 所示，$L'_{\gamma R}=(N_S/N_R)^2L_{\gamma R}$是定子侧励磁绕组的漏电感，$L'_m=(N_S/N_R)L_m$是定子侧励磁绕组的互感。$d$ 轴定子绕组的自感为$L_d=L_{\gamma d}+L'_m$，$L_{\gamma d}$是定子漏感。定子侧励磁绕组自感$L'_R=L'_{\gamma R}+L'_m$。

由于漏感比互感小得多，L'_d近似等于定子绕组漏感$L_{\gamma d}$和定子侧励磁绕组漏感$(N_S/N_R)^2L_{\gamma R}$之和

$$L'_d=\frac{X'_d}{\omega_m}=\frac{L_dL_R-L_m^2}{L_R}\approx L_{\gamma d}+L'_{\gamma R} \tag{21.6}$$

L'_d独立于定子绕组和励磁绕组的磁耦合系数 k。L'_d的实际值远小于自感L_d。

定子绕组瞬态过程中的定子电流幅值I_{SC2}由式（21.7）给出。$I_{SC1}<I_{SC2}$时

$$i_d=-\frac{L_mI_{R0}}{L'_d},\ I_{SC2}=\frac{L_mI_{R0}}{L'_d}=\frac{E_0}{X'_d} \tag{21.7}$$

由于励磁绕组的瞬态过程会加大短路电流，瞬态短路电流I_{SC2}会大于稳态短路电流I_{SC1}。如果励磁绕组瞬态衰减时短路仍然存在，I_{SC2}就会降低，趋于I_{SC1}。

定子电流分量i_d的负值会增大励磁电流i_R，使得励磁磁通保持短路前的值。由于励磁电压不变，励磁绕组的电压平衡方程为$U_R=R_RI_R=R_Ri_R+\mathrm{d}\Psi_R/\mathrm{d}t$。在瞬态过程中，励磁磁通的一阶导数为负，$\frac{\mathrm{d}\Psi_R}{\mathrm{d}t}=R_R(I_R-i_R)<0$，因此励磁磁通下降。励磁磁通的下降

㊀ 假设$R_RI_R\approx 0$，励磁绕组电压降为零，相当于短路绕组。

会降低定子绕组中的电动势。其结果是，定子绕组中的短路电流也会降低。

根据等效电路图 21.6 和图 21.7 可以分析瞬态过程中励磁磁通和励磁电流的变化，图中定子绕阻短路，定子电阻不存在。

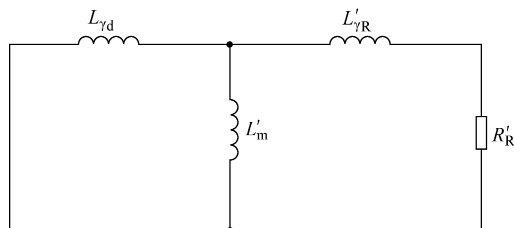


图 21.7　瞬态时间常数的计算

上述 RL 电路的时间常数为 $\tau' = L'_e/R'_R$，它决定了电路中的电流呈指数规律变化。L'_e是与电阻R'_R串联的等效电感。$L'_e = L'_{\gamma R} + L_{\gamma d}L'_m/(L_{\gamma d} + L'_m)$。因此

$$\tau' = \frac{1}{R'_R}\left(L'_{\gamma R} + \frac{L_{\gamma d}L'_m}{L_{\gamma d} + L'_m}\right) \tag{21.8}$$

在大多数的同步电机当中，τ'大于定子电流的一个周期 $T = 2\pi/\omega_m \approx 2\pi/\omega_e = 20\text{ms}$。磁通的振幅在一个周期 T 内的变化是非常小的。由于 T/τ' 比较小，定子电流的一个周期内的指数衰减可以近似为 $\exp(-T/\tau') \approx 1 - T/\tau' \approx 1$。短路时的定子电流可以看作是正弦的，振幅呈指数衰减。

通过前面的分析就可以得到没有阻尼绕组、电压源励磁的同步电机的短路电流的变化。在没有阻尼绕组的情况下，短路现象没有暂态。在瞬态时间间隔内，短路瞬间发生，定子相电流的幅值为I_{SC2}（见式（21.7））。它呈指数衰减，并达到稳定状态值I_{SC1}，电流幅值的变化由 τ'决定。相电流$i_a(t)$ 取决于短路前定子电压的初始阶段，短路的时刻，还有被忽略的电路电阻。举例说明，相电流$i_a(t)$ 的变化可能为

$$i_a(t) \approx \left\{I_{SC1} + (I_{SC2} - I_{SC1})\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right\}\sin(\omega_m t + \psi_a)$$

上面进行的分析考虑到了 d 轴的动态现象。在这种情况下，q 轴的电流和通量在短路之前分别为零。考虑瞬态过程中 d 轴和 q 轴的耦合可以进一步提高短路电流的计算精度。在正交轴瞬态现象之间的耦合可以从描述虚拟的 d 绕组和 q 绕组的电压平衡的微分方程中进行分析。必须注意，q 轴与励磁绕组没有磁耦合。同步电机的转子仅包含一个励磁绕组，此绕组的磁轴线与 dq 坐标系的 d 轴重合。由于这一原因，式（21.3）和式（21.7）表示在瞬态和稳态时间间隔内的短路电流的近似值。

21.6.4　I_{SC3}的计算

短路阻尼绕组的存在增加了短路电流的振幅，该绕组趋向于保持磁通不变。任何通量变化都会导致短路绕组中感应电动势和电流的变化来抑制磁通的变化，使其保持以前

值。当短路使得定子磁通趋向于零时，阻尼绕组作用是保持通量不变。磁通越大，定子电动势较大，使得短路电流幅值增大。阻尼绕组的瞬态过程停止时，这种效应消失。

阻尼绕组可以表示为两个正交的短路绕组，一个在 d 轴另一个在 q 轴。前面的例子中所描述的电机添加了短路转子笼，在同步旋转的 dq 坐标系中的电机模型里有三个绕组与 d 轴对齐。第一个是 d 轴虚拟定子相，第二个是励磁绕组，而第三个是与 d 轴对齐的阻尼绕组。Ψ_d 表示 d 轴的定子绕组磁通，Ψ_R 为励磁磁通，Ψ_D 为短路阻尼绕组的磁通。

与 d 轴对其的三个耦合绕组类似于有一级、二级和三级绕组的变压器。一级是定子绕组，二级是励磁绕组，三级绕组是 d 轴的阻尼绕组。对于短路时瞬态时间间隔的分析和假设在分析暂态时间间隔时也是有效的。即，计算 I_{SC3} 时假设励磁绕组和阻尼绕组在瞬态中短路。其等效变压器如图 21.8 所示，二级和三级绕组短路。

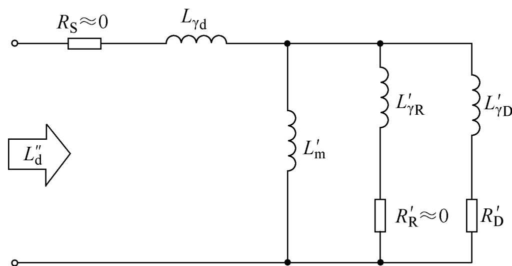


图 21.8 励磁绕组由电压源供电，含有阻尼绕组的同步电机简化短路等效电路图

第一个瞬态时间间隔内的短路电流 I_{SC3} 可以通过电感 L''_d 获得，L''_d 称为次瞬态电感，该电感相当于图 21.8 中短路变压器的等效一次电感。因此，它是从一次侧看进去的三绕组变压器的等效漏感。次瞬态电抗 $X''_d=\omega_m L''_d$，短路电流 I_{SC3} 反比于次瞬态电抗 X''_d。

电感 L''_d 如式（21.9）

$$L''_d=L_{\gamma d}+\left(\frac{1}{L'_m}+\frac{1}{L'_{\gamma R}}+\frac{1}{L'_{\gamma D}}\right)\approx L_{\gamma d}+\frac{L'_{\gamma R}L'_{\gamma D}}{L'_{\gamma R}+L'_{\gamma D}} \tag{21.9}$$

图 21.8 中三绕组系统的磁链和电流与式（21.10）的电感矩阵有关，通过电感矩阵和比较短路前后的磁通值可以确定 L''_d。为了确定短路电流 I_{SC3} 的初始值，定义短路前磁通为 $\Psi_d(0^-)$，$\Psi_R(0^-)$，$\Psi_D(0^-)$，短路后瞬间磁通为 $\Psi_d(0^+)$，$\Psi_R(0^+)$，$\Psi_D(0^+)$。

该短路分析假设前提是定子电流的初始值等于零（$i_d(0^-)=i_q(0^-)=0$），励磁电流等于稳态值（$I_{R0}(i_R(0^-)=I_{R0})$，电机在稳态运行时进入短路状态。因此，转子速度等于同步速度（$\omega_m=\omega_e$），d 轴阻尼绕组电流为零（$i_D(0^-)=0$）。3 个 d 轴绕组的电流和磁链关系如下电感矩阵：

$$[\Psi]=\begin{bmatrix}\Psi_d\\ \Psi_D\\ \Psi_R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_d & L_{dD} & L_m\\ L_{dD} & L_D & L_{RD}\\ L_m & L_{RD} & L_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d\\ i_D\\ i_R\end{bmatrix}=[L_{dRD}][i_{dRD}] \tag{21.10}$$

矩阵中L_{dD}表示 d 轴定子绕组和阻尼绕组的互感；L_{RD}表示励磁绕组和 d 轴阻尼绕组的互感；L_m表示 d 轴定子绕组和励磁绕组的互感；L_D、L_d和 L_R为相应绕组的自感。由于$i_d(0^-)=i_D(0^-)=0$，$i_R(0^-)=I_{R0}$，则短路之前的磁链为$\Psi_D(0^-)=L_{RD}I_{R0}$，$\Psi_R(0^-)=L_RI_{R0}$和 $\Psi_d(0^-)=L_mI_{R0}$。阻尼绕组短路、励磁绕组与低阻抗的电压源相连。如果忽略励磁绕组电阻R_R，则励磁电压R_RI_{R0}和电压降就可以忽略，暂态时励磁绕组和阻尼绕组短路。

短路绕组中的电动势试图保持绕组磁通不变，任何磁通的变化都会引起电动势和电流发生变化来阻止磁通的改变，抑制磁通的变化速率。因此，短路后的磁链为$\Psi_D(0^+)=\Psi_D(0^-)$ 和 $\Psi_R(0^+)=\Psi_R(0^-)$。

同时考虑瞬态间隔和稳态短路的情况，对定子绕组的初始磁通进行讨论，认为定子磁通的初始值等于零。如此，短路电流可以使用近似值来简化计算，稍后将进行类似讨论。

忽略电压降R_si_s时，短路后 a 相定子绕组的电压平衡方程变为$\mathrm{d}\Psi_a/\mathrm{d}t=0$。因此，定子磁通保持$\Psi_a(0^-)$ 不变，即$\Psi_a(0^+)=\Psi_a(0^-)$。假设$R_s=0$，定子绕组短路，定子磁通Ψ_a保持初始值。由于定子电阻的存在，定子电阻的压降会降低短路定子绕组的磁通。在短路瞬间，定子磁通和电流保持不变，可以将其看作直流分量，且呈指数衰减。定子电阻越大，衰减的时间常数越小。最终，定子电流和磁链的直流分量停止衰减，短路交流分量不变，由电动势和电机电抗决定。我们主要研究短路电流的交流分量。因此，直流分量对短路定子电流的均方根值和峰值的影响，于是可以假设该定子磁链在短路的瞬间初始值等于零。接下来假设定子相的磁链由$\Psi_a(0^-)$，$\Psi_b(0^-)$，$\Psi_c(0^-)$ 很快降为零。基于此之后，认为$\Psi_a(0^+)=\Psi_b(0^+)=\Psi_c(0^+)=0$，$\Psi_d(0^+)=\Psi_q(0^+)=0$。于是有式(21.11)：

$$\begin{bmatrix} i_d(0^+) \\ i_D(0^+) \\ i_R(0^+) \end{bmatrix} = [L_{dRD}]^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_d(0^+) \\ \Psi_D(0^+) \\ \Psi_R(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & L_{dD} & L_m \\ L_{dD} & L_D & L_{RD} \\ L_m & L_{RD} & L_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ L_{RD}I_{R0} \\ L_RI_{R0} \end{bmatrix}$$

$$i_d(0^+) = -\frac{L_m(L_RL_D-L_{RD}^2)}{L_dL_RL_D-L_dL_{RD}^2-L_RL_{dD}^2+2L_{dD}L_mL_{RD}-L_DL_m^2}I_{R0} \tag{21.11}$$

上面的表达式是比较复杂的，需要进行详细分析。由于它比较通用，可以将所有的电感乘以变比的平方折算在定子侧。

三个绕组的互感磁通通过同一磁路，磁阻为R_μ。将励磁绕组和阻尼绕组折算到定子侧实际上意味着用相同转数的定子绕组来等效这些绕组。因此，折算到定子侧的互感相等$L'_m=L'_{RD}=L'_{dD}$。自感可以表示为漏感和互感之和，$L_d=L'_m+L_{\gamma s}$，$L'_D=L'_m+L'_{\gamma D}$，$L'_R=L'_m+L'_{\gamma R}$。L'_{RD}，L'_{dD}，L'_D，$L'_{\gamma D}$，L'_R，和 $L'_{\gamma R}$为相应的折算到定子侧的电感值。假设漏感远小于自感，则

$$i_d(0^+) = -\frac{L_m(L'_{\gamma R}+L'_{\gamma D})}{L'_{\gamma R}L'_{\gamma D}+L_{\gamma d}L'_{\gamma D}+L_{\gamma d}L'_{\gamma R}}I_{R0}$$

$$= -\frac{L_m I_{R0}}{\dfrac{L'_{\gamma R}L'_{\gamma D}}{L'_{\gamma R}+L'_{\gamma D}}+L_{\gamma d}} = -\frac{L_m I_{R0}}{L''_d}$$

L''_d为次瞬态电感，由式（21.9）给出。次瞬态短路电流I_{SC3}由式（21.12）给出，其幅值取决于电动势E_0，反比于次瞬态电抗。I_{SC3}存在于短路发生瞬间，瞬态时间间隔当中。它大于I_{SC2}，决定了瞬态时间间隔内短路电流的幅值：

$$I_{SC3} = \frac{L_m I_{R0}}{L''_d} = \frac{E_0}{\omega_m L''_d} \tag{21.12}$$

$$I_{SC3} = \frac{L_m I_{R0}}{\dfrac{L'_{\gamma R}L'_{\gamma D}}{L'_{\gamma R}+L'_{\gamma D}}+L_{\gamma d}} > \frac{L_m I_{R0}}{L'_{\gamma R}+L_{\gamma d}} = I_{SC2} \tag{21.13}$$

之前的分析表明阻尼绕组中产生的电流会增大定子电流幅值。由于阻尼绕组的存在会减少相应的漏感，使其由$L'_{\gamma e}=L_{\gamma d}+L'_{\gamma R}$降为$L''_{\gamma e}=L_{\gamma d}+L'_{\gamma R}L'_{\gamma D}/(L'_{\gamma R}+L'_{\gamma D})$，从而增大短路电流。$i_D(t)$存在于短路阻尼笼的杆上。由于这些杆上存在电阻，电流呈指数衰减，衰减时间由τ''决定。τ''取决于阻尼绕组电阻R'_D，以及电流$i_D(t)$的等效电感。根据图21.9，该电感为$L'_{\gamma d}$，L'_m，$L'_{\gamma R}$并联之后与$L'_{\gamma D}$串联。基于图21.9，假设励磁绕组电阻R_R可以忽略，互感L'_m远大于漏感，从式（21.14）得出τ''。

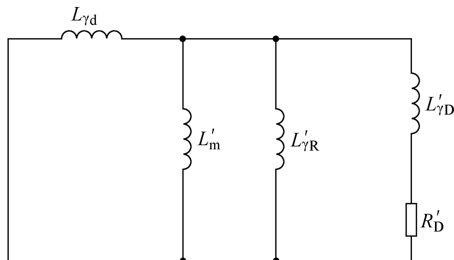


图21.9　次瞬态时间常数的计算

$$\tau'' = \frac{1}{R'_D}\left[L_{\gamma D} + \left(\frac{1}{L'_m}+\frac{1}{L'_{\gamma R}}+\frac{1}{L'_{\gamma d}}\right)^{-1}\right]$$
$$\approx \frac{1}{R'_D}\left(L_{\gamma D} + \frac{L'_{\gamma R}L'_{\gamma d}}{L'_{\gamma R}+L'_{\gamma d}}\right) \tag{21.14}$$

折算到定子侧之后，阻尼绕组电阻R'_D要大于励磁绕组电阻。因此，次瞬态时间常数τ''小于瞬态时间常数τ'，同步电机的短路过程包含了三个时间段。首先是简短的次瞬态，如果不中断的话，接着是稍长的瞬态，最后进入稳态短路。接下来讨论这三个时间间隔。

21.7　瞬态和次瞬态现象

21.7.1　时间间隔1

短路的第一时间间隔是次瞬态时间间隔，其开始于短路发生时刻之后，定子绕组中形成电流I_{SC3}。该电流正比于励磁电流，反比于次瞬态电感L''_d。次瞬态电流呈指数衰减，

时间常数为 τ''。一段时间之后，电流降为I_{SC2}。次瞬态结束时，阻尼绕组的瞬态过程已经衰减，阻尼电流降为零。至此，阻尼绕组对短路电流不再有影响。

21.7.2　时间间隔 2

第二个时间段为瞬态时间，定子绕组中短路电流幅值为I_{SC2}。该电流正比于励磁电流，反比于瞬态电感L'_d，按照时间常数 τ'呈指数衰减。一段时间过后，定子电流幅值降为I_{SC1}。瞬态时间结束时，励磁绕组中的瞬态过程已经衰减，励磁电流等于稳态时的电流值$I_{R0}=U_R/R_R$。至此，励磁绕组不再影响定子绕组的短路电流。

21.7.3　时间间隔 3

在次瞬态和瞬态时间过后，励磁绕组和阻尼绕组的瞬态过程衰减。阻尼电流降为零，励磁电流等于其稳态值。至此，短路电流可以从稳态等效电路图 20.1 中获得。定子绕组的稳态短路电流幅值为I_{SC1}，其正比于励磁电流，反比于定子电感$L_d \approx L_m$。该幅值直到保护机制被激活，断开定子绕组短路之前不会改变。

时间间隔 1 通常被称为次瞬态时间间隔，$X''_d=\omega_m L''_d$为次瞬态电抗；时间间隔 2 为瞬态时间间隔，$X'_d=\omega_m L'_d$为瞬态电抗。瞬态和次瞬态时间间隔内的短路电流表达式都采取了一系列近似旨在简化计算，使得基本的短路现象更为明显。表达式如（21.12）、（21.13）和（21.14）是相对简单的，它们明确地表示出电机参数对短路电流振幅和动态响应的影响。想要得到更精确的计算，需要建立包括 5 个磁耦合绕组的同步电机的完整的数学模型。

同步电机中，x_d的实际值在 0.8 ~ 2 之间，X'_d 在 0.2 ~ 0.5 之间，而次瞬态电抗在 0.1 ~ 0.3 之间。瞬态时间常数 τ' 的范围为 400ms ~ 2s，次瞬态时间间隔 τ'' 的范围为 30 ~ 150ms。

第 22 章　同步电机变频技术

本章我们研究带有三相逆变器和静止功率变换器的同步电机的操作与特性。静止功率变换器是一个通过调节电压脉冲宽度来调节定子电压的装置，它根据电机需要来调节脉冲序列，产生平均电压。同步电机的变速通过改变频率和改变定子电压大小来实现。本章介绍和说明了一些控制转矩和速度的基本原理，同时也讨论和解释了控制定子电流的必要性。在依靠 PWM 技术控制的三相逆变器作为电压驱动器的基础上，本章介绍了控制定子电流的基本原理，分析和解释了逆变器供电的磁体内置式和贴片式永磁同步电机的弱磁调速问题，介绍和说明了弱磁调速模式下的恒功率运行区域，并用含有定子自感的公式表达出来。在分析电机及其相关的三相逆变器的工作区域的基础上，我们从T-Ω平面图中得到了稳态工作区域和瞬态工作区域，研究了由逆变器供电的同步电机。

22.1　逆变器供电的同步电机

中小型同步电机在运动控制、汽车驱动、工业机器人或机械生产等领域得到广泛应用。在这些领域中，同步电机产生的转矩需要克服运动阻力，提供加速和减速所需要的动力。同步电机带动被控制的目标沿着预定轨迹运行时，它作为驱动器，克服阻力，产生控制转子速度或位置所需要的转矩。在这些领域，同步电机比其他种类的电机更胜任这些任务。同步电机与其他种类电机相比，它的优点包括功率比高、转矩比大、惯性低和损耗相对比较低。永磁同步电机没有转子绕组和转子损耗，因此这种电机的效率要明显高于其他种类电机。转子为永磁体时，相比较于其他带有励磁绕组的电机而言，永磁同步电机转子磁链没有大小为 $U_R = R_R I_R^2$ 的功率损耗。另外，同步电机转子磁路不存在铁耗，这是由于转子与定子同步旋转，转子磁路没有磁场相对运动，不产生电磁感应 B。

由于没有转子损耗，转子中没有热量产生，永磁同步电机的散热变得非常简单，它可以承受更大的定子电流密度和磁场强度，这使得它的功率比[㊀]更高。与同样额定功率的异步电机相比，永磁同步电机的体积和质量能减小 20% ~30% 。从功率平衡图上看，同步电机和感应电机定子绕组损耗相同，定子磁路和机械子系统的损耗也亦是如此。感应电机的转子损耗大小为 sP_δ，其中 s 是转差率，P_δ 是气隙电磁功率。同步电机没有转差损耗，这一点大大提升了它的效率。

㊀ 功率比是机械的额定功率和机械的体积或重量的比值。转矩比与之类似。

运动控制、汽车驱动、工业自动化等应用需要电机转子能够提供连续不断变化的转速。同步电机的转速与同步转速 $\Omega_e = p\omega_e$ 相对应，同步转速由电源提供的频率 ω_e 来决定。因此，同步电机的转速控制需要独立的三相调频调压电源，它根据电机需要来改变频率和电压。同一个工业机器人或电力驱动车辆中的两个同步电机常常工作在两个不同的转速。所以每个同步电机都有它自己的频率要求，每个电机都需要一个能提供定子要求的电压和电流的独立电源。这些电源通常是一些含有晶体管和功率开关的三相逆变器组成的。交替换相开闭的晶体管产生不同宽度的脉冲序列。这些脉冲序列在一个换相周期内生成平均电压。脉冲宽度呈正弦变化时，平均电压以适合的电压和频率呈正弦变化。通过脉冲宽度调制技术（PWM），我们能根据电机需要生成符合的脉冲序列平均值。

22.2　转矩控制原理

控制目标的速度和位置按照某些预定轨迹运行时，同步永磁电机是一个转矩驱动器，它作为执行机构产生转矩，克服运动阻力，控制转子的速度和位置使其保持需要的参数值。速度调整器和位置调整器计算被控制的变量 $\Omega_m(\theta_m)$ 和它的给定值 $\Omega^*(\theta^*)$ 之间的偏差，并计算用来消除偏差 $\Delta\Omega = \Omega^* - \Omega_m$ 所需要的电磁转矩 T_{em}^* 使得受控变量到达给定的位置。电机转子速度的变化由牛顿运动公式 $J\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t = T_{em} - T_m$ 来计算，T_m 表示负载转矩，T_{em} 表示同步电机提供的电磁转矩。电磁转矩 T_{em} 需要克服负载转矩 T_m 并提供转速变化所需要的加速度 $J\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$。速度（位置）调整器计算转矩的给定值信号 T_{em}^*，永磁同步电机的任务是根据相应的给定信号产生实际的电磁转矩 T_{em}。运动控制的速度与准确性取决于按给定信号产生转矩的转矩执行器的能力。换句话说，电磁转矩需要准确且无延时的跟踪给定信号 T_{em}^*，使得 $T_{em}^* = T_m$。

由 19 章，同步电机的电磁转矩是由定子磁链向量和定子电流向量产生的。所以

$$T_{em} = \frac{3p}{2}(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)$$

在永磁电机中，定子磁链分为 $\Psi_d = \Psi_{Rm} + L_d i_d$ 和 $\Psi_q = L_q i_q$，Ψ_{Rm} 表示由永磁体产生的通过气隙并交链定子绕组的磁链。代入 Ψ_{Rm}，转矩表达式变为

$$T_{em} = \frac{3p}{2}\Psi_{Rm} i_q + \frac{3p}{2}(L_d - L_q) i_d i_q$$

很多永磁同步电机转子磁路呈圆柱形，d 轴和 q 轴的磁阻差异很小。因此，我们可以认为 $L_d = L_q$。则

$$T_{em} = \frac{3p}{2}\Psi_{Rm} i_q$$

可以看出，永磁同步电机的电磁转矩是由定子电流的 q 轴分量产生的。为了减少定子绕组的铜耗和减小给定子绕组供电的功率转换器的规格，我们最好是以尽可能小的定子电流来传递给定的电磁转矩 T_{em}。电磁转矩与定子电流的比值 T_{em}/I_s 等于 $T_{em}/\mathrm{sqrt}(i_d^2 + i_q^2)$，

当 $i_d=0$ 时它达到最小值，此时定子电流向量方向与 q 轴重合，转子磁链与定子电流向量方向夹角为 $\pi/2$。

因为永磁体产生的磁链 Ψ_{Rm}大小不变，所以永磁同步电机的转矩控制是由改变定子电流 i_q 来实现的。知道给定值 T_{em}^*后，我们需要通过计算 dq 轴分量，得到定子电流分量 $i_d=0$ 和 $i_q=(2/(3p))T_{em}^*/\Psi_{Rm}=KT_{em}^*$。永磁电机的转矩控制是通过调整定子电流，产生定子电流 q 轴分量来得到符合要求的转矩的。传递给定转矩的速度与准确性是由调整定子电流的速度与准确度来决定的。借助于给定子绕组供电的三相逆变器和静态功率变换器置，我们利用功率晶体管开关来调节定子电压，得到期望的相电流，实现电流调节。

图 22.1 为一个带有功率晶体管开关的三相整流逆变器。逆变器连接同步电机的定子绕组。电源电压 u_R，u_S 和 u_T 通过由 6 个二极管构成的整流器来整流。整流器提供直流电压 E，它所在的电路也叫直流环节。元件 L_{DC}和 C_{DC}作为滤波器来去除掉整流器输出的交流部分。晶体管 VT_K 和 R_K 电阻构成的制动单元能减小中间环节的直流电压 E，这可以使电机作为发电机运行时可以把功率反馈到直流环节，使直流环节的电容充电并提升直流环节的电压。因为用的是三相二极管整流电路，所以回馈功率不能返回到主电网而都消耗在了电阻 R_K 上。6 个功率晶体管 VT_1- VT_6 轮换开闭可获得脉冲形状的相电压。通过功率晶体管的开关状态来调整三相电流使它们向给定值 $i_a^*(t)$，$i_b^*(t)$ 和 $i_c^*(t)$ 靠近。

三相电机的电流控制问题需要更为细致的研究，这个内容超越了本章范围。所以，在本章后面只是介绍一些基本的信息和原理。

若磁链 Ψ_{Rm}，转子位置 θ_m，极对数 $p=1$ 和转矩给定值 T_{em}^*已知，则可得永磁同步电机的相电流给定值。假设电流调整器使得相电流维持在它们的给定值上，相电流给定值为

$$
\begin{aligned}
i_d^* &= \left(\frac{2}{3}\frac{T_{em}^*}{\Psi_{Rm}}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\
i_d^* &= \left(\frac{2}{3}\frac{T_{em}^*}{\Psi_{Rm}}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\\
i_d^* &= \left(\frac{2}{3}\frac{T_{em}^*}{\Psi_{Rm}}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{3}\right)
\end{aligned}
\tag{22.1}
$$

则定子相电流为 $i_a(t)=i_a^*(t)$，$i_b(t)=i_b^*(t)$ 和 $i_c(t)=i_c^*(t)$。它们在在同步电机 dq 轴上中能产生定子电流向量 $i_d=0$ 和 $i_q=(2/3)T_{em}^*/\Psi_{Rm}$。相应的，电机产生的电磁转矩 $T_{em}=T_{em}^*$。

22.3　电流控制原理

给三相电机供电的静态功率转换器如图 22.1 所示。通过控制功率晶体管 VT_1- VT_6

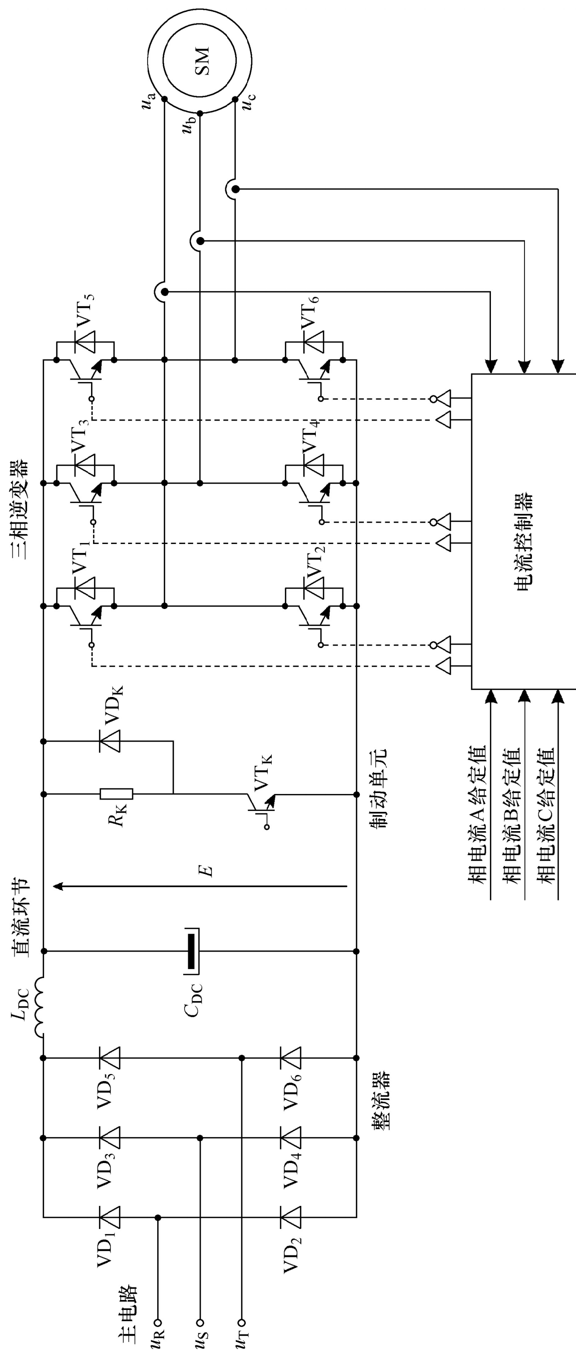


图 22.1 含有永磁同步电机和相关电流控制电路的功率转换拓扑结构图

的开关运动状态，可以改变定子端的相电压。相电压 u_a，u_b 和 u_c 影响相应的相电流，实现基本的电流控制。电流控制的目的是获得电流分量 i_d 和 i_q 来得到相应的理想参数。电流分量 i_d 对转矩没有作用，经常被设定为 0。期望的转矩通过建立与转矩成比例的电流分量 i_q 来得到。转子磁链向量与 d 轴重合，而 $i_d=0$，定子电流向量与磁链正交。以下讨论如何设置电流分量 i_d 和 i_q 以达到它们的期望值的基本原理。

d-q 轴向的分量由相电流 i_a、i_b、i_c 来产生。如何获得期望的电流分量 i_d 和 i_q 等价于如何控制相电流。相电流给定值 i_a^*、i_b^*、i_c^* 的计算来自于式（22.1），它们由转矩给定值 T_{em}^*和转子位置 θ_m 来决定。转矩给定值来自于速度控制器或位置控制器，转子位置经常由连接转子轴的传感器来测量。根据式（22.1）建立的相电流向量，实现了定子电流向量与转子磁链向量相垂直。

在图 22.1 所示的电流控制电路中，测量得到的相电流 i_a、i_b、i_c 和与相应的给定值比较来得到偏差 Δi_a、Δi_b 和 Δi_c。根据这些偏差，电流控制器生成作用于晶体管开关的门信号。通过改变相电压来减小偏差并最终使它达到 0。理论上，电流控制系统可实现 $i_a(t)=i_a^*(t)$，$i_b(t)=i_b^*(t)$ 和 $i_c(t)=i_c^*(t)$。

在三相逆变器中有 6 个功率晶体管开关。开关构成三相组合，每个组合生成一相电压。逆变器电压由从直流环节得到的直流电压 E 提供。当每一相的上开关闭合时，输出相与直流环节的电容 C_{DC}正极板相连。当每一相的下开关闭合时，输出相与直流环节的电容 C_{DC}负极板相连。假设相绕组为星形连接，它的中点电势介于两个电容板电势之间，闭合上或下的开关使得相电压为 $+E/2$ 或 $-E/2$。当 a 相的上开关 VT_1 闭合时，相电压 $u_a(t)$ 变为 $+E/2$，而下开关闭合则使得 $u_a(t)=-E/2$。

在时长为 $T\approx 100\mu s$ 的换流周期中，a 相的上开关在时间 t_{on}内闭合，其余的时间 $T-t_{on}$里上开关断开而下开关闭合。相电压 $u_a(t)$ 在时间 t_{on}内等于 $+E/2$，周期中其余时间为 $-E/2$。在 t_{on}范围内正脉冲的时间宽度可以在 $0<t_{on}<T$ 范围内连续变化。相电压在一周期 T 里的平均值为 $u_{a(av)}(t)=E(t_{on}/T-1/2)$。脉冲宽度 t_{on}的连续变化使得相电压平均值不断在 $-E/2$ 到 $+E/2$ 之间变化。相电流瞬时值 $i_a(t)$ 的变化由相电压瞬时值和绕组中的电磁感应电动势的差值来控制。一个换相周期内的相电流的变动由相电压平均值 $u_a(av)$ 控制。相电流的变化由电压平衡公式 $\Psi_a=\Psi_m\cos(\theta_m)+L_S i_a$ 得到，$R_S i_a$ 是电流通过定子时定子电阻上的电压降，而 $d\Psi_a/dt$ 是一相绕组的电磁感应电动势。

气隙磁场分布由永磁体特性和它的移动特点来决定。定子电流也同样影响气隙磁场分布。定子相 a 绕组交链的磁链 $\Psi_a=L_S i_a+\Psi_{Rm(a)}$，它分为两个部分。$\Psi_{Rm(a)}$部分由永磁体产生，而 $L_S i_a$ 部分由定子电流㊀产生。磁链 Ψ_{Rm}是永磁体产生的，它穿过气隙并交链定子绕组，它的幅值和空间方向决定了 $\Psi_{Rm(a)}$。Ψ_{Rm}的幅值受到永磁体的特性、气隙 δ、磁路特点的共同影响。转子位置角 θ_m 决定了永磁体磁链的空间位置。所以，磁链 $\Psi_{Rm(a)}$由 Ψ_{Rm}的幅值和转子位置角 θ_m 来控制。当 $\theta_m=0$ 时，a 相磁场轴线与转子对齐，

㊀ a 相磁链不止由相电流 i_a 决定，也由相电流 i_b 和 i_c 决定，这是因为相绕组间有互感存在。

使得 $\Psi_{Rm(a)}=\Psi_{Rm}$。

定子磁链 Ψ_a 的变化产生电动势 $d\Psi_a/dt$。后者有两部分，$L_S di_a/dt$ 和 $d\Psi_{Rm(a)}/dt$。第二部分 $e_a=d\Psi_{Rm(a)}/dt$ 由永磁体产生，其变化取决于转速 $\Omega_m=d\theta_m/dt$。

$i_a=-i_b-i_c$ 且假设 $L_{ab}=L_{ac}$，磁链 $L_a i_a+L_{ab}i_b+L_{ac}i_c=L_a i_a+L_{ab}(i_b+i_c)$ 可以写为 $L_S i_a$。

转速恒定时，永磁体磁链方向为 $\theta_m=\theta_0+p\Omega_m t$，它交链相绕组 a 的磁链为 $\Psi_{Rm}\cos(\theta_m)$。除此之外，相绕组同样产生磁链 $L_S i_a$。因此，该相总交链的磁链为 $\Psi_a=\Psi_m\cos(\theta_m)+L_S i_a$。代入得到电压平衡方程式后变为 $u_a=R_S i_a+L_S di_a/dt-\omega_m\Psi_m\sin(\theta_m)$。如果忽略定子电阻上的电压降并使得 $e_a=d\Psi_{Rm(a)}/dt=-\omega_m\Psi_m\sin(\theta_m)$，电压平衡公式变为 $u_a=L_S di_a/dt+e_a$。这样的话，定子电流 i_a 的变化率就表示为

$$\frac{di_a}{dt}=\frac{1}{L_S}(u_a-e_a)=\frac{1}{L_S}(\pm E-e_a) \tag{22.2}$$

在 $E\geqslant|e_a|$的工作状况，相电压 u_a 在上式中起主要作用。当 $u_a=+E/2$ 时，定子电流和电动势 e_a 的变化率为正。当 $u_a=-E/2$ 时，定子电流变化率为负。换句话说，我们可以通过闭合开关 VT_1 来增大 i_a 或断开开关 VT_2 来降低 i_a。这是电流控制的基本前提。当相电流 i_a 与给定值不符时，电流调节器计算出偏差 $\Delta i_a=i_a^*-i_a$。随后它生成命令信号给逆变器，减小并最终消除偏差 Δi_a。例如当偏差为正（$\Delta i_a>0$）时，需要闭合上开关 VT_1 使得 $di_q/dt>0$ 来使偏差减小。如果偏差为负（$\Delta i_a<0$）需要闭合下开关 VT_2 使得相电流减小 $di_q/dt<0$，使偏差 $\Delta i_a=i_a^*-i_a$ 趋于0。一个被证明简单有效的三相交流电机的定子电流控制原理遵循下列表达式

$$u_a=\frac{E}{2}\mathrm{sign}(i_a^*-i_a),\ u_b=\frac{E}{2}\mathrm{sign}(i_b^*-i_b),\ u_c=\frac{E}{2}\mathrm{sign}(i_c^*-i_c)$$

根据以上控制定律，晶体管功率开关 VT_1-VT_6 根据对应的电流偏差信号 Δi 交替开闭。一旦偏差为正时，上开关闭合，增加相电流并减小偏差。当偏差为负时，下开关闭合使得相电流减小并把偏差往正方向带动。但是，直接应用上述控制定律可能导致功率晶体管换流频率增高并增加换流损耗。为了克服换向频率问题，可以在生成电流偏差信号的比较器中引入磁滞比较方法[⊖]。这样，换向频率问题通过磁滞比较器得到了限制。

实际的电流控制器在 d-q 坐标结构框架下运行。这表示偏差 $\Delta i_d=i_d^*-i_d=0-i_d$ 和 $\Delta i_q=i_q^*-i_q$ 通过给定值计算得到并根据 d-q 轴向量形式反馈信号。电流控制器计算电压 u_d 和 u_q，消除检测到的偏差并驱动电流 i_d 和 i_q 到它们的给定值上去。电压 u_d 和 u_q 由帕克变换转换成静态 α-β 向量形式，把得到的电压 u_α 和 u_β 经过克拉克逆变换生成相电压的给定值。脉宽调节三相逆变器用于为三相电机提供所需要的电压。

⊖ 磁滞比较器由先前的比较和新的输入信号来产生输出信号。当上一次比较器的输出为 +1 时，输入信号下降到 $-H$ 来使新产生的输出信号为 -1。当上一次比较器的输出为 -1 时，输入信号上升到 $+H$ 来使新的输出信号为 +1。

从电流偏差 $\Delta i_{dq}=\Delta i_d+j\Delta i_q$ 中计算控制量 $u_{dq}=u_d+ju_q$ 的方法叫做控制算法，而调整器和控制器是执行运算并提供输出信号的装置。控制算法经常是指一个被数字信号处理机执行的程序。调整器经常是以它的传递函数来描述。控制反应的速度与品质由控制器的传递函数来决定。

带有 6 个功率晶体管开关的功率转换器为三相电机绕组提供合适的电压。所以，它可看做一个可控的电压源。它通过闭合的反馈环控制定子电流，一个理想的电流控制器可达到 $i_a=i_a^*$，$i_b=i_b^*$，$i_c=i_c^*$。这把电流控制的三相逆变器变为一个电流源。所以，三相电机就像由一个电流源来供电。采用定子电流控制方法运行的永磁同步电机的运行方法与采用电枢电流控制的恒定电源的直流电机的运行方法相似。它由电流控制器的特点来决定电机所传递的转矩的速度与准确性。

22.4　弱磁控制

电流控制的前提是定子相绕组中感应的电动势低于相电压，若 E 是三相逆变器的直流环电路中的直流电压。则任一时刻必须要保证 $E/2\geqslant|e_a|=|\omega_m\Psi_m\sin(\theta_m)|$。当 $i_d=0$ 时，电机定子 d 轴上的磁链为

$$\Psi_d=\Psi_{Rm}+L_di_d=\Psi_{Rm} \tag{22.3}$$

q 轴上的定子磁链为 $\Psi_q=L_qi_q$。贴片式永磁同步电机中，定子电感 L_d 和 L_q 很小，它们标幺值介于 0.01～0.05 之间。因此，q 轴方向的磁链远小于磁链 Ψ_{Rm}。考虑到这个原因，我们可以认为气隙磁场的幅值为 $\Psi_m\approx\Psi_{Rm}+L_di_d=\Psi_{Rm}=\Psi_n$，这里 Ψ_n 是额定的磁链。在电机以额定转速 $\Omega_n=\omega_n/p\approx E/\Psi_{Rm}/p=E/\Psi_n/p$ 时，它产生感应的电动势为额定电压，这也是三相逆变器能承受的最大电压。当 $i_d=0$ 时，永磁电机转速不能超过其额定值。

当电机转速接近额定值时，电动势接近最大值。这时没有更多的电压余量来控制定子电流。换句话说，这时不可能生成期望的转矩所需要的定子电流。

电机高于额定转速工作时需要保持电动势低于额定电压。为了实现这一目标，需要减小磁链，即，实现弱磁控制。为了保持电动势 $\omega_m\Psi_m$ 小于有效电压，气隙磁链 Ψ_m 要根据转速来变化调整。气隙磁链按照 $\Psi_m(\Omega_m)=\Psi_n\cdot\Omega_n/\Omega_m=\Psi_{Rm}\cdot\omega_n/\omega_m$ 变化，转速高于额定转速时，感应电动势保持在额定值 $\Psi_{Rm}\cdot\omega_n$ 上。我们知道 q 轴磁链 L_qi_q 远小于永磁体磁链。后面假设成立的前提是贴片永磁同步电机的电感 L_d 和 L_q 很小。由 $\Psi_{Rm}>>\Psi_q$ 和 $\Psi_m\approx\Psi_d$，磁链 Ψ_m 的变化决定磁链 Ψ_d 的变化，根据公式

$$\Psi_d(\Omega_m)|_{\Omega_m>\Omega_n}=\Psi_{Rm}\frac{\Omega_n}{\Omega_m}=\Psi_{Rm}\frac{\omega_n}{\omega_m} \tag{22.4}$$

若 $\Psi_m\approx\Psi_{Rm}+L_di_d$，可以得出结论：弱磁控制需要在 d 轴上有一个负的电流 $i_d<0$，它可以起到削弱磁场或退磁的作用。转子转速与削弱磁链的电流的关系由式（22.5）和图 22.2 给出。电机额定磁链 Ψ_n 与 Ψ_{Rm}相等

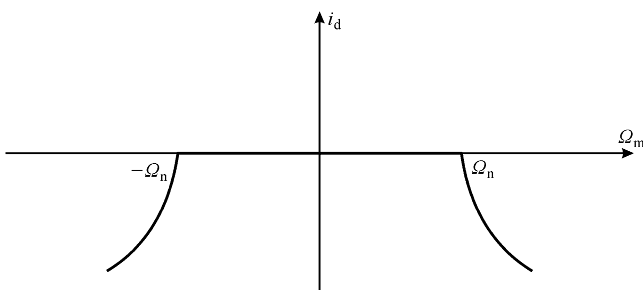


图 22.2　弱磁调速中去磁电流 i_d 的变化

$$i_d(\omega_m)|_{\omega_m>\omega_n} = -\frac{\Psi_{Rm}}{L_m}\left(1-\frac{\Omega_n}{\Omega_m}\right) \approx -\frac{\Psi_n}{L_d}\left(1-\frac{\omega_n}{\omega_m}\right) \tag{22.5}$$

问题（22.1）一个隐极永磁同步电机定子电感 $L_S = 0.05$。试求电机稳态运行时的最大转速，设转子上无机械负载。

解答（22.1）电机高于额定转速运行时，需要在 d 轴上施加削弱磁链的值为负的电流 $i_d<0$。这个电流削弱 d 轴磁链并维持电动势在可控的电压范围之内。没有施加负载转矩时，电磁转矩和 q 轴电流为 0。由于 $i_q=0$，我们可以用所有的定子电流来削弱 d 轴磁场。稳态运行时，定子电流绕组中的电流不能超过额定电流。因此，去磁电流的标幺值保持在$i_d=-1$。把去磁电流 $i_d(\omega_m)$ 的关系式代入弱磁调速控制中，可得 $(1-\omega_n/\omega_m) = L_S/\Psi_{Rm} = L_S/\Psi_n$。而额定磁链的标幺值等于 1，由此可得 $\omega_n/\omega_m = 1-0.05 = 0.95$，$\omega_m = 1.0525\omega_n$。

本例说明贴片式永磁同步电机定子电感很小，转速在额定值以上运行时定子电感不能使转子的最大速度值明显提升。因此这种同步电机不应工作在弱磁调速区域。而感应伺服电机能够工作在弱磁情况并能达到高于额定值的转速，这是因为感应电机的磁链是由定子电流产生而非永磁体产生。同步伺服电机的这个缺点是异步伺服电机仍然在被使用的根本原因。在两种电机的其他方面，同步电机都占有优势。理论上同步电机的转子损耗为 0，而感应电机内有相当大的转子损耗 $P_{Cu2}=sP_n$，它正比于转差。没有转子损耗有利于同步电机的冷却，提高电流和磁链密度。因此，同步伺服电机有更高的功率比和转矩比，而且它的体积小于同规格的感应电机。同步伺服电机的转子有更小的转动惯量 J，这一点对很多调速的操作都有利。但在某些电气装置应用场合需要电机能够很好的实现在高于额定转速状态下的弱磁运行，相对于同步伺服电机，感应伺服电机在这些场合具有很大的优势。

贴片式永磁同步电机定子电感很小。这使得它在诸如机械自动化和机械手等运动控制中有很大优势。因为电感 L_S 很小，所以定子电流变化率 $di_a/dt=(u_a-e_a)/L_S$ 很大，能达到 $di_a/dt\approx 10^4 I_n/s$，这使得电磁转矩 $T_{em}=k|\Psi_{Rm}\times i_S|$从 0 变化到额定值只需 100μs。灵敏的转矩反应有利于增加带宽，提高在速度控制领域和位置控制领域的闭环控制性能。因此，贴片式永磁同步电机在工业自动化，机械自动化和很多需要有速度控

制环和位置控制环的运动控制领域有很多应用。在这些领域，很难进行弱磁控制的这个问题被认为并不是很明显的缺点。

22.5 暂态和稳态运行区域

因为定子绕组的电感很小，标幺值介于 $L_S = 0.01 \sim 0.05$ 之间，所以永磁电机的转速工作区域为 $\Omega_m \in [-\Omega_n, +\Omega_n]$。电机的空载最大稳态转速为 $\Omega_{max(ss)} = \Omega_n/(1 - L_S)$，它超过了额定转速一些。在 $T_{em} - \Omega_m$ 图中，稳定工作区域与横坐标的交点的速度为 $\Omega_n/(1 - L_S)$，它高于额定转速一些。对于转矩的稳态工作区域，它由定子电流额定值来决定。稳态转矩限制在了额定转矩范围内，即 $-T_n \leqslant T_{em} \leqslant +T_n$。稳态工作区域和瞬态工作区域如图 22.3 所示。

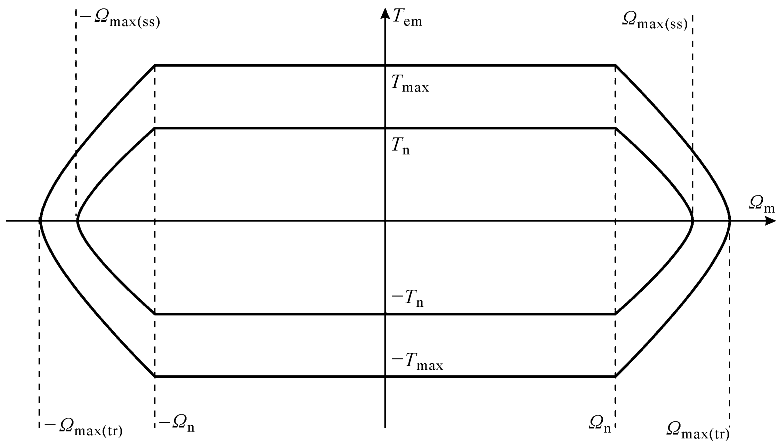


图 22.3　同步永磁电机的暂态和稳态工作范围

暂态工作区域由最大定子电流瞬时值决定。定子电流可能在一个简短的间隔时间超过额定电流。这不会使电机过热，因为在两个电流脉冲之间的时间段内，时间很充足并使得电流和转矩都降了下来，从而电机得到了冷却。电机的很多动作指令控制一般是循环给定的。每个周期内，为了生成期望的加速和减速动力，电机要在相对短的时间内产生很大的转矩。这些短间隔时间很多都接着长间隔时间，而这些间隔时间内转矩和定子电流都是下降的。所以，最大转矩和一个运动周期内转矩的均方根值的比值很大，定子电流也是一样。因此，瞬态工作区域由偶尔能超过额定转矩的最大转矩来限制。一般设计和制造的永磁同步电机需要保证 I_{max}/I_n 过载值不超过 5。

电机能承受的最大电流取决于制造水平和连接定子绕组的三相逆变器的规格。逆变器中的功率半导体开关含有不耐热且承载电流很小的硅晶体。一旦硅晶体中的电流密度超过某一界限，突然增加的温度将会改变晶体结构并造成功率半导体开关的永久损伤。

功率半导体开关的电流只能在某些间隔时间内超过电流限制，时间间隔为毫秒级。大的峰值电流也会造成同步伺服电机的损伤。大的定子电流可能会伤害永磁体。定子电流产生定子磁动势，它由电流大小和转速快慢决定。电流大时，定子磁动势在磁体中产生大的去磁磁场。在永磁体的 B-H 特性曲线中，当磁体工作点（B，H）靠近矫顽磁场 $H_C<0$ 时，永磁体的磁感应强度 B 减小为 0。对于很多永磁体材料，到达矫顽磁场 H_C 就会损坏永磁体。一旦永磁体工作于该点时，其剩余的磁场感应返回不了初始值。剩余磁场感应反而下降两到三倍。因此设计时应考虑由磁场过饱和导致磁体损坏的风险。同时，最大允许定子电流值必须与连接定子绕组的三相逆变器内的半导体电力开关的峰值电流规格匹配。

最大转矩 T_{max} 决定瞬态工作区域的范围，它由峰值电流 I_{max} 决定。最大空载转速 $\Omega_{max(tr)}$ 由在某一短暂时间内达到的最大空载转速方程 $\Omega_{max(tr)}=\Omega_n/(1-I_{max}L_S)$ 决定，这里定子电感和峰值电流都是标幺值。

问题（22.2）隐极同步永磁电机定子自感为 $L_S=0.05$。找出它的所能达到的最大转速。设峰值电流为 $I_{max}=5$，机械负载为 0。

解答（22.2）利用弱磁调速区域中的的去磁电流表达式 $i_d(\omega_m)$，得到 $(1-\omega_n/\omega_m)=I_{max}L_S/\Psi_{Rm}=I_{max}L_S/\Psi_n$。额定磁链的标幺值为 1；所以，额定转速与最大转速的比值为 $\omega_n/\omega_m=1-5\times0.05=0.75$，得 $\Omega_m=1.33\Omega_n$。

永磁同步电机同样也被应用在那些需要电机的效率高、损耗低、功率比高，但又不需要电磁转矩快速变化的领域。在这些应用中，电机没有运动控制任务，没有速度控制和位置控制的环节。这些电机的应用例子包括风机、家用电器、高压交流发电系统，作为再生能源的发电机如风力发电机、电力推动电动机、自动化中的辅助驱动装置等。效率高、重量轻、惯性低是永磁电机能够取代同类型的感应电机的原因。为了改进同步永磁电机的弱磁调速性能，可以把永磁体从转子表面埋入转子磁路里，增大定子自感。根据式（22.5），更大的定子自感能改善同步电机高于额定转速时的性能。但是，同步永磁电机的弱磁调速性能不如感应电机。工作于弱磁调速区域的同步永磁电机需要很多的去磁电流 $i_d<0$，而这些对转矩没有贡献，且定子电流 $I_S=\mathrm{sqrt}(i_d^2+i_q^2)$ 的升高会带来更多的铜耗。因此在那些需要弱磁调速范围大，转速比率 Ω_m/Ω_n 高的领域还是需要使用感应电机。

参 考 文 献

1. Kloeffler RC, Kerchner RM, Brenneman JL (1949) Direct current machinery. McMillan, New York
2. Kimbark EW (1956) Power system stability. Synchronous machines, vol Ⅲ. Wiley, New York
3. White DC, Woodson HH (1959) Electromechanical energy conversion. Wiley, New York
4. Shortley GH, Williams DE (1961) Elements of physics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs
5. Edwards JD (1973) Electrical machines: introduction to principles and characteristics. Intertext Books International Textbook Company Limited, Aylesbury
6. Slemon GR, Straughen A (1980) Electrical machines. Addison Wesley, Reading
7. Petrović M (1987) Ispitivanje električnih mašina. Naučna knjiga, Beograd
8. Vukosavić SN (2007) Digital control of electrical drives. Springer, New York
9. Wildi T (2006) Electrical machines, drives and power systems. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River
10. Seeley S (1958) Electromechanical energy conversion. McGraw-Hill, New York
11. Brown D, Hamilton EP (1984) Electromechanical energy conversion. McMillan, New York
12. Fitzgerald AE, Kingsley C (1961) Electrical machinery. McGraw-Hill, New York
13. Alger PL (1965) Induction machines. Gordon and Breach, New York
14. Chalmers BJ (1988) Electric motor handbook. Butterworth, London
15. Krause PC, Wasynczuk O, Sudhoff S (1995) Analysis of electric machinery. IEEE Press, Piscataway

Translation from English language edition: Electrical Machines By Slobodan N. Vukosavic Copyright © 2013 Springer New York Springer New York is a part of Springer Science + Business Media All Rights Reserved

本书中文简体翻译版由机械工业出版社独家出版并限在中国大陆地区销售。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或发行本书的任何部分

北京市版权局著作权合同登记图字：01-2013-7168 号。

图书在版编目（CIP）数据

电机/（塞尔）乌克塞维克著；余龙海，刘光军，廖育武译. —北京：机械工业出版社，2015. 3

（国际电气工程先进技术译丛）

书名原文：Electrical machines

ISBN 978-7-111-48627-5

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①乌…②余…③刘…④廖… Ⅲ. ①电机学 Ⅳ. ①TM3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 271172 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：赵玲丽 责任编辑：赵玲丽

版式设计：霍永明 责任校对：刘怡丹

封面设计：马精明 责任印制：乔 宇

北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）

2015 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 29 印张 · 647 千字

0001—3000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-48627-5

定价：98.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务 网络服务

服务咨询热线：010-88361066 机工官网：www. cmpbook. com

读者购书热线：010-68326294 机工官博：weibo. com/cmp1952

010-88379203 金书网：www. golden-book. com

封面无防伪标均为盗版 教育服务网：www. cmpedu. com

关于本书

本书基本覆盖了电机在它们的典型应用领域的功能。采用坐标变换是为了努力得到一个更直观、简洁和易于使用的模型。

本书尽量缩减了数学推导的篇幅，优先考虑培养电机的系统概念、解释电机的电端口和机械端口的使用和外部特性。本书覆盖了大多数与电机尺寸、转矩和功率相关的概念，解释了损耗和次生影响，勾勒了可以忽略次生影响的工况和条件。

尽管研究和使用电机的数学模型、等效电路和机械特性的目标贯穿于本书，机电转换过程的物理内涵才是本书始终关注的焦点。本书还包括了诸如槽型、永磁体位置以及它们对电机参数和性能的影响等内容。

本书适用于电气工程的本科生，可作为电机的入门课程。本书也推荐给准备做毕业论文的学生，他们需要考虑对电机理解、建模、电源控制和电机的具体说明。另外，本书也可作为电动机和发电机相关的工程人员的有益的参考书。

为中华崛起传播智慧

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037

电话服务
服务咨询热线：010-88361066
读者购书热线：010-68326294
010-88379203

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
金书网：www.golden-book.com
教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

策划编辑◎赵玲丽

国际视野　科技前沿

国际电气工程先进技术译丛

《电机》
《柔性交流输电系统：建模与控制》（原书第2版）
《车辆驱动系统建模与优化》（原书第3版）
《嵌入式系统在智能电器和能源管理中的应用》
《高级测量仪器与计算机I/O设计：精度界定和控制及其工业应用》（原书第2版）
《固体氧化物燃料电池的动态建模与预测控制》
《氢能源和车辆系统》
《纳米技术与能源》
《电能效率：技术与应用》
《自主移动机器人行为建模与控制》
《环境能源发电：太阳能、风能和海洋能》
《智能电网——融合可再生、分布式及高效能源》
《电动汽车融入现代电网》
《太阳能照明》
《超级电容器：材料、系统及应用》
《太阳能发电系统控制技术》
《ESD物理与器件》
《锂二次电池原理与应用》
《风力发电并网运行的无功管理》
《超大规模集成电路物理设计：从图分割到时序收敛》
《海上风电成本建模：安装与拆除》
《智能电网——设计与分析基础》
《功率理论与电能质量治理》
《混合动力电动汽车原理及应用前景》
《智能电网中的传导电磁干扰》
《风能转换技术进展》
《电机传动系统控制》
《储氢材料：储存性能表征》
《风力机技术》
《小型风力机：分析、设计与应用》
《通信系统高电压保护》
《磁性测量手册》
《ESD设计与综合》
《太阳能利用技术及工程应用》
《超级电容器的应用》
《小型风力机：分析、设计与应用》
《太阳电池、LED和二极管的原理：PN结的作用》
《风力发电系统 —— 技术与趋势》
《可持续电力系统的建模与控制：面向更为智能和绿色的电网》
《电力系统高级预测技术和发电优化调度》
《大规模储能技术》
《风电系统电能质量和稳定性对策》
《环境能源发电：太阳能、风能和海洋能》
《传热学：电力电子器件热管理》
《现代电力电子学与交流传动》
《功率半导体器件：原理、特性和可靠性》
《风能系统——实现安全可靠运行的优化设计与建设》
《储能技术》
《光伏系统工程》（原书第3版）
《光伏与风力发电系统并网变换器》
《先进电气驱动的分析、建模与控制》



机械工业出版社微信服务号



上架指导　工业技术／电机学

ISBN 978-7-111-48627-5　定价：98.00元